



Termín odeslání 25. 5. 2002

Milí řešitelé,

po nějaké době opět vyšlo další číslo . Příprava soustředění nám zabrala hodně času, takže jsme jej nestihli dokončit dříve. Doufáme, že vzniklé zpoždění omluvíte a že se vám budou nové úlohy a témátka líbit. Také připomínáme, že je možné posílat reakce i na články uveřejněné v zápisu z konference ve Skřípině.

Redakce

Zadání úloh

Úloha 5.1 – Padající bublinky (7b)

Určitě jste už někdy viděli mýdlovou bublinku, jak se pomalu snáší k zemi. Zkuste se teď na takovou bublinku podívat trochu více fyzikálně. Dokážete určit, jakou rychlostí bude klesat a na jakých vlastnostech tato rychlost závisí? Zkuste potřebné údaje změřit nebo kvalifikovaně odhadnout a porovnejte váš model s výsledkem experimentu.

Nebo můžete postupovat naopak. Změřte rychlost padání u co nejvíce různých bublinek za různých podmínek a ze zjištěných údajů odvodte nějaký obecný vztah – na čem a jak ta rychlost závisí.

Úloha 5.2 – Čísla ze čtyř číslic (5b)

Úlohy ve stylu „Napište číslo 6 pouze pomocí čtyř čtyřek“ a podobné asi znáte. My ale nechceme podceňovat vaše schopnosti, takže vám tu předkládáme zajímavější problém. Vymyslete, jak vypadají výrazy, obsahující právě čtyři písmena n a jinak libovolné množství jiných znaků kromě čísel a písmen, takové, že pokud na místo n napíšeme libovolnou číslici od jedné do devíti, bude mít výraz pokaždé stejnou hodnotu. Např. jedničku můžeme vyjádřit takto:

$$1 = \frac{n + n}{n + n}.$$

Dokážete tímto způsobem napsat všechna přirozená čísla od jedné do 21? A jde to vůbec?

Pozn.: V této úloze je dovoleno psát desetinná čísla bez počáteční nuly. Tedy výraz „ n bude mít, pokud za n dosadíme dvojku, hodnotu 0,2.“

Úloha 3 – Superkomprimace (5b)

Firma *ZeoSinc*TM ohlásila sedmého ledna, že právě ona hodlá položit nový milník oboru komprese dat, a to vynalezením perfektního komprimačního algoritmu. Tento algoritmus má umožnit bezztrátově komprimovat libovolný (obsahující i úplně náhodné data) soubor přibližně stokrát.

Na tiskové konferenci na dotaz novináře: „*Jak vnímáte známou poučku¹, tvrdící, že něco takového prostě není možné?*“ odpověděl mluvčí firmy následovně:

„*Tenhle důvod jsme slyšeli už mnohokrát, že to nemůže fungovat.*

„*Lidé často prohlašují, že právě tohle je důvod, proč naše technologie nemůže fungovat. Hodláme tento mýtus zbořit. Dokazujeme to, co před námi nikdo nedokázal. Dovedeme zkomprimovat libovolnou (every single) permutaci n -prvkové množiny. Detaily budou uveřejněny během několika dní.*“

Dovedete dokázat výše uvedenou poučku? Co si myslíte o lidech, kteří pracují pro firmu *ZeoSinc*TM?

Zadání témat

Téma 7 – Vylievanie

Preskúmajte, ako čo najrýchlejšie vyprázdniť fľašu naplnenú tekutinou bez použitia (alebo s použitím) akýchkoľvek externých technických nástrojov. Experimentálne zistite čas, ktorý je potrebný na vyprázdnenie štandardnej sklenenej, 0,7 litrovej mineráلكovej, resp. 0,5 litrovej pivnej fľaše.

Keďže fľaša musí zostať po experimente nepoškodená, medzi povolené nástroje sa kladivo určite nepovažuje.

Řešení témat

Téma 1 – Mnohostěny

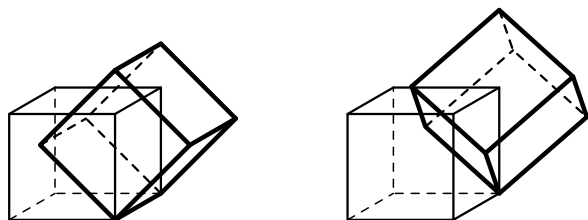
Pozn. red.: Zajímavou úvahu nad tím, proč se na fotbalové míče používá právě „poloprávidelný“ dvaatřicetistěn, nám zaslal Prof. Tibor Vansa.

¹ Tato poučka – věta – mluví o tom, že není možné najít algoritmus, který by dovedl každý soubor bez výjimky zmenšit alespoň o jeden znak. Myslí se tím samozřejmě bezztrátová komprese, algoritmus musí být schopen zkomprimovaný soubor rozbalit zpět na původní beze změny.

Proč zrovna polopravidelný dvaatřicetistěn?

Prof. Tibor Vansa

Hledal jsem nějaký mnohostěn místo toho fotbalového. Hrál jsem si s dvacetistěnem² a přemýšlel, proč se nekutálí rovně. Mnohostěn se totiž raději převálí přes hranu než přes vrchol, musí totiž vyzvednout těžiště do menší výšky. Snadno se to představí u krychle – viz obr. 1 a obr. 2. Co s tím? Tak vrcholy prostě uřežeme. Ale tím jsme dostali fotbalovou loptu!



Obr. 1

Obr. 2

Pozn. red.: Tento způsob se zdá být dobrým návodem na „polopravidelná“ tělesa. Jaká tělesa dostaneme, pokud uřežeme vrcholy ostatním platonským tělesům – čtyřstěnu, krychli, osmistěnu nebo dvanáctistěnu?

Mimoходом existuje těleso, které má více stěn než „fotbalový míč“, ale má stejně „pěkné“ vlastnosti, tj. každý vrchol je tvořen spojením (ne nutně shodných) pravidelných mnohoúhelníků o stejné délce hrany, všechny jeho vrcholy leží na jedné kulové ploše a každý vrchol je stejného typu (tj. stěny sousedící s jedním vrcholem lze pomocí otočení a posunutí zobrazit na stěny sousedící s jiným vrcholem³)? (Tato definice je zobecněním definice platonského tělesa⁴ – a samozřejmě platonská tělesa zahrnuje.) Nebo vás napadá lepší definice „pěknosti“ takovýchto těles?

Pokoušel jsem se vymyslet jiný způsob, jak slevit z definice platonského tělesa, abychom získali další, i když „méně pěkná“, tělesa. Napadlo mě slevit z požadavku existence koule opsané na existenci koule vepsané.⁵ Že je to skutečně slabší požadavek je jasné, neboť všechna platonská tělesa kouli vepsanou

² Pozn. red.: To je dobrá volba, neboť právě dvacetistěn je ze všech platonských těles „nejvíce podobný kouli“, tj. má největší úhel mezi stěnami.

³ Bez této dodatečné podmínky by definici odpovídal např. pravidelný pětiboký jehlan, jehož stěny jsou rovnostranné trojúhelníky.

⁴ Platonským tělesem nazýváme (konvexní) n -stěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a všechny jeho vrcholy leží na stejné kulové ploše.

⁵ Zde není potřeba dodatečný předpoklad jako v předchozím případě, neboť zde zůstává požadavek stejných mnohoúhelníků, a tomu např. jehlan zmíněný v předchozí poznámce nevyhovuje. Navíc zde nemá smysl.

mají, kdežto např. „polopravidelný“ desetistěn (viz obr. 3) kouli vepsanou má (to je celkem jednoduše vidět ze symetrie), ale opsanou nikoli (dokážete to někdo?).

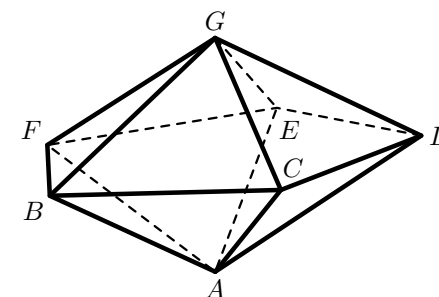
Toto těleso má dva typy vrcholů – jedny, ve kterých se sbíhá 5 hran (A a G), a druhé, ve kterých se sbíhají čtyři hrany (B, C, D, E , a F).

Abychom obě nabízené definice nějak odlišili, nazývejme „takto polopravidelná“ tělesa *polopravidelnými tělesy druhého druhu*, kdežto tělesa „polopravidelná“ ve smyslu definice uvedené na předchozí straně *polopravidelnými tělesy prvního druhu*.

Pokuste se najít nějaká další polopravidelná tělesa jak prvního, tak druhého druhu.

Napadá mě ještě jedna otázka – je obou druhů polopravidelných těles nekonečné množství?

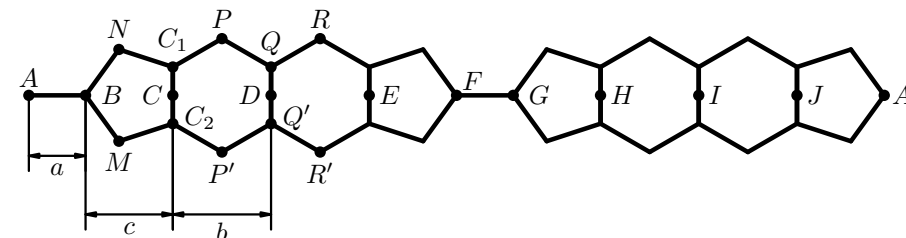
Bc. Stanislav Basovník vypočítal vnitřní úhly a poloměr koule opsané a vepsané (šestiúhelníkům). Jeho výsledek je narozdíl od výsledků jeho předchůdců proveden v radikálech⁶ (i když vlastně vše odvozuje z hodnot goniometrických funkcí, které nikde nespočítal).



Obr. 3

Prvky mnohostěnu

Bc. Standa Basovník



Obr. 4

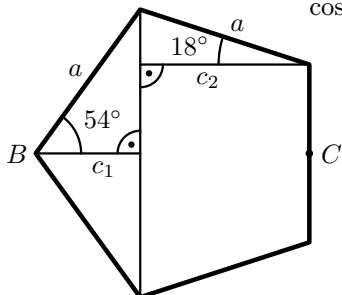
Znám délku hrany a . Odtud se pokusím zjistit ostatní prvky mnohostěnu. Vyjdu z obr. 4, což je podle Prof. Tibora Vansy pás, ze kterého je poskládán

⁶ Ve výrazech skládajících se pouze z sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocnin.

mnohostěn. Ve svých dalších úvahách použijí následující hodnoty goniometrických funkcí:

$$\begin{aligned}\cos 18^\circ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}, \\ \cos 36^\circ &= \sin 54^\circ = \frac{1}{4} (5 + \sqrt{5}), \\ \cos 54^\circ &= \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},\end{aligned}\quad (1.1)$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}. \quad (1.2)$$



Obr. 5

Označme si c vzdálenost $|BC|$. Podle obrázku 5 platí

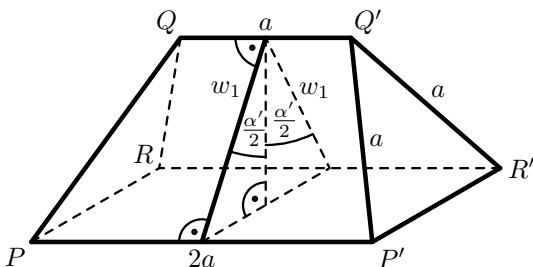
$$\begin{aligned}c &= c_1 + c_2 = [a \cdot \cos 54^\circ] + [a \cdot \cos 18^\circ] = \\ &= \left[\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right] + \left[\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right].\end{aligned}$$

Po úpravách $c = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

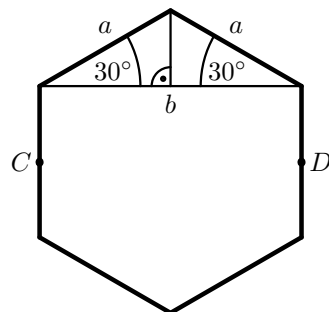
Označme si b vzdálenost $|CD|$. Podle obr. 6 platí

$$b = |CD| = 2a \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot a. \quad (1.3)$$

Spočítáme nyní úhel mezi šestiúhelníkovými stěnami α' . Na obr. 4 jsou body P, R, Q a P', R', Q' vrcholy pravidelných pětiúhelníků, body P, Q', Q', P' a R, Q', Q', R' pak vrcholy pravidelných šestiúhelníků. Pokud z „fotbalového míče“ uřízneme okolí hrany QQ' dostaneme těleso na obr. 7. Pro vzdálenosti platí



Obr. 7 (Ve skutečnosti je obrázek plošší.)



Obr. 6

$$\begin{aligned}|QQ'| &= a, \\ |PP'| &= |RR'| = 2a, \\ |P'Q'| &= |R'Q'| = \\ &= |PQ| = |RQ| = a.\end{aligned}$$

Použitím definice funkce sinus dostaneme

$$\alpha' = 2 \cdot \arcsin \frac{|PR|}{2w_1},$$

kde pro w_1 platí, podle rovnice (1.3) (uvědomme si, že lichoběžník $PQQ'P'$ jest polovinou pravidelného šestiúhelníka),

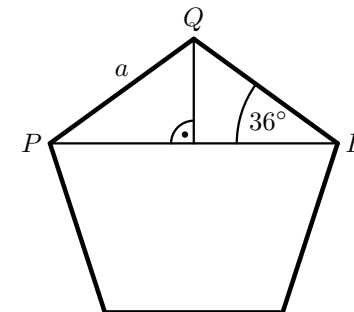
$$w_1 = \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

a vzdálenost $|PR|$ určíme z obrázku 8 (uvědomme si, že trojúhelník PRQ vznikl seříznutím pravidelného pětiúhelníka)

$$|PR| = 2a \cdot \cos 36^\circ = \frac{a}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}\alpha' &= 2 \cdot \arcsin \frac{\frac{a}{4} \cdot (1 + \sqrt{5})}{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}} = \\ &= 2 \cdot \arcsin \frac{(1 + \sqrt{5})}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$



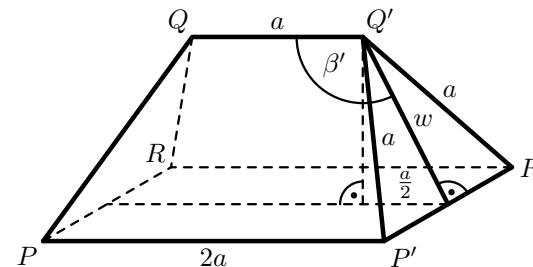
Obr. 8

Nyní určíme úhel β' mezi pětiúhelníkem a spojnicí šestiúhelníků. Na obrázku 9 je stejné těleso jako na obr. 7. Platí

$$\beta' = 90^\circ + \arcsin \frac{a}{2w} = 90^\circ + \arcsin \frac{a}{2w},$$

kde w spočítáme jako (P', Q', R' jest částí pětiúhelníka, viz obr. 5)

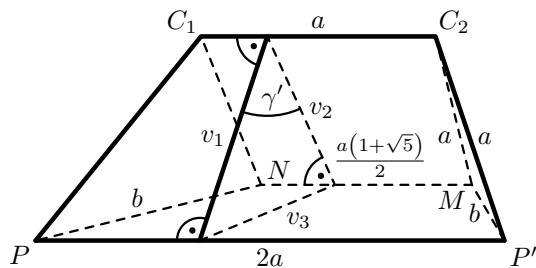
$$w = c_1 = a \cdot \sin 36^\circ = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (5 - \sqrt{5})}.$$



Obr. 9

Po dosazení

$$\begin{aligned}\beta' &= 90^\circ + \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}} \right] = 90^\circ + \arcsin \left[\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} \right] = \\ &= 90^\circ + \arcsin \left[\sqrt{\frac{2 \cdot (5+\sqrt{5})}{20}} \right] = 90^\circ + \arcsin \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \right].\end{aligned}$$



Obr. 10

Při určování úhlu γ' mezi šestiúhelníkem a pětiúhelníkem vyjdeme z obr. 10 (lichoběžník PC_1C_2P' jest polovinou šestiúhelníka, lichoběžník NC_1C_2M částí pětiúhelníka a trojúhelník PNC_1 , resp. $P'MC_2$ částí šestiúhelníka). Dle obr. 6 platí

$$v_1 = \frac{b}{2} = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a.$$

Dle obr. 5 platí

$$v_2 = c_2 = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}.$$

Z obr. 10 pak odvodíme

$$\begin{aligned}v_3^2 &= |P'M|^2 - \left(\frac{|PP'| - |MN|}{2} \right)^2 = b^2 - \left(2a - \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}) \right)^2 = \\ &= 3a^2 - \frac{a^2}{4} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{16} (48 - 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} - 5) = \frac{a^2}{8} (17 + 3 \cdot \sqrt{5}).\end{aligned}$$

Opět z obr. 10 vypočteme úhel γ' pomocí kosinové věty ($z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\angle XZY)$)

$$\gamma' = \arccos \frac{v_1^2 + v_2^2 - v_3^2}{2v_1v_2},$$

po dosazení za v_1 , v_2 a v_3 z předchozích rovnic

$$\begin{aligned}\gamma' &= \arccos \left[\frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{2}(5+\sqrt{5}) - \frac{a^2}{8}(17+3\sqrt{5})}{2 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}} \right] = \\ &= \arccos \left[\frac{\frac{1}{8} \cdot 6 + 5 + \sqrt{5} - 17 - 3\sqrt{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}}} \right] = \arccos \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{(-6-2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}}} \right] = \\ &= \arccos \left[-\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{6}(5+\sqrt{5})} \right] = \arccos \left[-\frac{\sqrt{(14+6\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{\sqrt{6}(5+\sqrt{5})} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \right] = \\ &= \arccos \left[-\frac{\sqrt{(100+44\sqrt{5})(5-\sqrt{5})^2}}{\sqrt{6}(5^2+(\sqrt{5})^2)} \right] = \arccos \left[-\frac{2 \cdot \sqrt{(25+11\sqrt{5})(30-10\sqrt{5})}}{\sqrt{6} \cdot 20} \right] = \\ &= \arccos \left[-\frac{\sqrt{750-550+330\sqrt{5}-250\sqrt{5}}}{\sqrt{6} \cdot 10} \right] = \arccos \left[-\frac{2 \cdot \sqrt{50+20\sqrt{5}}}{\sqrt{6} \cdot 10} \right] = \\ &= \arccos \left[-\sqrt{\frac{50+20\sqrt{5}}{\sqrt{6} \cdot 25}} \right] = \arccos \left[-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right].\end{aligned}$$

Nyní určíme poloměr koule vepsané šestiúhelníkovým stěnám f a koule opsané ϱ . Nejprve si spočítejme pomocné rozměry (viz obr. 11). Pro délku h_1 platí

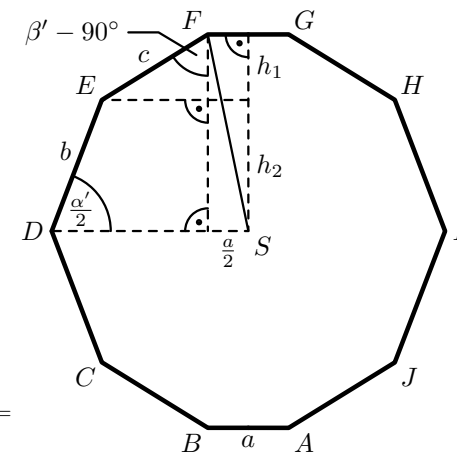
$$\begin{aligned}h_1 &= c \cdot \cos(\beta' - 90^\circ) = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{5+2\sqrt{5}} \cdot \\ &\cdot \cos \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}} \right),\end{aligned}$$

využitím vztahu (1.2) dostáváme

$$\begin{aligned}h_1 &= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{5+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}} = \\ &= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{5+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}-2}{5-\sqrt{5}}} = \\ &= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-2 \cdot 5}{5-\sqrt{5}}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \\ &= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})^2}{5^2-\sqrt{5}^2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{a}{4} (1+\sqrt{5}).\end{aligned}$$

Podobně pro h_2 platí

$$h_2 = b \cdot \sin \frac{\alpha'}{2} = a \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2} (1+\sqrt{5}).$$



Obr. 11

Pozn. red.: V dalším výpočtu se Bc. Standa Basovník dopustil chyby, proto zde uvádím opravený postup.

Pro poloměr koule opsané platí (jak je zřejmé z obr. 4, leží body A, B, F a G ve vrcholech mnohostěnu, body C, E, H a J na hraně mezi pětiúhelníkem a šestiúhelníkem a konečně body D a I na hraně mezi dvěma šestiúhelníky – tedy poloměr kružnice opsané je roven např. vzdálenosti $|SF|$, viz obr. 11)

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \cdot \sqrt{\left[\frac{3}{4}(1 + \sqrt{5})\right]^2 + \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}(1 + 2\sqrt{5} + 5) + 1} = \frac{a}{4} \sqrt{9 + 45 + 4 + 18\sqrt{5}} = \\ &= \frac{a}{4} \cdot \sqrt{58 + 18\sqrt{5}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Protože spojnice střed šestiúhelníku–vrchol šestiúhelníku–střed tělesa tvoří pravoúhlý trojúhelník, navíc vzdálenost střed šestiúhelníku–vrchol šestiúhelníku je rovna a , vzdálenost střed tělesa–vrchol šestiúhelníku je rovna poloměru kružnice opsané ϱ a vzdálenost střed tělesa–střed šestiúhelníku je rovna poloměru kružnice vepsané (šestiúhelníkům) f , platí

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{\varrho^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16}(58 + 18\sqrt{5}) - a^2} = \frac{a}{4} \sqrt{58 + 18\sqrt{5} - 16} = \\ &= \frac{a}{4} \sqrt{42 + 18\sqrt{5}} = \frac{a}{4} \sqrt{27 + 2 \cdot 9\sqrt{5} + 15} = \\ &= \frac{a}{4} \sqrt{(\sqrt{3} \cdot 3)^2 + 2 \cdot (\sqrt{3} \cdot 5) \cdot (\sqrt{3} \cdot 5) + (\sqrt{3} \cdot 5)^2} = \\ &= \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{4}. \end{aligned}$$

Pozn. red.: Dále autor uvedl výpočet objemu tělesa (protože měl chybu ve výpočtu poloměru koule opsané a přeneseně ve výpočtu koule vepsané šestiúhelníkům, které ve výpočtu používá, uvádím opět opravenou verzi).

Mnohostěn mohou rozdělit na několik jehlanů. Povrch mnohostěnu je tvořen 20 šestiúhelníky a 12 pětiúhelníky. Tyto pětiúhelníky a šestiúhelníky použijí jako podstavy jehlanů. Výška jehlanu je vzdálenost středu podstavy od středu mnohostěnu.

Výška na šestiúhelník v_1 je rovna poloměru koule vepsané f

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{4} \cdot a.$$

Výšku na pětiúhelník v_2 spočítáme z Pythagorovy věty (spojnice střed pětiúhelníku–vrchol pětiúhelníku–střed tělesa tvoří pravoúhlý trojúhelník). Označme vzdálenost střed pětiúhelníku–vrchol pětiúhelníku l , vzdálenost vrchol pětiúhelníku–střed tělesa je rovna poloměru koule opsané ϱ , tedy

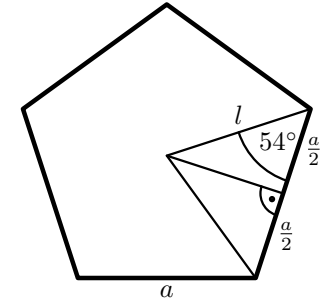
$$v_2 = \sqrt{\varrho^2 - l^2},$$

kde l spočítáme z obr. 12,

$$l = \frac{a}{2 \cdot \cos 54^\circ},$$

použijeme-li vztah (1.1) a dosadíme-li za ϱ z rovnice (1.4), dostaneme

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{\left[\frac{a}{4}\sqrt{58 + 18\sqrt{5}}\right]^2 - \left[\frac{a}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})}}\right]^2} = \\ &= a \cdot \sqrt{\frac{1}{16} \cdot (58 + 18\sqrt{5}) - \frac{1}{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})}} = \\ &= \frac{a}{4} \cdot \sqrt{(58 + 18\sqrt{5}) - \frac{32}{5 - \sqrt{5}}} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{290 + 90\sqrt{5} - 58\sqrt{5} - 90 - 32}{5 - \sqrt{5}}} = \\ &= \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{168 + 32\sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{840 + 160\sqrt{5} + 168\sqrt{5} + 160}{5^2 - (\sqrt{5})^2}} = \\ &= \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{1000 + 328\sqrt{5}}{20}} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{50 + \frac{82\sqrt{5}}{5}} = \frac{a}{20} \cdot \sqrt{1250 + 410\sqrt{5}}. \end{aligned}$$



Obr. 12

Obsah šestiúhelníka S_6 je roven obsahu 6 rovnostranných trojúhelníků o straně délky a

$$S_6 = 6 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \cdot a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$

Podobně obsah pětiúhelníka S_5 je roven obsahu 5 rovnoramenných trojúhelníků o straně a a vrcholovém úhlu 72° (viz obr. 12)

$$\begin{aligned} S_5 &= 5 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{5a^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})} - \frac{1}{4}} = \frac{5a^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{8 - 5 + \sqrt{5}}{4(5 - \sqrt{5})}} = \\ &= \frac{5a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \frac{5a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5}{20}} = \frac{5a^2}{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Objem mnohostěnu V_{32} je tedy součtem objemů všech jehlanů

$$V_{32} = 20 \cdot \frac{1}{3} v_1 \cdot S_6 + 12 \cdot \frac{1}{3} v_2 \cdot S_5.$$

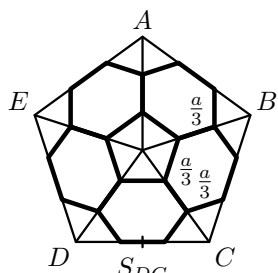
Dosadíme-li za v_1 , v_2 , S_6 a S_5 , dostáváme

$$\begin{aligned} V_{32} &= \frac{1}{3} \left[20 \cdot \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{4} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \right] + \frac{1}{3} \left[12 \cdot \frac{a}{20} \sqrt{1250+410\sqrt{5}} \cdot \frac{a^2}{4\sqrt{25+10\sqrt{5}}} \right] = \\ &= \frac{15(3+\sqrt{5})a^3}{2} + \frac{a^3}{20} \sqrt{31250+10250\sqrt{5}+12500\sqrt{5}+20500} = \\ &= \frac{15(3+\sqrt{5})a^3}{2} + \frac{\sqrt{10} \cdot a^3}{20} \sqrt{5175+2275\sqrt{5}} = \\ &= \left[\frac{15(3+\sqrt{5})}{2} + \frac{\sqrt{10}}{4} \sqrt{207+91\sqrt{5}} \right] \cdot a^3. \end{aligned}$$

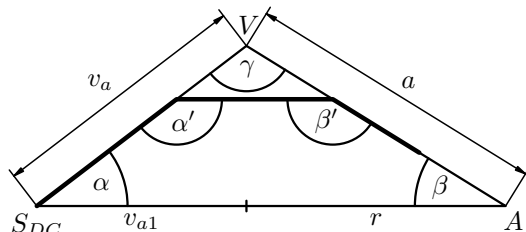
Pozn. red.: Prof. Tibor Vansa zjednodušil svoje výpočty, které nám zaslal minule.

Parametry „fotbalového míče“

Prof. Tibor Vansa



Obr. 13



Obr. 14

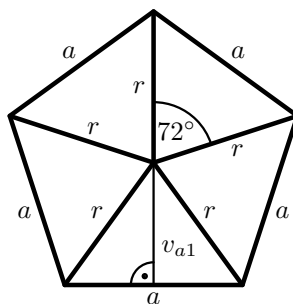
Každý vrchol dvacetistěnu se skládá z 5 rovnostranných trojúhelníků. Okolí vrcholu tedy tvoří pravidelný pětiboký jehlan. Pohled na vrchol shora je na obr. 13, pohled z boku pak na obr. 14.

Úhel α' je úhel mezi pětiúhelníkem a šestiúhelníkem. Úhel β' je úhel mezi pětiúhelníkem a spojnici šestiúhelníků. Úhel γ' je úhel mezi dvěma šestiúhelníky.

Pozn. red.: Tedy pozor, Bc. Standa Basovník a Prof. Tibor Vansa se liší ve značení!

Na obrázku 15 je půdorys pětibokého jehlanu. Platí⁷

$$r = \frac{a}{2 \cdot \sin 36^\circ}, \quad v_{a1} = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ}.$$

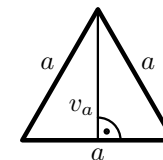


Obr. 15

⁷ Pozn. red.: Délky v_{a1} a r můžeme měřit v půdorysu, neboť leží v rovině základny jehlanu.

Pro výšku v_a rovnostranného trojúhelníka se stranou a (viz obr. 16) pak platí

$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a.$$



Obr. 16

Podle kosinové věty ($x^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\angle YXZ)$) platí v trojúhelníku $S_{DC}AV$ (viz obr. 14)

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - v_a^2 - (r + v_{a1})^2}{-2v_a(r + v_{a1})},$$

odkud dostáváme (s přihlédnutím ke skutečnosti, že platí $\alpha + \alpha' = 180^\circ$)

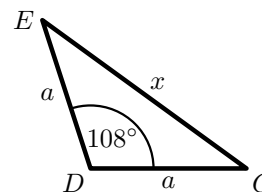
$$\alpha' = 142^\circ 37'.$$

Podobně

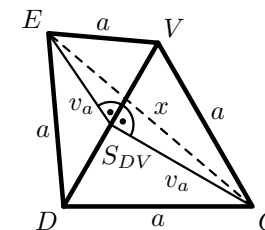
$$\cos \beta = \frac{v_a^2 - a^2 - (r + v_{a1})^2}{-2a(r + v_{a1})},$$

odkud dostáváme (s přihlédnutím ke skutečnosti, že platí $\beta + \beta' = 180^\circ$)

$$\beta' = 148^\circ 17'.$$



Obr. 17



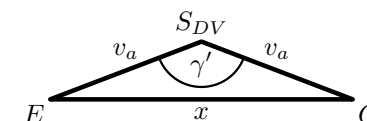
Obr. 18

Nyní spočteme úhel γ' mezi dvěma šestiúhelníky. Vyjdeme z obr. 15 a spočítáme si nejprve vzdálenost $|EC|$, označme ji x (viz obr. 17)

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 108^\circ.$$

Odtud

$$x = \sqrt{2,61} \cdot a.$$



Obr. 19

Úhel mezi dvěma šestiúhelníky je úhlem mezi rovinami DVE a DVC (viz obr. 18) a tento úhel je zároveň úhlem mezi dvěma kolmicemi na spojnici rovin. Stačí nám tedy

spočítat úhel mezi výškami v trojúhelnících DVE a DVC . Trojúhelník CES_{DV} je na obr. 19

$$\cos \gamma' = \frac{x^2 - 2v_a^2}{-2v_a^2},$$

tedy

$$\gamma' = 138^\circ 11'.$$

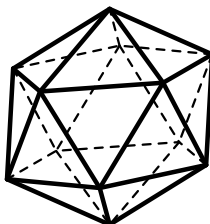
Pozn. red.: Prof. Tibor Vansa odvodil důkaz existence „fotbalového míče“ z existence dvacetistěny.

Důkaz existence „fotbalového míče“

Prof. Tibor Vansa

Tím, že jsme „fotbalový míč“ ořezali z dvacetistěny, jsme problém existence „fotbalového míče“ převedli na problém existence dvacetistěny.

Že mohu sestrojít pravidelný pětiboký jehlan je podle mne zřejmé. Že mohu sestrojít druhý a umístit ho pod něj také. Nyní je vzájemně pootočím o 36° . Zbývá již jen spojit jejich vrcholy hranami délky a . Pohledem na obrázek se můžeme přesvědčit, že u každého vrcholu je pět trojúhelníků.



Pozn. red.: Bc. Stanislav Basovník zvolil „surovější“ způsob důkazu (podrobnosti si nechal pro sebe).

Důkaz existence mnohostěny

Bc. Standa Basovník

Určil jsem pomocí zjištěných úhlů a dalších prvků mnohostěny souřadnice všech vrcholů v prostoru. Zjistil jsem vzdálenosti mezi všemi sousedními vrcholy a vzdálenosti těchto vrcholů od středu mnohostěny. Výpis podrobností by byl velmi dlouhý. Vzdálenosti sousedních vrcholů byly skutečně rovny a a vzdálenosti od středu byly rovny ρ .

Pozn. red.: Článek Bc. Standy Basovníka o mnohostěnech ve čtyřrozměrném prostoru otiskneme z důvodu nedostatku místa v příštím čísle.

Martin Krsek

Téma 2 – Čebyševovy polynomy

Pozn. red.: K našemu velkému potěšení alespoň někteří z vás na problematiku Čebyševových polynomů nezapomněli, naopak dali najevo, že je toto téma velmi zajímavé (jmenovitě Prof. Tibor Vansa, Doc. Vašek Cviček a Prof. Jirka Klímeš).

Prof. Tibor Vansa se snažil odvodit nerekurentní vztahy pro koeficienty $f_{(a,n)}$ Čebyševova polynomu ve vyjádření $f_n(x) = f_{(0,n)}x^n + f_{(1,n)}x^{n-2} + f_{(2,n)}x^{n-4} + \dots$. Bohužel vztah pro $f_{(3,n)}$ se mu již odvodit nepodařilo. Autorovi se nepodařilo potvrdit hypotézu, že $f_{(3,n)}$ je polynom třetího stupně (v n). Znamená to, že udělal v náročném výpočtu chybu? Nebo tato hypotéza neplatí? Jak je to obecně se stupněm polynomu $f_{(k,n)}$?

Stejně neúspěšné bylo hledání nerekurentních vztahů pro koeficienty $f_{(a,n)}$ Čebyševova polynomu ve vyjádření $f_n(x) = f^{(0,n)} + f^{(1,n)}x + f^{(2,n)}x^2 + \dots$.

Prof. Jirka Klímeš se zabýval odvozováním vztahů pro koeficienty ve vyjádření $\cos nx$ pomocí $\cos^k x$. Při vyjadřování vztahů pro $\cos(n \arccos(x/2))$, dospěl k rekurentním vztahům $f^{(i,n)} = f^{(i-1,n-1)} - f^{(i,n-2)}$ potvrzujícím správnost vzorce Doc. Vaška Cvička $f_n(x) = 2 \cos(n \arccos(x/2))$.

Neexistuje normovaný polynom bližší nule

Doc. Václav Cviček

Pokusím se dokázat vzorec $f_n(x) = 2 \cdot \cos(n \cdot \arccos \frac{x}{2})$, $|x| \leq 2$, který byl uvedený v č. 3. Můj důkaz by měl dokázat následující větu:

- $f_n(x)$ je polynom n -tého stupně,
- $f_n(x)$ je normovaný,
- $\|f_n(x)\| = 2$,
- existuje právě jeden Čebyševův polynom n -tého stupně,
- vzdálenost libovolného Čebyševa od 0 je 2 (na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$).

Důkaz:

a. Máme $f_n(x) = 2 \cdot \cos(n \cdot \arccos \frac{x}{2})$.

Použijeme vzorec:

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \cdot \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x + \binom{n}{4} \cdot \sin^4 x \cdot \cos^{n-4} x - \dots$$

$$\sin^2 \left(\arccos \frac{x}{2} \right) = 1 - \cos^2 \left(\arccos \frac{x}{2} \right) = 1 - \frac{x^2}{4} \cos \left(\arccos \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2},$$

tedy

$$f_n(x) = 2 \cdot \left(\left(\frac{x}{2} \right)^n - \binom{n}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{n-2} + \binom{n}{4} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4} \right)^2 \left(\frac{x}{2} \right)^{n-4} - \dots \right).$$

Vidíme, že $f_n(x)$ je polynom n -tého stupně.

b. Vedoucí koeficient polynomu $f_n(x)$ můžeme vyjádřit následovně:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots\right),$$

kde součet končí členem $\binom{n}{n}$ pro n sudé a $\binom{n}{n-1}$ pro n liché.

S využitím $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ pro $k < n$ a $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n-1}{n-1}$ dostaneme tvar


$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-1}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (1+1)^{n-1} = 1.$$

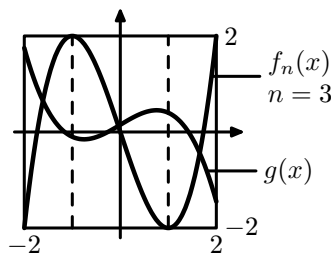
Proto je $f_n(x)$ normovaný.⁸

c. $-2 \leq 2 \cdot \cos\left(n \cdot \arccos \frac{x}{2}\right) \leq 2$. Pro $x = 2$ je $f_n(2) = 2$. Proto $\|f_n(x)\| = 2$.

d. Z předchozího je zřejmé, že existuje normovaný polynom n -tého stupně, který má na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ vzdálenost od 0 rovnou 2.

e. Dokažme nyní, že normovaný polynom stupně n se vzdáleností od 0 menší než 2 neexistuje.

Sporem: předpokládejme existenci takového polynomu a označme jej $g(x)$. (Podle návodu v  č. 3). Čtverec $\langle -2, 2 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle$ rozdělme na n obdélníků svislými čarami tak, že $f_n(x)$ spojuje jeho horní a dolní hranu (viz příklad na obrázku).



Funkce $g_n(x)$ musí graf $f_n(x)$ protnout v každém jednom obdélníku, protože $\|g_n(x)\| < 2$. Proto $f_n(x) - g_n(x)$ má n kořenů. Jenže, protože f_n i g_n jsou normované, je $f_n(x) - g_n(x)$ polynom stupně menšího než n , proto nemůže mít n (reálných) kořenů. To je spor.

Problém by mohl být v tom, že jsme nedokázali, že graf $f_n(x)$ se dotýká čtverce $\langle -2, 2 \rangle \times \langle -2, 2 \rangle$ na hlavní hraně $((n+1) \text{ div } 2)$ -krát⁹ a na dolní hraně $(n \text{ div } 2)$ -krát. Toto není problém ukázat z periodického průběhu funkce \cos (podle vyjádření, které zde dokazujeme).¹⁰

Zbývá dokázat, že existuje právě jeden normovaný polynom n -tého stupně, pro který platí $\|f_n(x)\| = 2$. Tento důkaz ukážu příště.

Pozn. red.: Pokusíte se někdo s Vaškem udržet krok a dokázat nám toto tvrzení?

Hroch

⁸ Pozn. red.: Zde bylo autorovo řešení nepatrně modifikováno, čímž byla odstraněna drobná nepřesnost na konci součtů.

⁹ Pozn. red.: $n \text{ div } 2$ je celočíselné dělení čísla n dvěma.

¹⁰ Pozn. red.: Ve skutečnosti potřebujeme navíc ukázat, že se dotyky na horní a dolní hraně střídají, ale i to vyplývá z vyjádření $f_n(x) = 2 \cos(ny(x))$ pro spojitě monotónní y procházející interval $\langle 0, \pi \rangle$.

Jak vytvořit tabulku pro určení koeficientů Čebyševových polynomů

Prof. Jirka Klimeš

Nejprve jsem zkusil do rekurentního vzorce dosadit $n = 2$ a za $f(x)$ dosadit vzorce Doc. Vaška Cvička:

$$f(x) = 2 \cos\left(n \cdot \arccos \frac{x}{2}\right) \quad (1)$$

Potom mi došlo, že $\cos\left(\arccos \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$. Ale takto nejde zjednodušit výraz $\cos\left(3 \cdot \arccos \frac{x}{2}\right)$. Ten je nutné rozložit, to jsem také udělal a došel jsem k uspokojivému závěru:

$$x \cdot \cos\left(2 \cdot \arccos \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\arccos \frac{x}{2}\right) = \cos\left(3 \cdot \arccos \frac{x}{2}\right) \quad (2)$$

Pozn. red.: Protože autorův důkaz byl nepřehledný, otiskujeme zde jiný.

Důkaz: Označme $\alpha = 3 \arccos \frac{x}{2}$ a $\beta = \arccos \frac{x}{2}$. Podle součtového vzorce

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

dostaneme

$$\cos\left(3 \arccos \frac{x}{2}\right) + \cos\left(\arccos \frac{x}{2}\right) = 2 \cos\left(2 \arccos \frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\arccos \frac{x}{2}\right) = x \cdot \cos\left(2 \arccos \frac{x}{2}\right),$$

což je po prohození na druhou stranu rovnice (2).

Tedy toto funguje. Nyní jsem si trošku pohrával se součtovými vzorci pro kosinus až do $\cos 8x$. Z výsledků jsem si sestavil tabulku:

Řád $\cos x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\cos x$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$\cos 2x$	-1	0	2	0	0	0	0	0	0
$\cos 3x$	0	-3	0	4	0	0	0	0	0
$\cos 4x$	1	0	-8	0	8	0	0	0	0
$\cos 5x$	0	5	0	-20	0	16	0	0	0
$\cos 6x$	-1	0	18	0	-48	0	32	0	0
$\cos 7x$	0	-7	0	56	0	-112	0	64	0
$\cos 8x$	1	0	-32	0	160	0	-256	0	128

Tab. 1: Rozvoj $\cos nx$ do řady obsahující pouze členy $\cos^n x$. První řádek udává řád $\cos x$ pro koeficienty ve sloupci pod ním.

Toto je zjednodušený zápis, který uvádí, že např. $\cos 5x = 5 \cos x - 20 \cos^3 x + 16 \cos^5 x$. Nyní je hlavní otázkou, jak tabulku doplnit, tedy zjistit další řádky. K tomu si musíme uvědomit zajímavé vlastnosti:

- součty řádku jsou vždy 1
- jakousi hlavní diagonálu tvoří mocniny 2, a to podle 2(sloupec-1)
- druhé číslo ve sloupci závisí na prvním čísle takto: druhé = -první · (sloupec + 2) — mohla by záviset podobně i ostatní čísla v sloupci?
- členy v nultém sloupci se cyklicky střídají $-1, 1, -1, 1, \dots$
- členy v prvním sloupci tvoří řadu $1, -3, 5, -7$, jejíž další členy lehce uhodneme: $9, -11, \dots$
- třetí čísla ve sloupci jsou po řadě 5, 9, 14, 20-ti násobkem prvního čísla v sloupci, difference této řady lineárně roste, v pátém sloupci bude tedy člen $16 \cdot 27 = 432$ a v šestém $32 \cdot 35 = 1120$ pomalu se řada pro $\cos 9x$ a $\cos 10x$ zaplňuje:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\cos 9x$	\emptyset	9	\emptyset	?	\emptyset	432	\emptyset	-576	\emptyset	256	\emptyset

Tab. 2: Neúplné pokračování tab. 1.

zbylý člen snadno dopočteme: = -120 (součet všech členů = 1)


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\cos 10x$	-1	\emptyset	?	\emptyset	?	\emptyset	1120	\emptyset	-1280	\emptyset	512

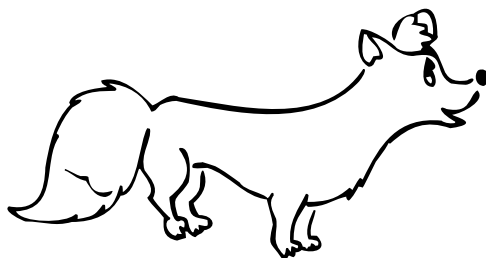
Tab. 3: Neúplné pokračování tab. 1.

- Čtvrté členy sloupců jsou po řadě minus 7, 16, 30-ti násobky prvních členů, difference této řady je 9, 14, což jsou členy řady z f), tedy další členy budou $-7, -16, -30, -50, -77, \dots$ násobky. Konkrétně člen v čtvrtém sloupci bude $-8 \cdot 50 = -400$, člen v druhém sloupci dopočteme na 50.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\cos 10x$	-1	\emptyset	50	\emptyset	-400	\emptyset	1120	\emptyset	-1280	\emptyset	512

Tab. 4: Pokračování tab. 1

Bylo by to s námi špatné, kdybychom si nevšimli, že řada 5, 9, 14, 20, 27, 35, ... se objevuje ve výpisu polynomu (viz  č. 3, vzorec (4)) v řadě pod sebou. Také by nám mohlo dojít, že jsem dělal tabulku pro $\cos nx$, ale ve vzorci (1) je $\cos(n \cdot \arccos \frac{x}{2})$. Když toto vezmeme v úvahu, zjistíme, že po



$\cos^n(\arccos \frac{x}{2})$ zbyde $(\frac{x}{2})^n$ a hodnoty v tabulce musíme vydělit číslem 2^n . Poté je ale ještě ve vzorci (1) před kosinem 2, tedy budeme dělit jenom 2^{n-1} . Vyjde nám tabulka 5:

$P(n)$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
1	\emptyset	1	\emptyset								
2	-2	\emptyset	1	\emptyset							
3	\emptyset	-3	\emptyset	1	\emptyset						
4	2	\emptyset	-4	\emptyset	1	\emptyset					
5	\emptyset	5	\emptyset	-5	\emptyset	1	\emptyset				
6	-2	\emptyset	9	\emptyset	-6	\emptyset	1	\emptyset			
7	\emptyset	-7	\emptyset	14	\emptyset	-7	\emptyset	1	\emptyset		
8	2	\emptyset	-16	\emptyset	20	\emptyset	-8	\emptyset	1	\emptyset	
9	\emptyset	9	\emptyset	-30	\emptyset	27	\emptyset	-9	\emptyset	1	\emptyset
10	-2	\emptyset	25	\emptyset	-50	\emptyset	35	\emptyset	-10	\emptyset	1

Tab. 5: Výsledný tvar normovaného Čebyševova polynomu.

Tímto dostaneme členy Čebyševova polynomu. Co tedy tato tabulka ukazuje (příklad, sledujte v tabulce 1):

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \cos\left(7 \arccos \frac{x}{2}\right) &= -7 \cdot 2 \cdot \cos\left(\arccos \frac{x}{2}\right) + 56 \cdot 2 \cdot \cos^3\left(\arccos \frac{x}{2}\right) - \\
 &\quad - 112 \cdot 2 \cdot \cos^5\left(\arccos \frac{x}{2}\right) + 64 \cdot 2 \cdot \cos^7\left(\arccos \frac{x}{2}\right) = \\
 &= -7x + \frac{56 \cdot 2}{8} x^3 - \frac{112 \cdot 2}{32} x^5 + \frac{64 \cdot 2}{128} x^7 = -7x + 14x^3 - 7x^5 + x^7,
 \end{aligned}$$

tedy vychází to přesně podle řádku rozvoje $\cos 7x$

$\cos 7x$	\emptyset	-7	\emptyset	56	\emptyset	-112	\emptyset	64	\emptyset
-----------	-------------	----	-------------	----	-------------	------	-------------	----	-------------

Tab. 6: Sedmý řádek tabulky tab. 1

a následného dělení $2^{\text{sloupec}-1}$

7	\emptyset	-7	\emptyset	14	\emptyset	-7	\emptyset	1	\emptyset
---	-------------	----	-------------	----	-------------	----	-------------	---	-------------

Tab. 7: Sedmý řádek tabulky tab. 5

Na tabulce 5 je také pěkně vidět, jak se tvoří další (vyšší) polynomy. Chceme např. polynom 5. stupně: vezmeme řádek se čtvrtým polynomem, posuneme jej o sloupec doprava (provádíme operaci $\cdot x$ (sloupce znamenají mocninu x)) a od tohoto odečteme polynom 3. stupně. Z toho vychází jakási obdoba pascalovského trojúhelníku, člověk si to hned při pohledu na výpis polynomu

v č. 3 (rovnice 4) neuvědomí, ale přece jenom nejnázornější systém tvorby je jakési: vem dva sousední členy, sečti je a součet sepiš pod ně. Tedy pravidlo z pascalovského trojúhelníku zde funguje obdobně a vychází přímo z definice: vem libovolný člen tabulky a odečti od něho jeho souseda nahoře vpravo, výsledek sepiš pod souseda o dva řádky níž, příklad:

\emptyset	-16		\emptyset	-7
9	\emptyset	nebo	20	\emptyset
\emptyset	25		\emptyset	27

Tab. 8: Vybraná část tab. 5

Vezmu 9 a odečtu od něho jeho souseda vpravo -16, výsledek $9 - (-16) = 25$ sepišu pod -16. Díky tomuto nemusíme počítat celé polynomy, ale můžeme spočítat jednotlivé sloupce (no, ale abychom je mohli spočítat musíme spočítat sloupce nalevo od nich). Další věc: jednotlivé diagonály tvoří řady, přičemž řady nad nimi tvoří jejich záporné diference. Z toho můžeme spočítat jednotlivé diagonály podle diagonál nad nimi.

Nakonec ze všeho i vyplývá instantní návod na tvorbu rozvojových řad kosinů. Postupujeme jako u řad polynomů, akorát si musíme uvědomit, že člen původní (vlevo) při převodu na řadu polynomů dělíme dvakrát menším číslem, než oba členy napravo. Příklad s minulými čísly:

\emptyset	-32		\emptyset	-112
9	\emptyset	nebo	160	\emptyset
\emptyset	50		\emptyset	432

Tab. 9: Vybraná část tab. 1

Postup jak vytvářet další členy je zřejmý: Vezmeme člen vlevo, vynásobíme ho dvěma a odečteme od něho člen nahoře vpravo, výsledek sepišeme dolu vpravo. Což převedeno do řeči kosinu znamená (při tvorbě celých rozvojů): vezmu známý rozvoj kosinu, vynásobím ho dvěma a ještě k tomu ho vynásobím $\cos x$ (tím ho posunu o sloupec doprava), od tohoto odečtu rozvoj o řádek výš. Příklad pro $\cos 3x$:

$$\begin{aligned}\cos 3x &= 2 \cdot \cos x \cdot \cos 2x - \cos x = 2 \cdot \cos x \cdot 2 \cdot (\cos^2 x - 1) - \cos x \\ &= 4 \cdot \cos^3 x - 2 \cdot \cos x - \cos x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x,\end{aligned}$$

tedy tady vzorec funguje.

Závěrem: Rozvoje kosinu lze převést jednoduchým způsobem na Čebyševovy polynomy, u řad lze rovněž snadno doplňovat další členy systémem ekvivalentním k rekurentnímu vzorci, jelikož to všechno tak krásně hraje, nevidím důvod, proč by měl být vzorec (1) špatně.

Al-ča

Téma 3 – Tepelný stroj

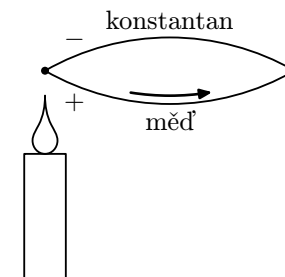
Tepelný stroj

Doc. Václav Cviček

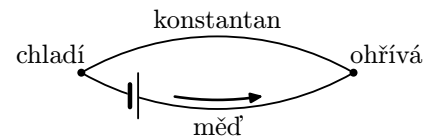
Zabývejme se nejprve termoelektrickým (Seebeckovým) jevem. Představme si termoelektrický článek z konstantanu a mědi (obr. 1).

Podle tabulkových hodnot termoelektrických napětí (měď +0,76 mV, konstantan -3,51 mV) [1] bude v mědi v teplejším místě vyšší potenciál. Směr vzniklého proudu pak vyznačuje šipka na obrázku. Nyní si představme, že svíčku dáme pryč a do obvodu vložíme zdroj stejnosměrného napětí, který způsobí vznik proudu stejného směru (viz obr. 2).

Usuzují, že průchodem proudu se bude spoj obou kovů s vyšším potenciálem ohřívat a spoj s nižším potenciálem ochlazovat.



Obr. 1



Obr. 2

Pozn. red.: Doc. Václav Cviček zde posoudil ohřívání a ochlazování spojů naprosto správně. Jistě by se zde ale osvědčila větší sdílnost, např. podle jakého pravidla lze z obr. 1 určit, který spoj se bude ohřívát a který ochlazovat? Navíc bych tady pro vás měl další věc na zvážení:

V každém elektronickém obvodu se určitě vyskytne hned několik spojů různých kovů (např. u odporů). Pokud tímto obvodem protéká stejnosměrný proud, měl by se jeden konec odporů ochlazovat a druhý zahřívát. Myslíte si, že něco podobného lze reálně pozorovat? A pořád se mi neobjevil žádný příspěvek na téma, proč vlastně vzniká proud v termočláncu! Taková řešení by si jistě zasloužila přiměřeně velký počet bodů. Vyhláшуji tedy soutěž – komu se jako prvnímu podaří správně popsat jak termoelektrický článek funguje, na toho napíši oslavnou báseň.

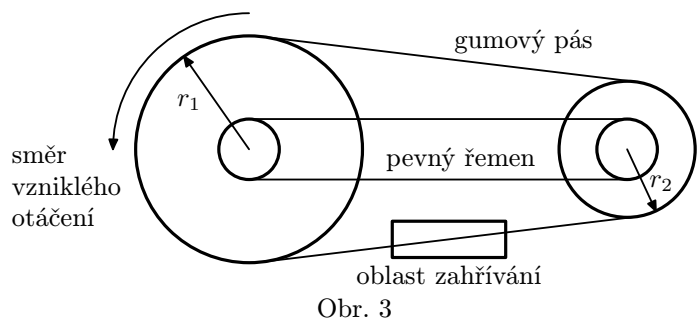
Guma je guma. Kdo maže, ten jede!

Nyní ke gumě použité jako tepelný stroj:

Nejprve mě napadlo jednoduché využití zkoumané vlastnosti gumy – můžeme ji použít jako termoregulační prvek. Jeden konec bychom upevnili a druhý by svým pohybem přes nějaký převodní systém např. otevíral a zavíral závoru podle teploty. Tohle ale asi není to pravé.

Chtělo by to nějaký gumový pás, který by se v jednom místě ohřívál a tím by poháněl celou soustavu. Jediná taková soustava, která mě napadla je na obr. 3.

V oblasti zahřívání má guma díky zahřátí tendenci více se smršťovat. Je tedy napnutá větší silou. Pevný řemen slouží k odvodu točivého momentu. Je



Obr. 3

třeba vhodně volit r_1 a r_2 podle toho, jak moc se zahřívá guma zkrátí, na zbylé části pásu se guma ochlazuje.

Pozn. red.: Nevím, zda bude jen z obrázku a krátkého popisu jasné, jak takový stroj vlastně funguje, tedy ještě dodávám malý komentář. Pro r_1 a r_2 platí, že $r_1 > r_2$. Gumový pás, který se smršťuje působí na obě kola stejně velkou tečnou silou, ale vzhledem k tomu, že $r_1 > r_2$ bude moment síly $F \cdot r$ působící na levé kolo větší. To způsobí, že také síla působící na pevný řemen bude u levého kola větší (poměry vnitřních kol, na kterých je upevněn pevný pás je stejný a na levém působí větší moment síly). Pevný řemen tedy potočí kola a s nimi i gumový pás.



Konečně se dostávám k tepelnému stroji:¹¹

Ke stejnému schématu jako je na obr. 3 se připojí vnější pohon levého kola. Tento pohon bude stlačovat horní část gumového pásu, naopak natahovat jeho spodní část. Gumový pás v tomto případě nebudeme v jeho dolní části zahřívát.

Guma má v horní části nějakou teplotu, tato část pásu přejde do dolní části, kde je více natažená. Měla by tam tedy mít vyšší teplotu, proto se snáze ochladí prostředím. Pak se uvolní, tím se ochladí, a proto může přijmout nějaké teplo od okolí.

Literatura: prof. RNDr. J. Brož a kol., *Fyzikální a matematické tabulky*

[1] prof. RNDr. J. Brož a kol., *Fyzikální a matematické tabulky*

Khayis

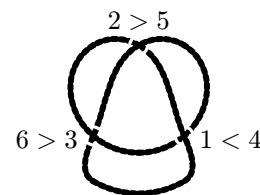
¹¹ Pozn. red.: Zde se dostáváme k otázce, co to vlastně je tepelný stroj. Tepelný stroj je i takové zařízení, které pomocí dodávání nebo odebrání tepla koná práci. Tedy jím je už výše popsané zařízení z obr. 3. Jakou si myslíte, že může mít takový gumový tepelný stroj účinnost? Úplně by stačil jen přibližný odhad podepřený několika myšlenkami.

Téma 4 – Provázky

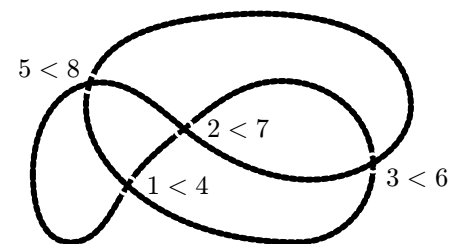
Provázky

Prof. Tibor Vansa

Tak jsem přemýšlel o svém značení a došel jsem ke způsobu, jak z něj zjistit, zdali je provázek rozmotatelný.



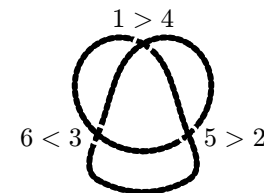
Obr. 1



Obr. 2

Pozn. red.: Vansovo značení je děláno následovně: Zvolí si nějaký počáteční bod na provázku a pevný směr, ve kterém se bude pohybovat. Pak očísluje křížení přirozenými čísly, přičemž každému křížení odpovídají 2 čísla n a m , neboť jsme jím prošli dvakrát. Když jsme v n -tém křížení prošli pod m -tým křížením, napíšeme do obrázku $n < m$, jinak $n > m$. Lehko se ukáže, že posloupnost takových uspořádaných dvojic jednoznačně určuje uzel.

- Jdou-li za sebou dvě a více čísel, která jsou buď vždy menší, nebo větší než druhé číslo mohu je vyškrtat. Například mohu škrtnout řetězce $\{2 < 5, 3 < 9, 4 < 7\}$ nebo $\{4 > 7, 5 > 11, 6 > 9\}$.
- Mohu také vyškrtnout pouhé převrácení provázku (obr. 3), např. $6 < 7$ nebo $10 > 9$.
- Vždy vyškrtávám nejprve uzly z bodu 2), až pak z bodu 1).
- Nezbude-li mi na konci nic, je provázek jednoduchý.
- Zbude-li mi něco, co nemohu seškrtat, např. $1 < 4, 2 > 5, 3 < 6$, pak provázek jednoduchý není.
- Nezáleží na tom, odkud začnu provázek číslovat a kterým směrem, např. jednoduchou smyčku z obr. 1 mohu označit $1 < 4, 2 > 5, 3 < 6$, nebo kdybych 1 označil bod, který je na obr. 1 označený 2, dostal bych $1 < 4, 2 < 5, 3 > 6$.



Obr. 3

Pozn. red.: Tento postup, označme ho Vansův postup, i když v nejjednodušších případech zřejmě funguje, však Prof. Tibor Vansa nedokázal. Pokuste se dokázat, že pokud je provázek rozpletitelný, tak opravdu vyškrtáme Vansovým postupem všechna křížení. Pokuste se také rozhodnout, zda skutečně

platí, že pokud provázek rozpletitelný není, tak jej Vansovým postupem nikdy nevyškrtneme. Svoje tvrzení zdůvodněte.

Peťo

Téma 5 – Římske fontány

Teče voda, teče...

Bc. Jan Verfl

Samozřejmě o žádné perpetuum mobile nejde, je to jen populární trik. Princip je v tom, že voda z horní misky pomalu přetéká do spodní nádoby. Horní hladina je samozřejmě výš, než hladina ve spodní nádobě, a tak zde působí hydrostatický tlak p_1 . Ten stlačuje vzduch v trubičce, který přenáší tlak do horní nádoby. Jelikož ovšem aerostatický tlak vzduchu je oproti hydrostatickému tlaku vody zanedbatelný, „vyděláme“ tímto přenosem pro zvedání vody výšku přibližně odpovídající rozdílu hladin ve spodní a horní nádobě. V horní nádobě na vodu působí tlak p_2 – za ideálních podmínek by bylo $p_2 = p_1$, avšak samozřejmě dochází ke ztrátám, vzduch není ideální plyn, trochu ho unikne, probíhají v něm navíc další jevy spojené se změnou tlaku (uvažte, že např. obsahuje vodní páru), ale tyto jevy jsou vzhledem k dalším ztrátám na výšce v podstatě zanedbatelné. Tlak p_2 tlačí vodu vzhůru, ze zákona zachování energie¹² nám plyne, že ji může vytlačit jen do takové výšky nad hladinu vody v horní misce, jako je rozdíl hladin spodní a horní nádoby. Této výšky ovšem nikdy nedosáhneme – jednak kvůli ztrátám po cestě, ale hlavně kvůli „rozpadu“ vodního sloupce po opuštění trysky fontány (v uzavřené trubičce, případně lépe kapiláře se voda dostane mnohem výše, než když ji necháme volně prýštit). Jednotlivé částice se postupně „rozprcháávají“, ať už díky silám povrchového napětí, tlaku kapaliny nebo turbulentnímu proudění. Trajektorie částic pak získají složku rychlosti ve vodorovném směru a voda padá zpět.

Celý systém ale nefunguje donekonečna! Všimněme si, že voda necirkuluje kolem dokola, řetězec je přerušen vzduchovou trubičkou mezi spodní a horní nádobou, kterou samozřejmě žádná voda nejde. Takže voda z horní nádoby postupně ubývá a přibývá ve spodní – pokud se hladiny srovnají,¹³ nebo případně voda v horní nádobě zcela dojde (závisí od konstrukce), fontána se zastaví.

¹² Pozn. red.: Zákon zachování energie zde lze použít za předpokladu, že objem vody, který vyteče z horní nádoby, je roven objemu vody, který stříká z fontány (tj. nedochází k ztrátám a průsakům).

¹³ Pozn. red.: To v případě, že tryska fontány je na úrovni hladiny rezervoáru vody. Jestliže ale tryska z fontány trčí vzhůru, pak k zastavení dojde, pokud je rozdíl hladin roven výšce trysky nad hladinou rezervoáru, viz následující článek.

Energeticky celý proces vyživuje potenciální energie vody v horní lahvi oproti lahvi spodní.

Speciálních efektů lze vymyslet celou řadu – lze tvarovat trysku pro různé tvary fontánky. Lze nahoru umístit míček, který tam bude hezky poskakovat. Lze použít místo vody nějaké chemikálie, které spolu budou reagovat (například jedna bude v horní lahvi a druhá ve zbytku systému, takže se operativně začnou mísit až při spuštění fontány, které se děje zvednutím horní lahve nad úroveň spodní). Lze zapojit libovolně mnoho mezistupňů a různě s nimi před očima užaslých diváků pohybovat – ti potom nikdy nepochopí, za jakých podmínek fontána stříká a za jakých ne, takže je nenapadne princip. Lze zhasnout a zespu pod trysku svítit. Díky úplnému odrazu zevnitř na rozhraní voda-vzduch bude vystřikovaná voda pěkně svítit.

A jak rychle nám to teče?

Prof. Tibor Vansa

Pozn. red.: Autor nám poslal odhad rychlosti vody stříkající z fontány a odhad maximální výšky, do které fontána stříká.

Při zanedbání viskozity vody a za předpokladu, že průřez trubek je mnohem menší než povrch hladiny v nádobách, můžeme proudění vody v trubkách považovat za ustálené a k řešení můžeme použít Bernoulliho rovnici. Bernoulliho rovnice pro kapalinu v tíhovém poli má tvar:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = \text{konst.} \quad (1)$$

Rychlost pohybu hladin budeme zanedbávat. Pro naši soustavu zavedme následující značení:

tlak ve spodní nádobě – $p_1 = p_a + H_3\rho g$,

tlak v horní nádobě – p_2 ,

atmosférický tlak – p_a .

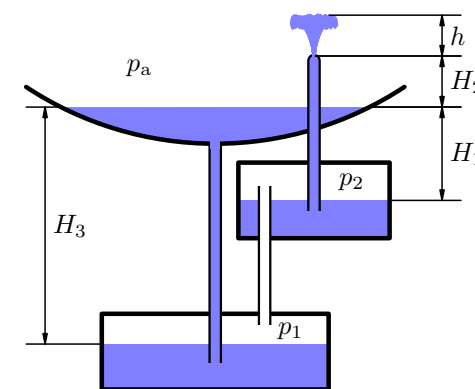
Pro tyto tlaky platí

$$p_2 = p_1 - \Delta p = p_a + (H_1 + H_2)\rho g + \frac{1}{2}\rho v^2, \quad (2)$$

kde v je rychlost vody stříkající z fontánky.

Úbytek tlaku mezi horní a spodní nádobou způsobený tíhovým polem Země (zanedbatelné vzhledem k dalším vlivům) jsme označili Δp .

$$\Delta p = (H_3 - H_1)\rho v g, \quad (3)$$



kde ρ_v je hustota vzduchu.

$$\begin{aligned} p_a + H_3 \rho g &= p_a + (H_1 + H_2) \rho g + \frac{1}{2} \rho v^2, \\ (H_3 - (H_1 + H_2)) \rho g &= \frac{1}{2} \rho v^2, \\ v &= \sqrt{2g(H_3 - (H_1 + H_2))}, \end{aligned} \quad (4)$$

kde v je rychlost vody stříkající z fontánky. Maximální výška, do které stříká fontánka, nechť je označena jako h .

$$\begin{aligned} p_a + \rho gh + 0 &= p_a + 0 + \frac{1}{2} \rho v^2, \\ h &= H_3 - (H_1 + H_2). \end{aligned} \quad (5)$$

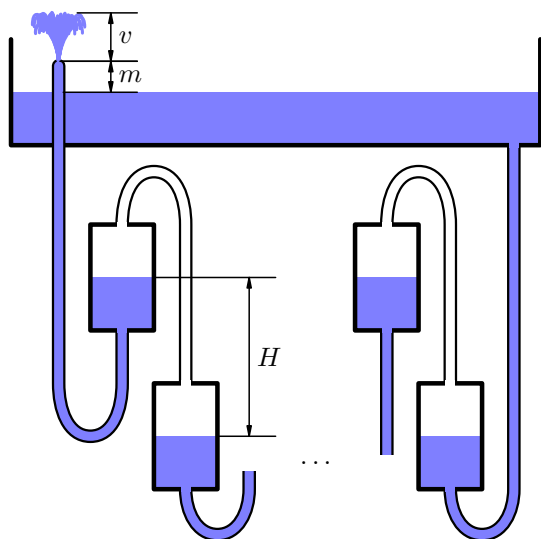
Návrhy na vylepšení

Doc. Václav Cviček

1 Přidáním dalších nádob podle obrázku můžeme zvýšit výšku vodotrysku, aniž by se zvětšila celková výška soustavy. Zde by horní odhad výšky vodotrysku byl až

$$v = \frac{n}{2} H - m, \quad (6)$$

kde n je počet nádob, H je rozdíl hladin v nádobách a m je výška



trysky nad hladinou (v je měřeno od trysky).

2 Do nádob uvnitř schématu bychom mohli dát kapalinu těžší než voda (v extrémním případě rtuť). Výška takového vodotrysku pro ideální kapalinu

$$v = \left(\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\rho}{\rho_{\text{voda}}} + 1 \right) H - m, \quad (7)$$

kde ρ je hustota použité kapaliny.

Pozn. red.: Na závěr ještě uvádím obrázek z fotografické dokumentace pokusu, který nám poslal Mgr. Petr Čermák.

Ondra Plašil



Řešení úloh

Úloha 3.1 – Funkce

(5b)

Zadání: V rovině je nakreslený graf funkce $y = x^2$. Někdo však smazal souřadné osy, takže zůstala jenom parabola. Pomocí pravítka a kružítka

- (1) tyto osy nakreslete a
- (2) vyznačte jednotku délky.

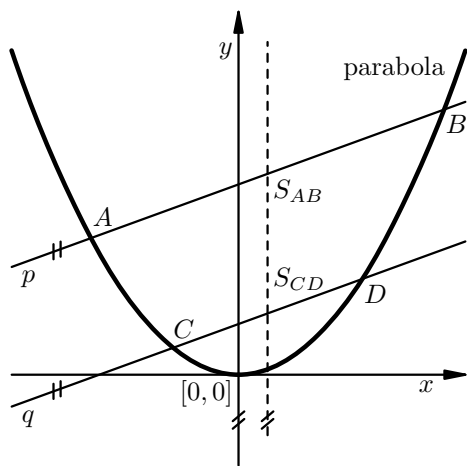
Řešení:

Řešení příkladu budeme prezentovat jako hrubý popis konstrukce, který budeme doplňovat výpočty, abychom se přesvědčili o správnosti uvedeného postupu.

1. Narýsujeme přímku p tak, aby protínala parabolu ve dvou různých bodech.

Průsečíky přímky p s parabolou označme jako body $A = [a, a^2]$ a $B = [b, b^2]$. Směrnice této přímky je tedy $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$.

2. Narýsujeme přímku q tak, aby protínala parabolu ve dvou různých bodech a zároveň aby byla rovnoběžná s přímkou p .



Průsečíky přímky q s parabolou označme jako body $C = [c, c^2]$ a $D = [d, d^2]$. Směrnice přímky q je tedy $\frac{d^2 - c^2}{d - c} = d + c$. Navíc, díky rovnoběžnosti přímek p a q , jsou směrnice obou přímek shodné, tedy platí $a + b = c + d$.

3. Zkonstruujeme středy úseček S_{AB} a S_{CD} (po řadě středy úseček AB a CD).

Z definice středu úsečky platí

$$S_{AB} = \left[\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2} \right]; \quad S_{CD} = \left[\frac{c+d}{2}, \frac{c^2+d^2}{2} \right].$$

Z poznatku $a + b = c + d$ (2) dostaneme, že přímka $S_{AB}S_{CD}$ je rovnoběžná s osou y , protože body S_{AB} a S_{CD} mají stejnou x -ovou souřadnici $\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}$.

4. Zkonstruujeme osu y z poznatku, že přímka $S_{AB}S_{CD}$ je rovnoběžná s osou y .

Stačí zvolit dvě kolmice na přímku $S_{AB}S_{CD}$ tak, aby každá protínala parabolu ve dvou různých bodech. Vzniknou tak dvě úsečky, spojnice jejichž středů je osa y .

5. Zkonstruujeme přímku $y = x$.

Ze znalosti osy y známe i bod $[0, 0]$ a osu x . Není tudíž problém zvolit libovolné r a zkonstruovat hledanou přímku jako spojnicí bodů $[0, 0]$ a $[r, r]$.

6. Zkonstruujeme bod $[1, 1]$.

Jedná se o průsečík přímky $y = x$ a paraboly, který neleží v bodě $[0, 0]$. To nám potvrdí řešení soustavy dvou rovnic $y = x$ a $y = x^2$, čili $x = x^2$, která má dvě jediná řešení 0 a 1.

Hanys & Ziki

Úloha 3.2 – Tři čísla

(5b)

Zadání: Mějme tři čísla a, b a c ležící na intervalu $(0, \pi/2)$, pro která platí vztahy:

$$\begin{aligned} \cos(a) &= a, \\ \cos(\sin(b)) &= b, \\ \sin(\cos(c)) &= c. \end{aligned}$$

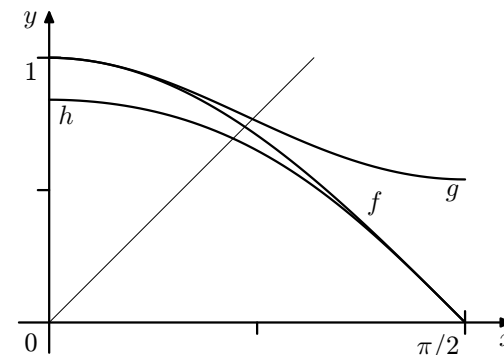
Seřadte tato čísla podle velikosti.

Řešení:

Tyto rovnice jsou analyticky neřešitelné – to znamená, že není možné dostat se nějakými úpravami např. k výrazu $a = \sqrt{5}/3$ (tohle samozřejmě NENÍ správné řešení ;-). Nicméně nám stačí jen hodnoty navzájem porovnat, a to analyticky lze.

Označme si

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x), \\ g(x) &= \cos(\sin(x)), \\ h(x) &= \sin(\cos(x)). \end{aligned}$$



Obr. 1

Najít řešení těchto rovnic znamená najít průsečíky grafů f, g a h s grafem funkce $y(x) = x$. Situace je znázorněna na obr. 1. Je vidět, že pro x z otevřeného

intervalu $(0, \pi/2)$ platí $h(x) < f(x) < g(x)$. Z toho pak jednoznačně plyne $c < a < b$.

Nakreslit si grafy funkcí ale ještě není matematický důkaz (nehledě na to, že bez počítače to není nijak jednoduché). Uvedený vztah mezi funkcemi tedy musíme dokázat.

Dosazením zjistíme, jak zkoumané funkce vypadají v bodech 0 a $\pi/2$ (to jde spočítat i bez kalkulačky):

$$0 < h(0) < f(0) = g(0) = 1 \quad \text{a} \quad 0 = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1. \quad (1)$$

Z toho a ze spojitosti f, g a h mimo jiné plyne i fakt, že čísla a, b a c vůbec existují, neboli že graf $y(x) = x$ na daném intervalu skutečně grafy funkcí f, g a h protíná.

Vyjděme ze zřejmých tvrzení – rovnice $x = \sin(x)$ má právě jedno řešení $x = 0$ a dále funkce sinus a kosinus jsou na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ spojitě a prosté. To je dobré vědět, protože pak platí: když se rovnají funkční hodnoty, musí se rovnat i argumenty funkcí.

Díky tomu víme, že pro $x \in (0, \pi/2)$ platí $x \neq \sin(x)$, a tedy musí platit $\cos(x) \neq \cos(\sin(x))$. Použijeme nerovnici (1)¹⁴ a milým funkcím nezbyvá nic jiného, než splňovat nerovnost $\cos(x) < \cos(\sin(x))$. Tím jsme dokázali

$$f(x) < g(x) \quad \text{pro} \quad x \in (0, \pi/2). \quad (2)$$

Dále postupujeme analogicky. Označíme si $t = \cos(x)$. Pro $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ leží t v intervalu $(0, 1)$. Pro taková t platí $t \neq \sin(t)$, neboli $\cos(x) \neq \sin(\cos(x))$. Opět použijeme nerovnici (1) a dostaneme $\cos(x) > \sin(\cos(x))$, tedy

$$f(x) > h(x) \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0, \pi/2 \rangle. \quad (3)$$

Dohromady nám vztahy (2) a (3) dávají

$$h(x) < f(x) < g(x) \quad \text{pro} \quad x \in (0, \pi/2),$$

čímž jsme důkaz dokončili.

Pro úplnost dodejme, že řešení rovnic tvaru

$$f(x) = x \quad (4)$$

se dá (pokud existuje) jednoduše určit numericky. Podmínkou je, aby pro derivaci f platilo $|f'(x)| \leq 1$, a zároveň, aby existovalo (libovolně malé) prstencové okolí bodu x_R (kde x_R je řešením), ve kterém platí $|f'(x)| < 1$.

Pozn.: prstencové okolí jsou body, které obklopují daný bod, ale on sám do něj nepatří.

¹⁴ Pozn.: K tomu nás opravňuje skutečnost, že jde o spojitě funkce.

Algoritmus vedoucí k řešení pak vypadá následovně. Vezměme libovolné x_0 a opakovaně aplikujme operaci

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (5)$$

Pro rostoucí n se bude x_n blížit k řešení rovnice (4). Ve většině případů získáme dostatečně přesný výsledek už po několika iteracích. Navíc nám stačí obyčejná kalkulačka.

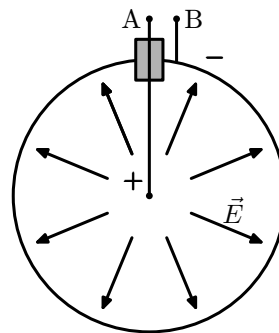
Pokud jste uvedený postup zcela nepochopili, tak přidám ještě malou nápovědu – zadejte počáteční hodnotu x_0 (třeba 7,45), vytrvale ňukajte do tlačítka $\boxed{\text{COS}}$ a po chvíli uvidíte hledané řešení rovnice.

Marble

Úloha 3.3 – Baterie na β -radioaktivitu (5b)

Zadání: Uvnitř kovové koule je umístěn kousíček radioaktivního materiálu, který je od koule izolován. Každou sekundu se rozpadne ν atomů. Předpokládejme, že energie elektronů vznikajících při rozpadu je se stejnou pravděpodobností rozložena mezi hodnotami W_{\min} a W_{\max} . Určete elektromotorické napětí na svorkách baterie (body A, B). Jaký největší proud může dodávat taková baterie? Do jakého odporu zátěže můžeme ještě baterii považovat za generátor proudu?

Řešení:



Elektromotorické napětí (U_e) je definováno jako práce nutná k přenesení jednotkového náboje od záporného pólu ke kladnému, konaná vtištěnými silami neelektrické povahy uvnitř zdroje elektrického napětí. V našem případě je to práce potřebná na přemístění jednotkového náboje z centra, kde je radioaktivní materiál, na povrch koule. Tedy na překonání potenciálového rozdílu mezi těmito místy, který je hledaným elektromotorickým napětím.

Na povrch koule se dostanou pouze elektrony, pro jejichž energii W platí

$$W \geq eU_e. \quad (1)$$

Protože energie elektronů je rozložena rovnoměrně mezi W_{\min} a W_{\max} , dostane se každou sekundu na povrch koule

$$\eta = \frac{W_{\max} - eU_e}{W_{\max} - W_{\min}} \cdot \nu \quad (2)$$

elektronů (v případě, že $W_{\max} \geq eU_e \geq W_{\min}$). Každý elektron nese náboj e , takže výsledný proud uvnitř koule

$$I_k = \eta e = \frac{W_{\max} - eU_e}{W_{\max} - W_{\min}} \cdot \nu e. \quad (3)$$

Napětí na svorkách je stejné jako výše určené elektromotorické napětí, takže když k baterii zapojíme odpor o velikosti R , bude obvodem protékat proud

$$I = U_e/R. \quad (4)$$

V rovnovážném stavu (tj. když je U_e konstantní) musí platit

$$I = I_k. \quad (5)$$

Z rovnic (3), (4) a (5) plyne vztah pro elektromotorické napětí

$$\frac{U_e}{R} = \frac{W_{max} - eU_e}{W_{max} - W_{min}} \cdot \nu e, \quad (6)$$

$$U_e = \frac{\nu e R W_{max}}{W_{max} - W_{min} + R e^2 \nu}. \quad (7)$$

Tyto vztahy ale platí pouze za předpokladu, že jsou ještě nějaké elektrony „v zásobě“, tedy $U_e \geq W_{min}/e$, a tím pádem z rovnice (6) dostáváme $R \geq W_{min}/(\nu e^2)$. V opačném případě bude proud konstantní (νe) a napětí se bude měnit podle Ohmova zákona (4):

$$I = \nu e, \quad U_e = R \nu e.$$

V případě nezatíženého zdroje ($R \rightarrow \infty$) nebude protékat žádný proud, a tedy když spočítáme limitu vztahu (7), získáme hodnotu

$$U_{max} = W_{max}/e,$$

ke které se bude napětí v čase neomezeně blížit.

Vidíme, že největší proud baterie dodává při zátěži $R = W_{min}/(\nu e^2)$, a pokud budeme odpor snižovat, bude jen klesat U_e zdroje, což už příliš neodpovídá tomu, jak si představujeme chování baterie.

Hanss & Marble

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: (02) 2191 1235

E-mail: MaM@mam.mff.cuni.cz; MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz/>

Časopis M&M je vydáván za podpory Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.

Výsledková listina

Pořadí	Jméno	\sum_{-1}	Úlohy								\sum_0	\sum_1	
			t1	t2	t3	t4	t5	r1	r2	r3			+
1.	Prof. Tibor Vansa	217	12	5	2	12	4	1	3	1	40	77	
2.	Doc. Vašek Cviček	155		10	12		6	2	4	3	37	49	
3.	Doc. Martin Demín	138					6	1	1	4	12	47	
4.	Prof. Jirka Klimeš	292		13		5		1	3	2	24	43	
5.	Mgr. Andrej Pidík	31					4	1	2	1	8	31	
6.	Mgr. Petr Čermák	30					11	5	2	2	20	30	
7.	Mgr. Jan Špiřík	23					3	4		1	8	23	
8.	Bc. Josef Stráský	19								0	0	19	
9.	Bc. Stanislav Basovník	17	12					2	3		17	17	
10.-11.	Doc. Miroslav Frost	150						5	5		10	16	
	Bc. Helena Kubátová	16					5				5	16	
12.-13.	Bc. Zuzana Rozlívková	15									0	15	
	Bc. Lukáš Chvátal	15							4		4	15	
14.-15.	Bc. Jan Verfl	14					7		5	2	14	14	
	Dr. Peter Bališ	57					2	0	2		4	14	
16.	Bc. Lukáš Pavlovský	10					3				5	8	10
17.-19.	Vojtěch Skubanič	9									0	9	
	Mgr. Jozef Tinaj	48									0	9	
	Mgr. Dana Beránková	47	1								1	9	
20.-21.	Vítězslav Kala	7									0	7	
	Dr. Honza Klusoň	92							1	1	2	7	
22.-23.	Jiřina Pešová	5									0	5	
	Mgr. Jana Babováková	26									5	5	
24.-26.	Mgr. Lucie Vasická	42									0	4	
	Michal Rychnovský	4									0	4	
	Mgr. Zuzana Svobodová	28						0	1		1	4	
27.-29.	Mgr. Iva Kouřilová	28									0	3	
	Mgr. Lenka Beranová	49									0	3	
	Tomáš Štec	3						1	2		3	3	
30.-34.	Mgr. Martin Včelák	29									0	2	
	Jana Šatopletová	2									0	2	
	Mgr. Zdeněk Nováček	33									0	2	
	Bc. Honza Chmelař	13									0	2	
	Alena Drábková	2									0	2	
35.	Mgr. Gabriela Boháčová	39									0	1	

Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$). Sloupeček + značí extra body.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.