

# M&M Číslo 2 ročník V

Ahojte řešitelé,

docela se nám zpozdilo vydání druhé série. Velice se omlouváme za zpoždění, dodali bychom snad jen to, že jsme nejprve měli spoustu práce a posléze (uprostřed prosince) velké problémy s xeroxem.

Dále bychom chtěli omluvit jednu neomluvitelnou věc – proč nepřišly včas podrobnější informace k soustředění, např. popis cesty. Tyto byly **včas** vytištěny a podány na podatelnu (18. prosince). Podatelna je bez výhrad přijala, ale posléze je odmítla poslat, protože adresy byly napsány červeně. Nikdo se to doteď nedozvěděl a tak nebyly pozvánky vůbec poslány. Máme je u sebe a přikládáme je, ať aspoň víte, jak vypadaly.

za redakci Robert

## Téma 1 – Konstrukce kružítkem

Dr. Zdeněk Dvořák: Co se dá zkonstruovat

V následujícím článku hodlám dokázat, že v určitém smyslu všechno, co použitím pravítka a kružítka.

Pojmy:

- (a) **bod**,
- (b) **přímka** – je dána 2 jejími navzájem různými body, **úsečka** – je dána svými navzájem různými krajními body, může být orientovaná, pak je jeden z nich začáteční a druhý koncový, **délka úsečky** – běžná Euklidovská,
- (c) **kružnice** – je dána svým středem a velikostí poloměru, což je jiná úsečka (speciálním případem je bod ležící na kružnici, pak je tato úsečka dána jím a středem). Kružnice dělí rovinu na část vnější, vnitřní a tuto kružnici.
- (d) **úhel** – je dán dvojicí přímkou a bodem, uvnitř něj ležícím, **velikost úhlu** – obvyklá.

Základní konstrukce proveditelné pouze s použitím kružítka:

- (1) volba libovolného bodu v rovině,
- (2) volba libovolného bodu na kružnici
- (3) zjištění, zda je bod vevnitř, vně či na kružnici
- (4) nalezení průsečíků 2 kružnic, resp. zjištění, že neexistují.

Základní konstrukce proveditelné, je-li navíc k dispozici pravítko:

- (5) volba libovolného bodu na přímce,
- (6) zjištění, zda bod leží na přímce,
- (7) nalezení průsečíku 2 přímek, resp. zjištění, že neexistuje,
- (8) nalezení průsečíků přímky a kružnice, resp. zjištění, že neexistují.

Jestliže prohlásíme konstrukci přímky, resp. úsečky za provedenou, nalezneme-li 2 body, jimiž je podle (b) určena, lze každou konstrukci proveditelnou pravítkem a kružítkem vykonat pouze s použitím kružítká. Abych to dokázal, musím převést konstrukce 5–8 na konečnou posloupnost konstrukcí 1–4.

### Schéma postupu konstrukce

#### A. pomocné konstrukce

- (i) rotace bodu kolem zadaného středu o násobek 60
- (ia) zobrazení bodu v středové souměrnosti
- (ii) zobrazení bodu v osové souměrnosti
- (iii) posunutí bodu dané orientovanou úsečkou
- (iv) nalezení středu dané úsečky
- (v) konstrukce úsečky o délce dané jedním speciálním výrazem
- (vi) porovnání délek 2 úseček

#### B. konstrukce (6)

konstrukce (8) (a) pro kružnici, jejíž střed neleží na dané přímce

#### A.

- (vii) konstrukce úsečky o délce dané jedním dalším speciálním výrazem
- (viii) konstrukce čtverce nad zadanou úsečkou

#### B. konstrukce (8) (b) pro kružnici, jejíž střed leží na dané přímce

- konstrukce (5)
- konstrukce (7)

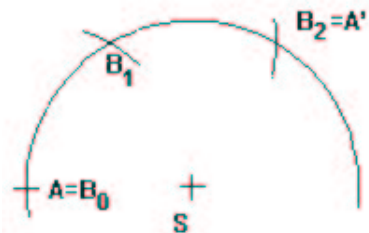
**Značení v postupech.** Používáme značení písmeny latinské abecedy, příp. s použitím indexů.  $k$  označuje kružnici, následuje střed a poloměr.  $p$  označuje přímku, následují 2 na ní ležící body. Body jsou značeny velkými písmeny, následuje popis konstrukce, kterou je dán. Existuje-li více bodů, splňujících vlastnost, kterou jsou určeny, a není-li blíže specifikován některý z nich, buď lze zvolit libovolný, nebo je zřejmé, který z nich to je. Většina postupů je triviálních, proto nejsou blíže vysvětlovány.

### Jednotlivé konstrukční postupy

#### A. (i) Rotace bodu kolem zadaného středu o násobek $60^\circ$ .

Budiž dán střed  $S$  a bod  $A$ , pak rotaci o  $n \cdot 60^\circ$  provedeme takto:

1.  $k_1 : S, |SA|$
2.  $B_0 = A$ ,  
body 3 a 4 jsou  $n \times$  zopakovány pro  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
3.  $k_{i+1} : B_{i-1}, |SA|$
4.  $B_i =$  průsečík  $k_{i+1}$  a  $k_1$
5.  $A' = B_n$

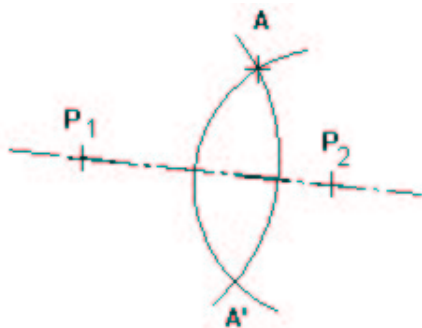


**A. (ia)** Zobrazení bodu v středové souměrnosti je rotací o 180.

**A. (ii)** Zobrazení bodu v osové souměrnosti.

Přímka buďž dána body  $P_1, P_2$  a je dán bod  $A$ :

1.  $k_1 : P_1, |AP_1|$
2.  $k_2 : P_2, |AP_2|$
3.  $A' = \text{průsečík } k_1 \text{ a } k_2$

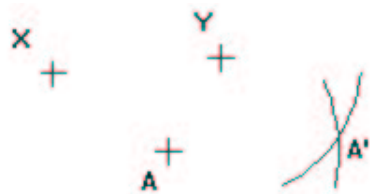


**Pozn.** Pro body, ležící blízko dané přímky, může být problémem prakticky dostatečně přesně nalézt průsečík příslušných kružnic, pro  $A$  na přímce se jedná dokonce o 2 dotýkající se kružnice, kdy  $A' = A$ . Teoreticky to není problém, prakticky by to chtělo najít nějakou jinou konstrukci. Obdobná poznámka platí i na některých dalších místech.

**A. (iii)** Posunutí bodu dané orientovanou úsečkou.

Mějme úsečku  $XY$  a bod  $A$ :

1.  $k_1 : Y, |XA|$
2.  $k_2 : A, |XY|$
3.  $A' = \text{průsečík } k_1 \text{ a } k_2$



**A. (iv)** Nalezení středu dané úsečky.

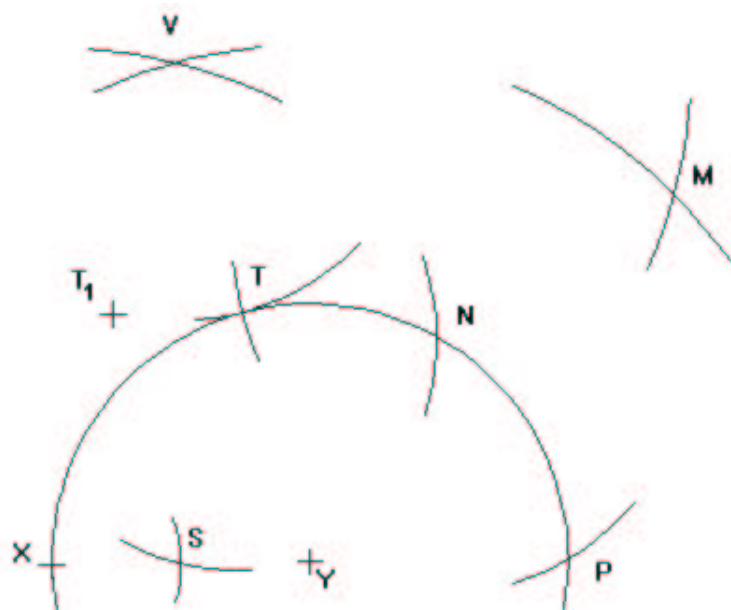
Využívá toho, že střední příčka trojúhelníka má délku  $1/2$  základny trojúhelníka a je s ní rovnoběžná.

Úsečka  $XY$ :

1.  $P$  je obrazem  $X$  ve středové souměrnosti podle  $Y$
2.  $k_1 : X, |XP|$
3.  $k_2 : Y, |XP|$
4.  $V, V_1 : \text{průsečíky } k_1 \text{ a } k_2$

**Pozn.** Nyní sestrojíme středy  $XP$  a  $YP$ , což by bylo možné jako průsečíky kružnic o poloměru  $|XY|$  o středech  $X$  a  $P$ , ale to by bylo prakticky dosti nepřesné, jelikož kružnice se pouze dotýkají, proto jsem zvolil následující postup.

5.  $k_3 : V, |XY|$
6.  $k_4 : V, |XP|$
7.  $M : \text{průsečík } k_2 \text{ a } k_4$
8.  $N : \text{rotací } X \text{ podle } Y \text{ o } 120^\circ \text{ (tedy, vlastně nám zbyl už z konstrukce } P)$
9.  $k_5 : M, |XN|$
10.  $T : \text{průsečík } k_5 \text{ a } k_3$
11.  $T_1$  obrazem  $T$  v os.soum. podle  $V$  a  $V_1$
12.  $S$  je posunutím bodu  $T$  podle  $T_1$  a  $X$

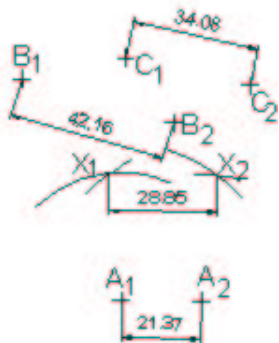


**A. (v)** Konstrukce úsečky o délce dané jedním speciálním výrazem.

Mějme dány 3 úsečky  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  o délkách  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , přičemž splňují trojúhelníkovou nerovnost a  $B > C$ . Pak po provedení konstrukce

1.  $k_1$  :  $A_1, B$
2.  $k_2$  :  $A_1, C$
3.  $k_3$  :  $A_2, B$
4.  $k_4$  :  $A_2, C$
5.  $X_1$  : průsečík  $k_1$  a  $k_4$
6.  $X_2$  : průsečík  $k_2$  a  $k_3$  ležící ve stejné polorovině podle  $A_1A_2$  jako  $X_1$ ,

je  $X_1X_2$  rovnoběžné s  $A_1A_2$  a má velikost  $X = (B \cdot B - C \cdot C)/A$ . První tvrzení je zřejmé, druhé plyne z Ptolemaiovy věty.



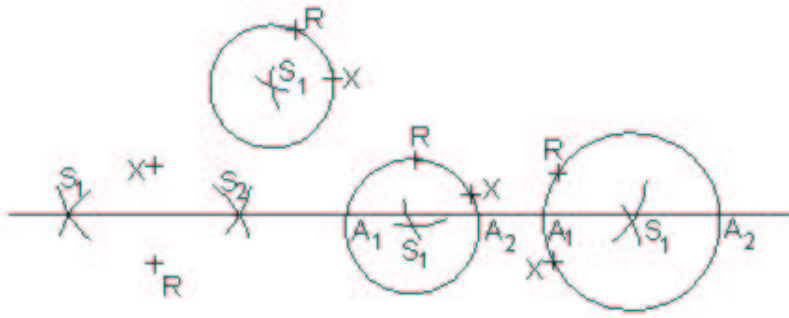
**Pozn. k bodu 6.** Je zde třeba zvolit bod ve stejné polorovině a nabízí se otázka, jak poznat, který z nich to je. Na to lze použít následující konstrukci, využívající (později předvedené) konstrukce 8. (a) (průsečíků přímky a kružnice, jestliže přímka neprochází jejím středem) a konstrukci (6) – samozřejmě ani u jedné z nich nepoužiji pomocné konstrukce A. (v):

Přímka  $p$  je dána body  $P_1, P_2$  a jsou dány body  $R$  a  $X$ :

1.  $k_1$  :  $R, |RX|$
2.  $k_2$  :  $X, |RX|$
3.  $S_1, S_2$  : průsečíky  $k_1, k_2$   
Leží-li oba na přímce,  $R$  a  $X$  neleží ve stejné polorovině, jinak si z nich zvolíme jeden, který na ní neleží, a označíme si ho  $S$
4.  $k_3$  :  $S, |SX|$
5.  $A_1, A_2$  : průsečíky  $k_3$  s  $p$

Neexistují-li tyto průsečíky nebo je jen 1 průsečík, pak  $R$  a  $X$  leží ve stejné polorovině. Jsou-li průsečíky 2, mohou tyto a zadané body ležet na  $k_3$  v těchto pořadích (počínající od  $X$ ):  $X, A_1, R$ ,

$A_2$  nebo  $X$ ,  $A_2$ ,  $R$ ,  $A_1$  – pak leží v různých polorovinách;  $X$ ,  $R$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  nebo  $X$ ,  $R$ ,  $A_2$ ,  $A_1$  – pak leží v stejných polorovinách.



**A. (vi)** Porovnání délek 2 úseček.

Budiž dány úsečky  $A_1A_2$  a  $B_1B_2$ , pak

1.  $k : A_1, |B_1B_2|$

Je-li

- $A_2$  uvnitř v  $k$ , je  $|A_1A_2| < |B_1B_2|$
- $A_2$  na  $k$ , je  $|A_1A_2| = |B_1B_2|$
- $A_2$  vně  $k$ , je  $|A_1A_2| > |B_1B_2|$

**B. konstrukce (6)** Zjištění, zda bod leží na přímce.

Mějme přímku  $p$  a bod  $A$ , pak postup je tento:

1.  $A'$  je obrazem  $A$  v osové souměrnosti podle  $p$  tehdy a jen tehdy, je-li  $A' = A$ , tj.  $A$  leží na přímce  $p$

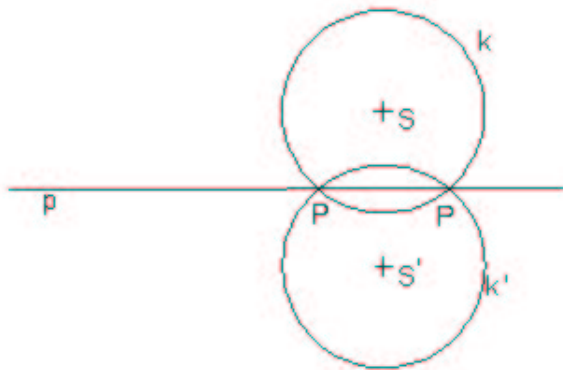
**B. konstrukce (8)** Nalezení průsečíků přímky a kružnice, resp. zjištění, že neexistují.

Za pomoci konstrukce (6) si toto rozdělíme na 2 případy:

(a) Mějme přímku  $p$  a kružnici  $k$  o středu  $S$ , který neleží na  $p$ , a poloměru  $r$ , pak

1.  $S'$  je obrazem  $S$  v osové souměrnosti podle  $p$
2.  $k' : S', r$
3.  $P_1, P_2$  průsečíky  $k$  a  $k'$

$P_1$  a  $P_2$  je/jsou právě hledané průsečíky  $p$  a  $k$ , resp. neprotínají-li se  $k$  a  $p$ , neprotínají se ani  $k$  a  $k'$ .



**A. (vii)** Konstrukce úsečky o délce dané jedním dalším speciálním výrazem.

Mějme zadány 2 rovnoběžné nestejně dlouhé úsečky  $A_1A_2$  a  $B_1B_2$ , pak

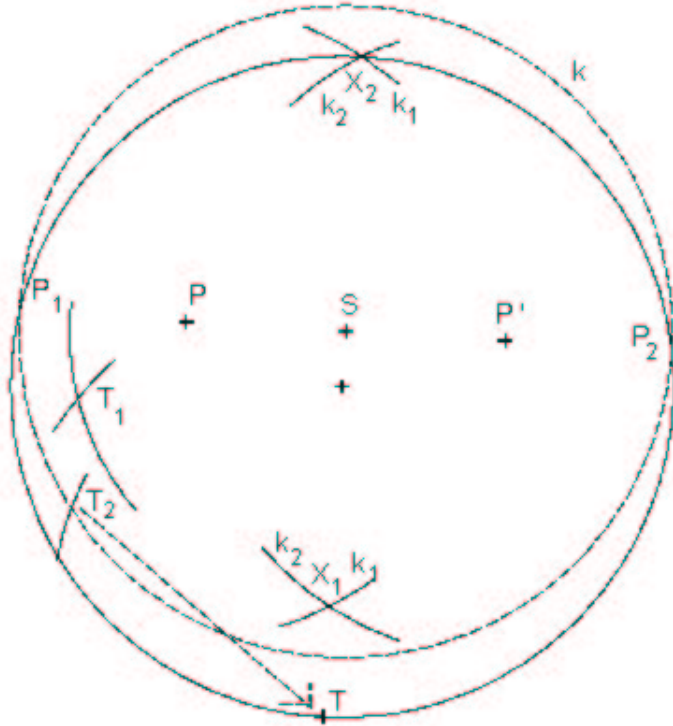
1.  $B$  je posunutím  $B_2$  podle  $B_2A_2$
2.  $S$  je střed  $A_1B$
3.  $k : S, |SB|$
4.  $B'$  je obraz  $B$  ve středové soum. podle  $A_2$
5.  $k_1 : B, |BB'|$
6.  $k_2 : B', |BB'|$
7.  $V$  je průsečík  $k_1$  a  $k_2$
8.  $P$  je průsečík  $k$  a přímky  $A_2V$

Pak  $A_2P$  je kolmá na  $A_1A_2$  a má (podle Euklidovy věty) délku geometrického průměru  $|A_1A_2|$  a  $|B_1B_2|$ .





- za  $X_1$  střed původní úsečky  $SX_1$
  - za  $X_2$  střed původní úsečky  $SX_2$
- a opakujeme znovu bod (5)
6. je-li  $|X_1X_2| \leq r$ , položíme
- za  $X_1$  obraz  $S$  ve středové soum. podle původního  $X_1$
  - za  $X_2$  obraz  $S$  ve středové soum. podle původního  $X_2$
- a opakujeme znovu bod (6)
7. je-li  $|SX_1| = r$ , jsou hledané průsečíky vrcholy čtverců sestavených nad  $SX_1$
8. jinak:
- podle A. (v), kde položíme  $A_1A_2$  na úsečku  $SX_1$ ,  $B = r$ ,  $C = |SX_1| = x$ , kteréžto vzhledem k bodům (5), (6), (7) splňují požadované vlastnosti, dostaneme úsečku  $T_1T_2$  rovnoběžnou s  $SX_1$  o velikosti  $r.r/x - x$
9.  $T$  je posunutím  $T_2$  podle  $T_1X_1$
10. podle A. (vii) aplikováno na  $X_2S$  a  $ST$  jsou získány body  $P_1$  a  $P_2$  ležící na  $SP$  a vzdálené od  $S$  o  $r$ , tj. hledané průsečíky



**B. konstrukce (5)** Volba libovolného bodu na přímce.

Je-li dána přímka  $AB$ , zvolíme si libovolný od  $A$  a  $B$  různý bod  $X$  v rovině a

1.  $k : B, |BX|$
2.  $Y$  je průsečík  $k$  a  $AB$ ,

čímž získáme nějaký (libovolný) bod přímky  $AB$ .

**B. konstrukce (7)** Nalezení průsečíku 2 přímk, resp. zjištění, že neexistuje.

Dány jsou přímky  $AB$  a  $CD$  (pozor, v bodě (1) způsobím menší zmatek ve značení za účelem jednoduššího popisu jednoho cyklu).

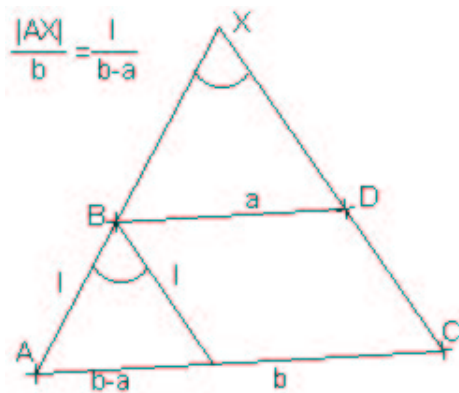
1.  $C$  buď obrazem  $A$  podle  $CD$  před vstupem do tohoto bodu.  
 $D$  buď obrazem  $B$  podle  $CD$  před vstupem do tohoto bodu.

Nyní

- pro 1. vstup: je-li  $X$  průsečík  $AB$  a  $CD$ , je i průsečíkem  $AB$  a nového  $CD$  a navíc je  $|AX| = |CX|$ ,  $|BX| = |DX|$ ,  $|AB| = |CD|$ .
  - pro další vstupy: úhel  $AXC$  je dvojnásobný, nejpozději po  $\lceil \log_2(120^\circ / \text{vstupní úhel}) \rceil$  opakováních bude vyhovovat dále udané podmínce.
2. Jak je vidět z obr. 10, je  $|AX| = b.l/(b-a)$ , kde  $b = |AC|$ ,  $a = |BD|$ ,  $l = |AB|$ . Nalezneme nyní úsečky o délkách
    - $AA = b - a$  (provede se zřejmým postupem podle konstrukce 8. (b) – průsečík kružnice o poloměru  $a$  se středem v  $C$  a přímky  $AC$  takový, že délka úsečky od něj k  $A$  je menší než vzdálenost 2. průsečíku od  $A$ ),
    - $BB = (b + l)/2$  (obdobně se vzdálenějším průsečíkem a nalezením středu úsečky),
    - $CC = (b - l)/2$  (obdobně, je nutné, aby bylo  $l < b$ , čehož dosáhneme například opakovaným půlením  $AB$  a  $CD$  podobně jako u konstrukce 8. (b) (pro triviálnost tohoto postupu ho nezahrnuji do popisu této konstrukce)).

Je zjevně  $BB > CC$ ,  $BB + CC > AA$ , aby byla splněna trojúhelníková nerovnost, musí být ještě  $AA + BB > CC$  a  $AA + CC > BB$ , dosazením z první dostaneme  $b - a > -l$ , což je zřejmé, z druhé  $b - a > l$ , což, jak vidíme z obr. 10, platí, je-li velikost úhlu  $AXC > 60^\circ$ , je-li tedy  $b - a \leq l$ , vrátíme se k bodu (1).

3. zkonstruujeme podle A. (v) úsečku  $(BB.BB - CC.CC)/AA = (BB + CC).(BB - CC)/AA = x = |AX|$
4.  $k_1 : A, x$
5.  $k_2 : C, x$
6.  $X$  je průsečík  $k_1$  a  $k_2$  ve stejné polorovině podle  $AC$ , jako  $B$



Čímž je prokázáno na začátku uvedené tvrzení. Nyní samozřejmě mohu provést všechny v zadání uvedené konstrukce.

## Téma 2 – Lupa

Dr. Zdeněk Dvořák:

Obraz velmi vzdáleného předmětu (Slunce) se promítne prakticky do ohniska čočky. Poloměr Slunce označím  $R$ , vzdálenost Země-Slunce  $l$ , ohniskovou vzdálenost čočky  $f$ , pak poloměr obrazu bude  $r = Rf/(l - f)$ . Budou-li sluneční paprsky dopadat pod úhlem a obraz budeme zachycovat na vodorovné podložce, obrazem bude elipsa, jejíž vedlejší poloosa bude  $r$  a hlavní  $r/\sin \alpha$ .

Obsah tohoto obrazu  $S = \pi ab = \pi \left(\frac{Rr}{l}\right)^2 \sin \alpha$ . Pro čočku s  $f = 0.1 \text{ m}$  a  $l = 1 \text{ AU}$  vychází  $r = 0.47 \text{ mm}$ . Výkon slunečního záření, které dopadne na čočku, bude  $P_0 = P_{SI} S_c (1 - \eta)/(4\pi l^2)$ .  $P_{SI} = 3.73 \cdot 10^{26} \text{ W}$  je výkon Slunce.  $S_c$  je plocha čočky,  $\eta$  jsou ztráty, zejména v atmosféře.

Ty se dají rozdělit na 2 základní složky – odraz a pohlcení atmosférou, tedy  $\eta = \eta_0 + \eta_p = \eta_0 + \delta d$ , kde  $d$  je vzdálenost, kterou musí paprsek urazit v atmosféře, a  $\delta$  je konstanta charakterizující propustnost atmosféry – ta se samozřejmě mění s výškou, teplotou, . . . , tedy je nutno brát určitou průměrnou hodnotu. V případě, že by bylo např. zataženo, by bylo zřejmě nutné část dráhy při průchodu mraky počítat zvlášť (ovšem je mi slím zřejmé, že za takového počasí nemá cenu se o zapálení papíru lupou pokoušet, už proto, že vzhledem k rozptylu slunečních paprsků v mracích nebude co čočkou zaostřovat).

**Pozn.** Redakce není stejného názoru. Můžete se pokusit spočítat, jak bude lupa zaostřovat.

Pro dráhu  $d$  platí  $d = h/\sin \alpha$ , kde  $h$  je přibližně výška atmosféry. Pro další odhady beru  $h = 100 \text{ km}$ .  $\eta_0$  považuji za konstantní a na základě údajů z časopisu *Energie pro zítřek* 3. díl, připraveno oddělením *Public Relations ČEZ a.s.* ji odhaduji na 30%. Na základě informací z téhož časopisu si dovoluji  $\delta$  odhadnout na 0.1%/km s tím, že tato hodnota bude silně závislá zejména na počasí.

**Pozn. redakce.** Tohle platí jenom když je  $\delta d$  mnohokrát menší než  $\eta_0$ .

Útlum záření pohlcením na trase Slunce–Země si dovoluji zcela zanedbat. Pro  $S_c = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  (poloměr čočky 4 cm) vychází u nás (50° s.š.) za letního slunovratu v poledne ( $\alpha = 63^\circ$ )  $P_d = 4.1 \text{ W}$ , za zimního slunovratu v poledne ( $\alpha = 17^\circ$ )  $P_d = 2.5 \text{ W}$ . Energie dodaná papíru bude  $E_p = E_d \sigma_{op}$ , kde  $\sigma_{op}$  je účinnost pohlcení záření papírem a v závislosti na jeho barvě, struktuře povrchu a dalších činitelích se bude pohybovat někde mezi 20 a 80%, nechtě je to 30%. Výkon, který bude zahřátý papír odevzdávat okolí, bude

$$P_{pap} = S\lambda \cdot \Delta T,$$

kde  $\Delta T$  je rozdíl teplot papíru a okolí,  $\lambda$  je konstanta charakterizující rychlost přenosu energie. I tato se může pohybovat v dosti širokém rozmezí v závislosti na druhu papíru, podložce, pohybu okolního vzduchu, . . . Čistě jako svůj odhad ji budu pokládat za rovnou  $3000 \text{ kg} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$ . Tento odhad je podložen jednak z pokusu s vodou (měřit teplotu papíru se mi nepodařilo), kde vychází řádově stovky a úvaha říká, že papír by se měl ochlazovat o něco rychleji, jednak na tom, že pak vychází čísla v následujícím odstavci. Vzhledem k tomu, že  $P_{pap}$  s vzrůstající teplotou roste, zatímco  $P_0$  je konstantní, teplota se po určité době ustálí na určité hodnotě, kdy se bude stejně tepla přijímat, jako uvolňovat, tj.  $P_0 = P_{pap}$ . Vzájemným dosazením všech rovnic dostáváme:

$$T = T_0 + \frac{S_e P_0 \eta_{op} \left(1 - \eta_0 - \frac{\delta h}{\sin \alpha}\right) \sin \alpha}{4\pi^2 R^2 f^2 \lambda}.$$

Pro poledne letního slunovratu nechť  $T_0 = 25^\circ \text{C}$  a pak  $T = 540^\circ \text{C}$ .

Pro poledne zimního slunovratu nechť  $T_0 = 0^\circ \text{C}$  a pak  $T = 100^\circ \text{C}$ .

Vzhledem k tomu, že teplota vznícení papíru je cca  $300^\circ \text{C}$  (podle druhu, vlhkosti, ...), vychází mi poměrně reálný výsledek.

*Doc. Jan Myslíveček:*

Abychom mohli vůbec cokoliv spočítat, potřebujeme znát energii připadající na plošnou jednotku, kterou k nám Slunce vyše. Její přibližná hodnota je  $1000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Jde o hodnotu spíše orientační, budu ji považovat za hustotu zářivého toku a budu také předpokládat kolmost dopadajícího záření. Z definice hustoty zářivého toku  $M_e$  je

$$M_e = \frac{\Phi_e}{S} \implies \Phi_e = M_e S = M_e \pi R^2,$$

kde  $R$  je poloměr čočky. Bude se měnit se vzdáleností Země od Slunce, při přibližování bude růst. Bude také záviset na roční době, neboť se bude měnit úhel, pod kterým budou papsky dopadat na náš povrch při dané zeměpisné šířce.

Energii, která dopadla na danou plochu, určíme snadno:  $E = \Phi_e t$  přímo z definice zářivého toku. Tuto energii soustředíme na kolečko o poloměru  $r$  na papíře, který má plošnou hustotu  $\rho$  a obsah vody  $100k\%$ . Dodaná energie ohřeje papír s vodou na  $100^\circ \text{C}$ , dále se vypaří voda, na což je třeba energie  $E = l_v \rho \pi r^2 k$ . Dále se tedy ohřívá již jen suchý papír. Během celého tohoto procesu však dochází k tepelné výměně s okolím. O tom, zda papír zapálíme, rozhodne rychlost této výměny. Protože je vzduch ale mimořádně dobrý izolant, mohli bychom uvažovat jen tepelnou výměnu v papíře.

**Pozn. redakce.** *Nepodíval jsem se do tabulek, ale papír je taky dobrý izolant. S tímhle zanedbáním to tak jednoduše nepude.*

Předaná energie je úměrná rozdílu teplot, délce styčné přímky, konstantou úměrnosti je součinitel tepelné vodivosti. Tedy

$$P = 2\pi h \lambda_p \cdot \Delta T, \quad W = Pt.$$

Dále se autor zaobírá určením času, za který zapálí papír. Jelikož nedovedl vyřešit dané rovnice, udělal horní odhad. Došel k závěru, že jestli  $M_e \pi r^2 < 2\pi h \lambda_p \cdot \Delta T$ , papír nikdy nezapálíme.  $\Delta T$  je rozdíl mezi teplotou vznícení a pokojovou teplotou.

Nezmínili jsme se však o vlastnostech lupy, která jistě výsledky ovlivní. Protože lupa není ideální čočka, existuje nejmenší poloměr kolečka, na které je lupa schopna soustředit světlo. Určit jej výpočtem je dosti obtížné, proto se spokojím s konstatováním, že přibližně jej lze určit experimentálním měřením. Co však podle mého názoru ovlivní výsledek, bude materiál, ze kterého je lupa vyrobena.

Půjde-li o sklo (v podstatě jakoukoliv odrůdu), bude pohlcena ultrafialová část spektra (mimo jiné). Pro daný materiál lupy by tedy bylo potřeba určit, které části spektra pohltní, a určit, jak se změní intenzita vyzařování a na to navazující energie dopadající na papír. Množství energie také ovlivňuje poloměr čočky. čím bude větší, tím více energie soustředíme na papír, ale tím větší bude minimální kolečko, které dokážeme vytvořit. Čím větší je lupa, tím je obvykle i tlustší a tedy i pohlcuje více záření.

Závěrem se dá říci, že se nám může podařit zapálit papír i při např. polojasnu, musí však energie dopadající na papír být dostatečná. Orientačně to jsme schopni určit.

**Pozn. redakce.** *Když papír zahříváme, mění se jeho barva. To značí, že se mění poměr mezi energií pohlcenou a odraženou. Můžete se to pokusit popsat. Taký by bylo vhodné spočítat, jak vysoko na obloze musí být Slunce, aby ještě zapálilo papír. Taký teplota v ohnisku není všude stejná...*

## Téma 2 – Provazování cihel

Doc. Jan Myslivěček:

Nejprve popíši nalezené možnosti pro sestavení zdi dané šířky. Je možné postavit libovolnou zeď o šířce násobku nejmenší délky hrany cihly, tedy 7,5 cm. Tato zeď nebude příliš kvalitní, je ji však možno postavit. První řádek vlastně budou cihly položené tak, aby na zemi ležely plochou  $7,5 \times 30 \text{ cm}^2$ .<sup>1</sup> Tato zeď by jistě byla stabilní, ale není jinak k ničemu. Stavět takto tenkou zeď nemá smysl. Nebude mít potřebné izolační účinky a pokud by tyto nebyly třeba, bylo by možno zeď nahradit jiným materiálem, který bychom mohli postavit asi stokrát rychleji, protože cihlovou zeď musíme omítat. . . Teoreticky je ale takovou zeď možné postavit, ale protože by byla lehčí, byla by také méně stabilní.

Další vrstva bude posunutá oproti předchozí o 15 cm libovolným směrem (samozřejmě ve směru zdi, vybočení do boku by nedávalo smysl). Další možnost je samozřejmě 30 cm široká zeď. Jediný rozdíl bude v tom, že na zemi bude ležet plochou  $15 \times 30 \text{ cm}^2$ .<sup>2</sup> Tento typ zdi se používá, pokud chceme postavit tenčí zeď. Je dost stabilní, má docela dobré izolační vlastnosti. . . Přesto používanější zeď je o šířce 30 cm, ale o tom až později. Další vrstva bude posunutá opět o 15 cm.

Zeď o šířce 22,5 cm je možno také postavit. Základní jednotkou budou dvě cihly „na plocho“, vedle nich jedna „na výšku“. Pro zvýšení stability bychom mohli posunout jednu ze dvou cihel „na plocho“ posunout o 7,5 cm. Vlastně bychom takto postavili zeď o výšce 15 cm a šířce 15 cm. Vrstva nad ní bude muset být posunutá, ale také cihla „na výšku“ musí být na opačné straně.<sup>3</sup> Tato zeď je vlastně k ničemu, kromě opravdu speciálních případů. Zeď není nijak úžasně stabilní, ale pokud budeme důslední v provazování, nebude to tak hrozné, pouze cihla „na výšku“ nebude provázána se dvěma cihlami „na plocho“. Dvojvrstvy jsou navzájem provázány a cihly „na plocho“ jsou také vzájemně provázány v celé dvojvrstvě.

Ani u zdi o šířce 30 cm se nevyhneme určitým problémům. Zeď bude již jen z cihel „na plocho“, základem jsou dvě cihly podél a pak jedna napříč, dvě podél, jedna napříč. . . Při tvorbě dalších vrstev musíme vzhledem k částečné asymetrii dbát na to, abychom další vrstvu posunuli o 15 cm daným směrem, který musí být provšechny vrstvy stejný. Na výšku tedy vždy u každé cihly napříč vznikne neprovázaná část. Třetí vrstva ji ale překryje. Tomuto vůbec nelze zabránit, mohli bychom to ale omezit, ovšem jen za cenu omezení provázanosti dvou svislých vrstev. Toto řešení není dokonalé, je ale nejlepší z těch, které jsem zkoumal. Zeď je provázána ve všech směrech stejně, žádný není preferován na úkor jiného, což je velmi důležité. Do této zdi je možné „vmontovat“ cihly „na výšku“, každá taková zeď by musela obsahovat dvě takovéto cihly a dvě „na plocho“ a podél nad sebou, ve zdi by ale byly 45 cm vysoké neprovázané spáry (kromně několika jiných, samozřejmě). Dvě cihly na plocho by bylo možno provázat mezi sebou jako v jednom z předchozích případů. Pokud bychom navíc různě natáčeli ty cihly „na výšku“,<sup>4</sup> dosáhli bychom zdi s alespoň tak dobrými vlastnostmi jako má předchozí typ dané šířky. Jde však spíše o matematický rébus než o snadno postavitelnou zeď, takže si myslím, že to není příliš používaný postup, je to ale zajímavá alternativa.

<sup>1</sup> Tento způsob nazveme „na výšku“ (protože postavení cihly s plochou  $7,5 \times 15 \text{ cm}^2$  nepoužijeme).

<sup>2</sup> Tomuto způsobu budeme říkat „na plocho“.

<sup>3</sup> Na závěr připojím obrázky všech popsanych typů zdí

<sup>4</sup> Zde je nutné shlédnout obrázky a to jak půdorys, tak nárys.



Zed' o šířce 37,5 cm není obtížné postavit. Opět bude obsahovat cihlu „na výšku“ a dvě cihly na plochu. Cihla na výšku bude vždy na kraji zdi (jednou vlevo, jednou vpravo), umístit ji doprostřed by bylo nepraktické, ve zdi by vznikly dlouhé neprovázanosti. Základní vrstva bude mít výšku 15 cm a druhá nad ní musí být posunutá o 15 cm. Tím dosáhneme dostačující provázanosti. Zed' by byla poměrně stabilní.

Zed' o šířce 45 cm zvládneme určitě také. Nalezl jsem efektivní, ale složité řešení. Základním motivem jsou tři cihly „podél“ pak jedna cihla „podél“ (tu umísťujeme jednou doprava, jednou doleva), dvě vedle ní napříč atd. . . Vrchní vrstvu posuneme o 45 cm. Protože jde o složitý systém, nevím nakolik je používán. Ve zdi vznikají svislé díry o výšce 22,5 cm a menší, což nevybočuje z průměru.

Přemýšlel jsem i nad dalšími možnostmi, zdi se většinou s rostoucí šířkou zesložifují a řekl bych, že nějaké obecné řešení neexistuje. Není však problém nalézt systém uspořádání pro danou hodnotu šířky, pokud bude násobkem 7,5 cm. Princip v hledání je podobný všem šířkám a vyplývá z vlastností zdi. Nyní tedy víme JAK zdi stavět, měli bychom tedy vědět i proč. I na tuto otázku se pokusím odpovědět.

Naším cílem je postavit zed' o dané šířce a co možná největší stabilitě. Tuhé těleso je tím stabilnější, čím níže má těžiště. To, jak nízko či vysoko je těžiště zřejmě neovlivníme, neboť hustotu (nebudeme ve zdi dělat díry, to by nám jistě nepomohlo), objem i rozměry jsou předem dány. Můžeme však ovlivnit stabilitu tím, jak „tuhé“ bude těleso samotné – zed'. Pokud bychom stavěli cihličky beze smyslu na sebe, každý takový komínek by vytvořil samostatné těleso o nízké hmotnosti. Síla na něj působící by jej mnohem snadněji převrátila, neboť by přitom nemusela převracet zbytek celé zdi.<sup>5</sup> Musíme tedy zed' stavět tak, aby nám nevzniklo jakési uskupení komíneků za sebou. Chybou by ale bylo stavět zed' provázanou v příčném směru a neprovázanou v podélném. Vlastně bychom postavili několik zdí vedle sebe, což by nebylo dobré ze stejných důvodů jako v předchozím případě.

Musí být tedy zed' provázána úplně? Ne, určitě nemusí. Cihly totiž spojuje beton (*pozn. redakce: Malta*), ten jednak vytváří to, že zed' se chová jako jedno těleso v celku, jednak v místech, kde provázání není dokonalé, udržuje soudržnost celku. Teoreticky by tedy bylo možné postavit komínky a pospojovat je betonem, tato zed' by ale dlouho nevydržela. Beton by byl velmi namáhán a po čase by se rozpadl. Možnosti uspořádání teoreticky nejsou omezené. Mohli bychom říci, že cihlička bude přesahovat o 3,214 cm a druhá o 25,142 cm. Takto vzniklý teoretický model by třeba měl nejlepší vlastnosti, ale v praxi by byl neuplatnitelný. Jednak cihly nemají dostatečnou přesnost, ale hlavně, dovedete si představit zedníka, jak s metrem v ruce odměřuje přesahy cihel?. Proto všechny navržené (a v praxi používané) systémy používají nejvýše polovinu daného rozměru cihly. Cílem je tedy postavit zed' provázanou, umožňující stavět přesně bez měřidel, které by zajišťovaly přesnost přesahů, a také jednoduchou. Čím je vzor jednodušší, tím menší je šance na vznik chyb. A s lidským chybovým faktorem se musí počítat.

<sup>5</sup> Stručněji komínek by měl výrazně nižší moment setravnosti vzhledem k zemi.

Robert Hanyš: Stabilita tělesa

Cihla může být položena třemi různými způsoby. Ale ve které poloze má největší stabilitu? Stabilitu tělesa určuje práce, kterou musíme vykonat, abychom těleso přemístili ze stálé rovnovážné polohy do polohy vratké.

Práce vykonaná při zvednutí těžiště kvádrů o hmotnosti  $m$  o výšku  $h = h_2 - h_1$ , je rovna přírůstku tíhové potenciální energie.

$$W = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1)$$

Položme si cihlu o rozměrech  $30 \times 15 \times 7.5 \text{ cm}^3$  postupně na stěny o rozměrech  $15 \times 7.5 \text{ cm}^2$ ,  $30 \times 7.5 \text{ cm}^2$  a  $30 \times 15 \text{ cm}^2$ . Po výpočtu délky stěnové úhlopříčky a dosazení do předchozího vztahu dostaneme tyto energetické hodnoty: 0.95 J, 4.93 J a 6.23 J.

**Závěr.** Stabilita tělesa je tím větší, čím níže je těžiště ve stálé rovnovážné poloze a čím větší je hmotnost tělesa. Nejstabilnější polohu zaujímá cihla ve třetím případě.

Tomáš Svatoň: Návod, jak si postavit rychle barák, který už ňáký ten pátek vydrží.

**Vztyčná spára** – svislá spára mezi dvěma vedle sebe ležícími cihlami.

**Ložná spára** – vodorovná spára mezi dvěma na sobě stojícími řadami.

**Cihelná vazba** – je nejučelnější postavení cihel ve zdi, aby tato měla hlavně ze statického hlediska co největší nosnost, pevnost a soudržnost. Této vlastnosti docílíme co největším možným přeložením (převázáním) cihel přes sebe, tj. nesmí být svislé vztyčné spáry ve dvou řadách nad sebou spojitě.

#### Převázání o 1/2 cihly

##### (1) Tloušťka zdi 150 mm.

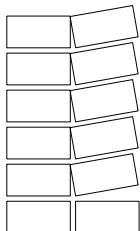
Používá se u zdí tloušťky 150 mm a u některých tloušťky 300 mm v kombinaci s převázáním o 1/4. Tento druh vazby se nazývá *běhounová*.

#### Převázání o 1/4 cihly

Lze použít i u tloušťky 150 mm, ale není taková kvalita jako při převázání o 1/2 cihly. Využívá se spíše u zdí s menší nosností, jako jsou příčky, nebo na kurník či králikárnu.

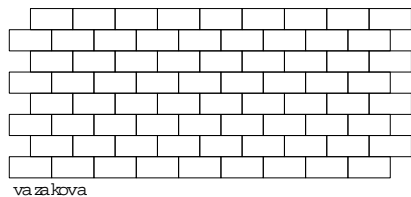
##### (2) Tloušťka zdi 300 mm.

Aby u zdí o tloušťce 300 mm nedocházelo k deformaci 2 stran vůči sobě, dáváme v některých řadách cihly napříč (tzv. *vazák*). Ostatní cihly se nazývají *běhoun*.

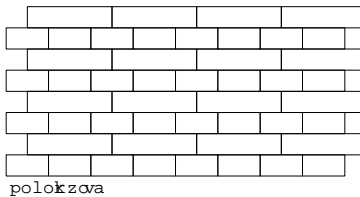


Jak je vidět, dají se mezi sebou vrstvy vazáků i běhounů i vazáky s běhouny samotné mezi sebou všelijak kombinovat a seskupovat. Některé častěji používané mají i svůj název.

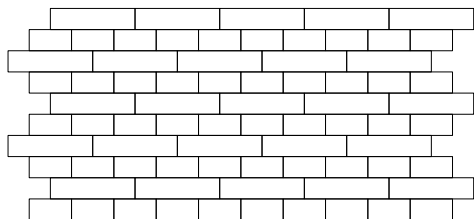
Příklady vazeb (z pohledu líce zdi):



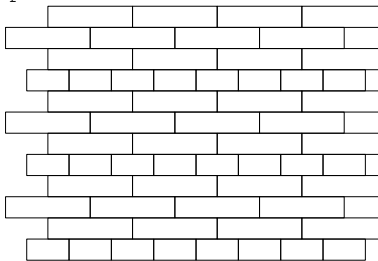
vazkova



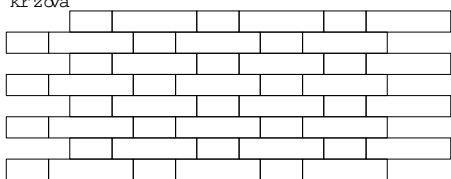
polokzova



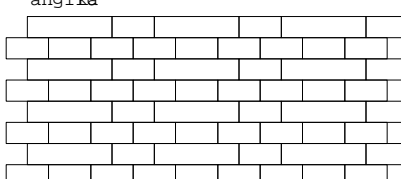
krzova



anglka



gotlka (polska)

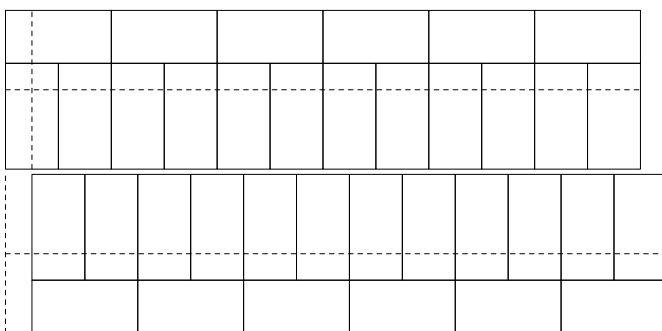


holandska

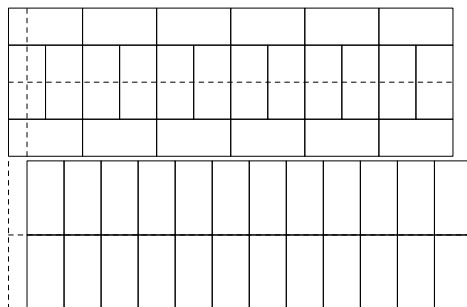
Kromě těchto běžných způsobů kladení cihel existují ještě 2 způsoby využívající svislé provázování – kachlíková a parketová vazba.

(3) **Tloušťka zdi 450 mm.**

Nejjednodušší je střídání těchto 2 vrstev:

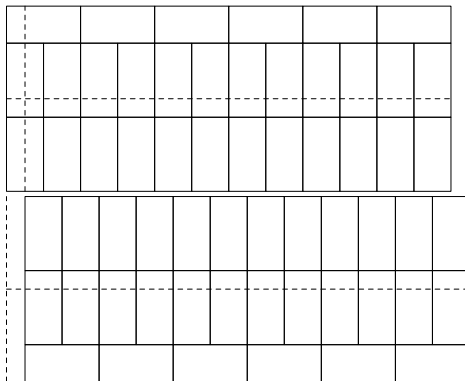


Je zde splněna podmínka převázání uvnitř zdiva o  $1/4C$ . Vrstvy jsou uspořádány s běhouny právě takto, protože je stejnoměrně kladené cihelná hmota od podélné osy zdi a zaručuje její lepší soudržnost. Toto pravidlo se objeví i u následujících zdí. Vazba z pohledu líce se dá použít – polokřížová, křížová. Anglická by byla také vhodná, ale z hlediska soudržnosti se nepoužívá.

(4) **Tloušťka zdi 600 mm.**

Lícní vazby: polokřížová, křížová, gotická a holandská.

(5) **Tloušťka zdi 750 mm.** Lícní vazby jako u zdi tloušťky 450 mm. Anglická vazba se ale už vůbec použít nedá.



- (6) **Tloušťka zdi 900 mm.** Použije je analogická stavba jako u zdi o tloušťce 600 mm. Stejným způsobem bude pokračovat stavba ještě širších zdí.

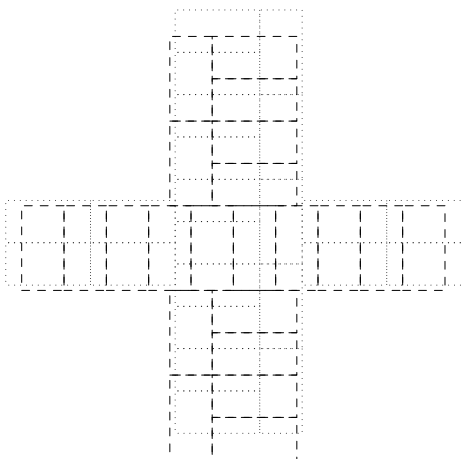
### Speciální vazby

Za zmínku by stála ještě pevnostní vazba, která je součástí hradeb u měst postavených okolo vlády Marie Terezie a Josefa II. (Hradec Králové, Terezín, Josefov).

U těchto zdí se v některých patrech kladou cihly uprostřed zdi šikmo.

### Křížení zdí

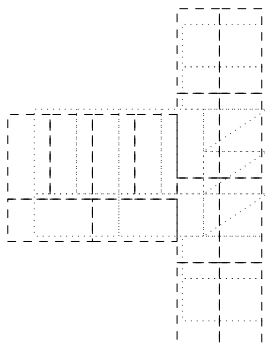
Křížení větších tlouštěk se běžně nepoužívá a dá se odvodit od užších variant. Např. křížení zdí o tloušťkách 450 mm a 300 mm může vypadat takto:



Jednoduchá pomůcka při křížení – jedna vrstva se nechá běžet (není přerušena v kříži druhou), převážně se přes spodní o  $1/4C$  a o zastavenou současně také o  $1/4C$ .

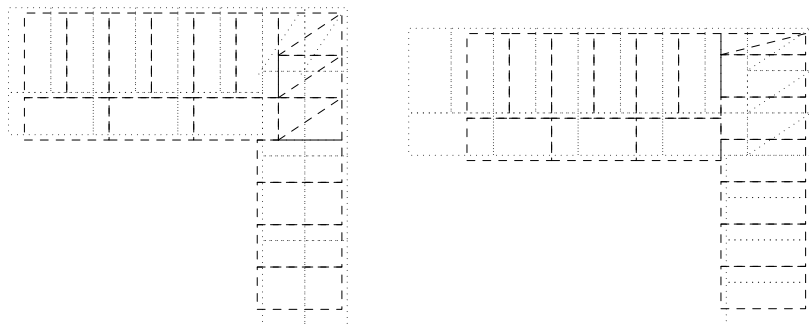
### Napojení do T

Při tomto a dalších napojeních se využívají také různé zlomky cihel: čtvrtka ( $7.5 \times 15 \times 7.5 \text{ cm}^3$ ), půlka ( $15 \times 15 \times 7.5 \text{ cm}^3$ ), tříčtvrtka ( $22.5 \times 15 \times 7.5 \text{ cm}^3$ ) nebo pásek ( $30 \times 7.5 \times 7.5 \text{ cm}^3$ ). Co se týče vazby, používá se překřížení *běžících* cihel se *stojícími*. Např. 450 mm zeď se může do 300 mm zdi pomocí tříčtvrtky napojit takto:



### Napojení do L

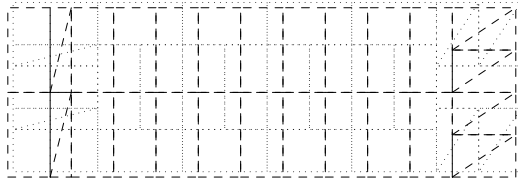
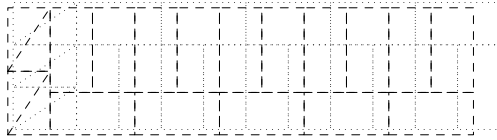
Provádí se pomocí devítek a pásků. Napojení zdi o tloušťkách 300 mm a 450 mm můžeme provést dvěma způsoby:



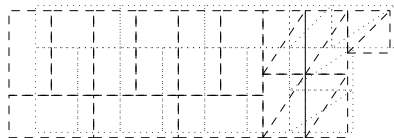
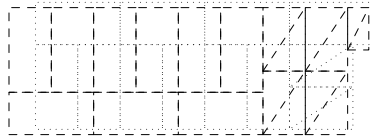
U levé vazby se napojuje pomocí devítek, u pravé vazby kombinujeme devítky s páskem, což je méně používané, protože pásek není tak hluboko ve zdi a nemá s ostatními cihlami tak velkou soudržnost jako devítka. Kdybychom chtěli mít na rohu něco upevněného, je zde větší pravděpodobnost popraskání omítky.

**Pilastr a nika (výklenek)**

Analogickým způsobem jsme pomocí devítek a půlek schopni postavit různé výklenky. Nákresy zde nejsou kvůli rozsahu překresleny.

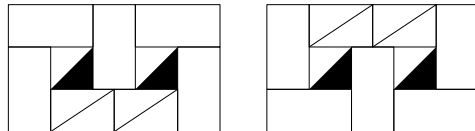
**Zakončení zdi a ostění**

Při ostění necháme ze zdi kousek cihly (čtvrtku nebo půlku) trčet, např. kvůli zasazení dveří.



### Pilíře, komínové zdivo a komíny

Použitím zlomků cihel snadno vytvoříme pilíře (tj. slupu o rozměrech řádově  $60 \times 45 \text{ cm}^2$ ), komínové zdivo (svislé průduchy uvnitř souvislé zdi o tloušťce minimálně 450 mm) či komínové těleso, které si zde nakreslíme.



Postup při vytváření vazby:

1. Nakreslíme průduchy příslušných rozměrů a vzdáleností.
2. Nakreslíme mezi nimi *jazyk* v obou vrstvách.
3. Víme, že druhý jazyk bude na protější straně líce komína, z toho plyne, že pod ním první vrstvu musíme převázat, a také víme, že 2. vrstva je pouze otočená první  $\implies$  pod jazykem 2 devítky a všude kvůli pevnosti se snažíme dávat celé cihly, někdy to nelze a používáme i půlky.



## Téma 5 (loňské) – Pokus R.P.Feynmana

**Pozn.** Feynman se píše s jedním n, nikoli se dvěma, viz originál R.P.Feynman *Surely You're Joking Mr. Feynman* (Norton, New York, 1985).

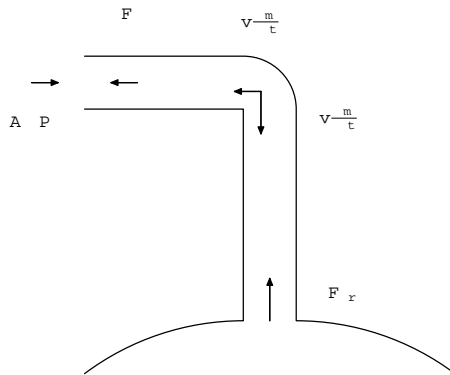
Doc. Jan Mysliveček:

## 1. Úvod

Po hlubším studiu daného problému jsem našel velmi zajímavé výsledky. Jejich teoretická část je ve fantastické shodě s experimenty.

## 2. Teorie

Nejprve budeme analyzovat síly působící na kapalinu při nasávání (inversní mód).



Rozdíl tlaků mezi volným prostorem a trubičkou ( $\Delta P$ ) způsobuje urychlení vody a překonání odporových sil. Pro síly působící kolmo k průvodiči lze psát:

$$A\Delta P = v \frac{\Delta m}{\Delta t} + m \frac{\Delta v}{\Delta t} + F_{\eta\theta}$$

kde  $A$  je průřez trubičky, tedy  $A\Delta P$  je síla způsobená rozdílem tlaků v části trubičky kolmé k průvodiči otáčivého pohybu a ve volném prostoru,  $F_{\eta\theta}$  je azimutální (kolmá k průvodiči) část odporových sil,  $m$  a  $v$  je hmotnost (resp. rychlost) kapaliny v trubičce.

Výraz  $m \frac{\Delta v}{\Delta t}$  představuje počáteční urychlení vody o hmotnosti  $m$  v trubičce do dosažení rovnovážného stavu. Azimutální síly na trubičku jsou způsobeny rozdílem tlaků, dostředivými silami nutnými k změně směru pohybu z azimutální na centrální a třecími silami (ty jsou způsobeny interakcemi mezi stěnou a kapalinou). Tedy

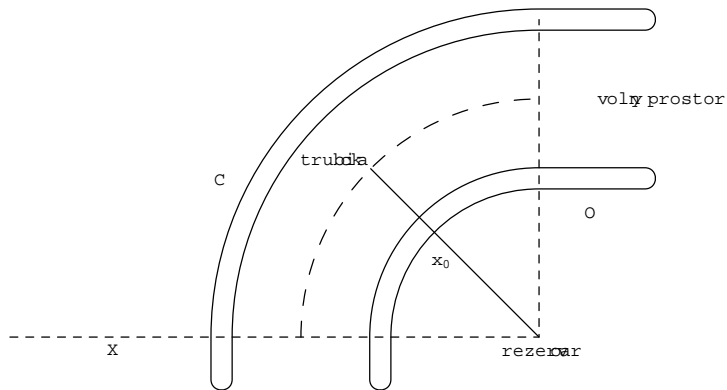
$$F_s^{(\theta)} = A\Delta P - v \frac{\Delta m}{\Delta t} - F_{\eta\theta} = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

kde  $F_s^{(\theta)}$  je výsledná síla působící na trubičku v azimutálním směru. Úvážíme-li nyní nulové třecí síly dostaneme

$$F_s^{(\theta)} = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Při začátku nasávání je  $m \frac{\Delta v}{\Delta t} > 0$ , po dosažení rovnovážného stavu nastává rovnost. Po zastavení nasávání je  $A\Delta P = 0$ , proudění vody je pomalejší, tedy  $m \frac{\Delta v}{\Delta t} < 0$ . Ačkoli  $A\Delta P = 0$ , zůstává  $v \frac{\Delta m}{\Delta t}$  kladné. To vytváří sílu působící na spinkler (to, co se otáčí) proti směru  $A\Delta P$ . To tedy vede k zastavení spinkleru po ukončení nasávání, bez ohledu na existenci či neexistenci třecích sil!

Při určení vztahu (1) jsme však provedli některá zanedbání. Nejprve jsme předpokládali, že tlak působící na tekutinu v trubičce je roven tlaku v okolní lázni ve velké vzdálenosti a že rychlost kapaliny v trubičce je stejná (jak na vnitřní, tak i vnější části trubičky), neuvažovali jsme také odlišné tlaky související s odlišnými rychlostmi. Tyto předpoklady nyní odstraníme.



Budeme považovat vodu za nestlačitelnou, nevířivou (což lze, neboť Reynoldsovo číslo je dostatečně malé (v řádu stovek)<sup>1</sup> a bez viskozity. Tyto předpoklady tedy určují neexistenci třecích sil. Nejprve se budeme zabývat částí C z následujícího obrázku.

Dále budeme předpokládat, že rychlost kapaliny je jen ve směru  $\theta$  (tedy nikoli ve směru osy  $z$ ) a je funkcí pouze poloměru. Odtud křivka pole toku v cylindrických souřadnicích udává

<sup>1</sup> R.č. by bylo v tomto řádu, kdybychom uvažovali viskozitu kapaliny, při neuvažování viskozity nemá R.č. význam, neboť  $R = \frac{\rho_{air} v_{air} D}{\eta}$

$$\nabla \times \mathbf{v} = z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right),$$

Z nevířivosti tekutiny ( $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ) plyne

$$v = \frac{c}{r}$$

kde  $c$  je konstanta. Tento vztah tedy znamená, že kapalina teče okolo vnějších stěn pomaleji než okolo vnitřních. Pokud nyní položíme tlak ve vodní lázni v nekonečnu za nulový a za předpokladu konstantní hustoty toku dostáváme

$$P_{out} = -\frac{1}{2}v_{out}^2, \quad P_{in} = -\frac{1}{2}v_{in}^2$$

kde  $P_{out}$  ( $P_{in}$ ) je tlak u  $v_{out}$  ( $v_{in}$ ) rychlost na vnější (vnitřní) stěně trubičky. Z (2) je pak

$$v_{out}r_{out} = v_{in}r_{in} = c$$

kde  $r_{out}$  ( $r_{in}$ ) je poloměr vnější (vnitřní) stěny. Definujme nyní proměnnou  $\omega$  šířku trubičky ve směru osy  $z$ , pak síla ve směru osy  $x$   $F_x^{curv}$

$$\begin{aligned} F_x^{curv} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta (r_{in}P_{in} - r_{out}P_{out})\omega d\theta = \\ &= \frac{c^2}{2} \left( \frac{1}{r_{out}} - \frac{1}{r_{in}} \right) \omega. \end{aligned}$$

Položíme-li

$$r_{out} = r_0 + \frac{\Delta r_0}{2}, \quad r_{in} = r_0 - \frac{\Delta r_0}{2},$$

kde  $r_0$  je poloměr středu trubičky. Taylorův rozvoj prvního řádu s uvažováním  $\frac{\Delta r_0}{r_0} \ll 1$  dává

$$F_x^{curv} = - \left( \frac{c^2}{2r_0} \right) \left( \frac{\Delta r_0}{r_0} \right) \omega = -P_0 A$$

kde  $P_0$  je velikost tlaku podél středu trubičky a  $A$  je obsah průřezu. Přitom ale tento výsledek předurčuje pohyb ve směru stejném jako při normální funkci spinkleru, což je (jak ukáží později) v přímém rozporu s experimentem. Tento rozpor je odstraněn započtením vlivu proudění kapaliny v těsném okolí ústí trubice. Zavedením komplexního rychlostního potenciálu  $\Phi(z)$ , kde

$$V(x, y) = v_x + iv_y = \frac{d\Phi^*}{dz}$$

kde  $v_x$  a  $v_y$  jsou  $x$  a  $y$ -ové složky pole. Z obr. 3, který zobrazuje vstupní část O z obr. 2, je možno určit polovinu síly působící za strany tekutiny na spinkler. Pro tuto sílu ( $F_x^{orif}$ ) platí

$$F_x^{orif} = - \int_1^2 P dy = \frac{\omega}{2} \int_1^2 (v_x^2 + v_y^2) dy$$

Protože tekutina má při okraji tečný směr, neexistuje žádná složka rychlosti  $\mathbf{v}$  kolmá k pevnému povrchu. Pak

$$(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds = (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) \cdot (dy \hat{x} - dx \hat{y}) = v_x dy - v_y dx = 0$$

kde  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ . Tuto podmínku použijeme k výpočtu podél čáry spojující body 1 a 2. Odtud

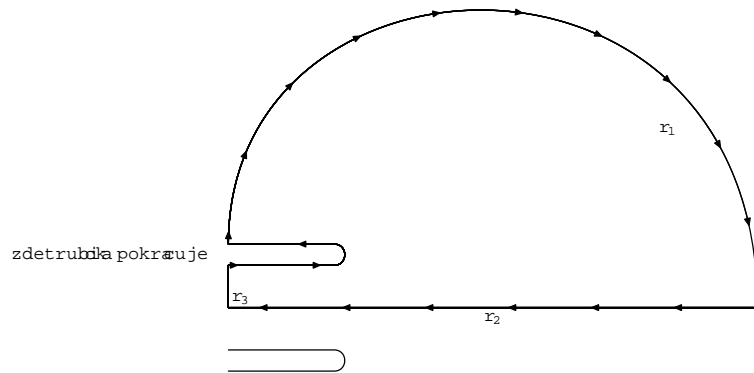
$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2 dz &= \int_1^2 (v_x^2 - v_y^2 - 2iv_x v_y)(dx + idy) = \\ &= \int_1^2 (v_x^2 dx - v_y^2 dx - 2iv_x v_y dx + iv_x^2 dy - iv_y^2 dy + 2v_x v_y dy) = \\ &= \int_1^2 (v_x^2 dx + v_y^2 dx - iv_y^2 dy - iv_x^2 dy) = \\ &= \int_1^2 (v_x^2 + v_y^2)(dx - idy) \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} F_x^{orif} &= \frac{\omega}{2} \int_1^2 (v_x^2 + v_y^2) dy = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left( \int_1^2 (v_x^2 + v_y^2) (dx - idy) \right) = \\ &= -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left[ \int_1^2 \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2 dz \right], \end{aligned}$$

kde  $\text{Im}\{z\}$  znamená imaginární část komplexního čísla  $z$ . Protože je  $\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2$  uzavřená křivka (dle

obr. 3) je



Obr. 3. Tvar křivky okolo ústí použité k integraci, uvažujeme jen polovinu ústí trubičky.

$$\oint \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 dz = 0 = \int_{\Gamma_1} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 dz + \int_{\Gamma_2} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 dz + \int_{\Gamma_3} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 dz + \int_{\Gamma_3} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 dz.$$

Protože je  $\Gamma_1$  dostatečně vzdálená, tedy derivace potenciálové funkce je podél křivky je zanedbatelná. Dále symetrie  $\Gamma_2$  určuje, že  $\frac{d\Phi}{dz} = v_x$  a také působící tlak podél trubičky určuje  $\frac{d\Phi}{dz} = v_x$ . Odtud je

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[ \int_{\Gamma_1} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 dz \right] &= -\operatorname{Im} \left( \int_{\Gamma_2} (v_x)^2 dx + i \int_{\Gamma_3} (v_x)^2 dy \right) = \\ &= -(v_x)^2 \left( \frac{\Delta r}{2} \right) \end{aligned}$$

kde  $v_x$  je pokládána za stálou v rovné části trubičky. Tedy

$$F_x^{orif} = -\frac{\omega}{2} \left[ -v_x^2 \left( \frac{\Delta r}{2} \right) \right] = \frac{P_0 A}{2}$$

Na spodní část trubičky působí tekutina stejnou silou tedy

$$F_{total} = F_x^{curv} + 2F_x^{orif} = 0$$

což je stejný výsledek jako ten odvozený (i když méně rigorózně) na začátku.

### 3. Experiment

**Pozn.** Jedinou možnou aparaturou, kterou lze vyrobit doma, je otevřená plechovka, která má dole čtyři trubičky. I ta je však poměrně náročná na výrobu.

Ze dvou možných experimentů se stejným výsledkem, které jsem našel, použijte ten zajímavější a jednodušší.

#### Aparatura

Použitou aparaturu tvoří uzavřená válcová skleněná nádoba (průměr 12 cm, výška 8 cm), jediné otvory tvoří trubičky po 90° okolo středu. Tento spinkler umístíme do vodní nádržky s vodou asi do výše 5 cm. Část vody nateče dovnitř, částečně naplněný spinkler se tedy bude vznášet ve vodě. Celou nádržku uzavřeme a necháme jen nahoře malý otvor (trubičku) na kterou umístíme nafukovací balónek. Když budeme snižovat tlak ve vodní nádržce, bude voda ze spinkleru proudit ven, jde o pohyb v normálním módu. Při pohybu opačném se bude zvyšovat tlak v okolí spinkleru, voda bude proudit dovnitř, tedy inverzní mód.

#### Výsledky

Výsledky jsou jasné a opakovatelné. Při stlačování balónku, tedy voda teče dovnitř (inverzní mód) můžeme pozorovat pomalé otáčení konstantní úhlovou rychlostí spinkleru ve směru **opačném** vůči pohybu při normálním módu. Když ukončíme stlačování balónku, tedy přestane proudit voda, pohyb končí.

Při normálním módu spinkler akceleruje ve směru opačném než má proudící voda z trubiček ven.

Pro zajímavost uvedu úhlové rychlosti jednotlivých pohybů (při normálním módu jde o maximální měřenou rychlost, které spinkler dosáhl po šesti vteřinovém vytékání vody. Tedy

$$\begin{aligned}\omega_{inv} &\approx 0,012s^{-1} \\ \omega_{norm} &\approx 0,12s^{-1}\end{aligned}$$

Mohl bych Vás zahlit množstvím nedůležitých údajů a jednotlivých momentech setrvačnosti, o momentech hybnosti jednotlivých částí spinkleru apod., nepovažuji to za důležité.

### 4. Závěr

Provedli jsme teoretický rozbor problému s jasným závěrem, praktické pokusy naše výsledky potvrzují. Při řešení problému byly použity články z American Journal of Physics (čísla 57 a 59), od autorů Michael R. Collier, Richard E. Berg, and Richard A. Ferrell, Department of Physics and Astronomy, University of Maryland, College Park, Maryland 20742.

Velmi zajímavé výsledky mohou nastat při použití jako tekutiny vzduchu a nikoli vody (spinkler např. může trval zrychlovat). To je však již nad rámec našeho úkolu. Dále bych rád upozornil na různé „pochybné“ experimenty s různými výsledky. Pokud například tření v aparatuře při otáčení bude příliš vysoké, nikdy žádný pohyb pozorovat nebudeme. Vzhledem k malým rychlostem inverzního otáčení je vidět, že třecí síly v aparatuře musejí být velmi malé k úspěšnému provedení pokusu.

## Úloha 1 – RBS – Reduced Banking Set

Ptáme se vlastně od jakého  $n \in \mathcal{N}$  existuje pro každé větší přirozené číslo  $m$  lineární kombinace čísel  $p, q$  tak, aby platilo  $ap + bq = m$ ,  $a, b \in \mathcal{N}_0$ .

Dokážeme, že nejmenší takové je  $n = (p-1)(q-1)$ . K tomu musíme dokázat jednak to, že  $n-1$  takto zapsat nejde, a že každé  $m \geq n$  takto zapsat jde.

1. Neexistují  $a, b \in \mathcal{N}_0$  tak, aby platilo  $ap + bq = (p-1)(q-1) - 1$ .

Důkaz provedeme sporem – předpokládejme, že taková  $a, b$  existují. Po roznásobení dostaneme  $ap + bq = pq - p - q$ , musí tedy platit následující kongruence:

$$\begin{aligned} ap + bq &\equiv pq - p - q \pmod{p} \\ bq &\equiv -q \pmod{p}. \end{aligned}$$

Jelikož různá prvočísla jsou nesoudělná, můžeme vykrátit  $q$ :

$$b \equiv -1 \pmod{p}.$$

Analogicky dostaneme  $a \equiv -1 \pmod{q}$ , tedy  $a = kq - 1$ ,  $b = lp - 1$ , kde  $k, l \in \mathcal{N}$ . Po dosazení dostaneme:

$$\begin{aligned} (kq-1)p + (lp-1)q &= pq - p - q \\ (k+l)pq - p - q &= pq - p - q \\ k+l &= 1. \end{aligned}$$

Poslední rovnost však nemůže být splněna, neboť  $k, l \in \mathcal{N}$  a tedy  $k+l \geq 2$ .

2. Pro každé  $m \geq (p-1)(q-1)$  existují  $a, b \in \mathcal{N}_0$  tak, že  $ap + bq = m$ .

BÚNO  $p > q$ . Vezměme čísla:

$$m - ap, a \in \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

Jelikož  $p$  a  $q$  jsou nesoudělná, probíhají tato čísla všechny zbytky mod  $q$  a existuje tedy  $a$  tak, že platí:

$$q \mid (m - ap).$$

Pokud  $m \geq p(q-1)$ , potom (jelikož  $a \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ ) dostáváme  $m - ap \geq 0$ . Pokud na druhou stranu  $(p-1)(q-1) \leq m < p(q-1)$ , potom  $q-1 \leq m - (q-1)p < 0$  a tedy  $q \nmid (m - (q-1)p)$ , z čehož dostáváme  $a \leq q-2$  a (vzhledem k  $p > q$ ) rovněž  $m - ap \geq 0$ .

V obou případech tedy  $q \mid (m - ap)$  a  $m - ap \geq 0$ , existuje tedy  $b \in \mathcal{N}_0$  tak, že  $m - ap = bq$ , neboli  $m = ap + bq$ .

**Q.e.d.**

## Úloha 2 – Kružnice

1. Většina z vás řešila úlohu přes úhly:

Obvod velké kružnice dvakrát větší než obvod malé. To, že se jedna kružnice po druhé valí, znamená, že dotykový bod se u obou posunul o stejnou vzdálenost (po obou). To znamená, že úhel, o který se malá kružnice pootočila, je dvojnásobný vzhledem k úhlu u velké kružnice (viz obr. 2, úhly  $\alpha$  a  $-2\alpha$  – otáčí se v opačném směru). Úhel  $2\alpha$  je středový úhel malé kružnice mezi aktuálním a původním dotykovým bodem, střed velké kružnice leží po celou dobu na obvodu malé kružnice a podle věty o středových a obvodových úhlech je úhel  $T'S_1X'$  poloviční vzhledem k úhlu  $2\alpha$ , tzn.  $\alpha$ . To znamená, že úhel  $TS_1T'$  je stejný jako úhel  $X'S_1T'$ , tzn. že body  $T, X', S_1$  leží na jedné přímce nezávisle na velikosti úhlu  $\alpha$ . Tím dokážu, že se bod  $X'$  (původní bod dotyku) pohybuje po přímce až do bodu  $S_1$ , tedy v první čtvrtině periody běhu po kružnici. Teď jestliže přeskočím druhou čtvrtinu periody, bude se mi původní doykový bod  $X$  opět dotýkat kružnice, a to v její horní části, a budu se pohybovat nazpět, tak je jasné, že jde o symetrický případ. Stejně i pro zbylou část periody.

2. Úlohu lze řešit i analyticky:

Zvolíme soustavu souřadnic  $x, y$  se středem v bodě  $S_1$ , obr.1 vystihuje situaci v čase  $t = 0$ . Souřadnice aktuálního dotykového bodu jsou potom  $x_d = 2r \sin t, y_d = -2r \cos t$ .

Pro transformaci mezi vzájemně natočenými soustavami, které mají stejný střed (obr. 3), platí

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= r \cos(\alpha' + \phi) \\ r \sin \alpha &= r \sin(\alpha' + \phi), \end{aligned}$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \phi - y' \sin \phi \\ y &= y' \cos \phi + x' \sin \phi. \end{aligned}$$

Za úhel  $\phi$  dosazujeme momentální sklon (derivaci) kružnice v dotykovém bodě vzhledem k zavedené soustavě souřadnic, tedy úhel  $\alpha$ . Jak už bylo řečeno, původní bod dotyku je vzdálen od momentálního o středový úhel  $-2\alpha$ . Vezmeme-li druhou soustavu souřadnic  $x', y'$ , která má střed v momentálním dotykovém bodě  $T'$  a na ose  $x$  leží ještě střed menší kružnice  $S_2$ , tak pro původní bod dotyku umístěný v této soustavě platí

$$\begin{aligned} x' &= r \sin(-2t) \\ y' &= r(1 - \cos(-2t)). \end{aligned}$$

Tedy rovnice pro původní bod dotyku je:

$$\begin{aligned} x &= 2r \sin t + r \sin(-2t) \cos t - r(1 - \cos(-2t)) \sin t \\ y &= -2r \cos t + r(1 - \cos(-2t)) \cos t + r \sin(-2t) \sin t, \end{aligned}$$

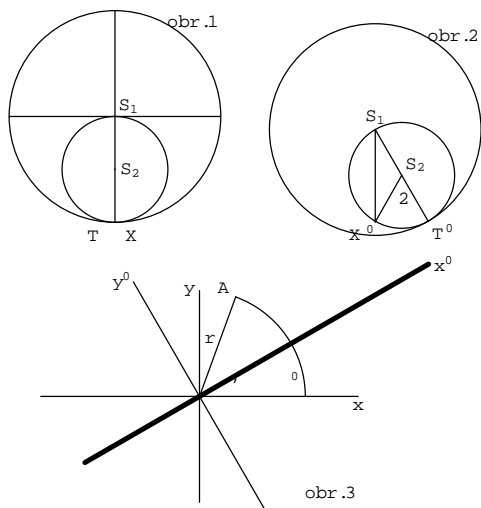
po úpravě

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -2r \cos t. \end{aligned}$$



Tedy jde opravdu o přímku.

Po přímce se bude pohybovat každý bod na malé kružnici, protože každý bod se někdy dotýká té vnější a je lhostejno, v jakém čase, protože děj je periodický.



### Úloha 3 – Pappova věta

#### 1. Důkaz Pappovy věty (řešení podle Bc. Pavla Augustinského):

Rovnoběžník ACMN má stejný obsah jako ACPR, protože základna AC a výška obou rovnoběžníků je stejná. To samé platí pro rovnoběžníky BKLC a BSPC. Odečtu-li od obsahu pětiúhelníku ABSPR obsahy rovnoběžníků ACPR a BSPC, dostanu obsah trojúhelníku ABC. A odečtu-li od obsahu pětiúhelníku ABSPR obsah rovnoběžníka ABSR, dostanu obsah trojúhelníka RSP. Trojúhelník RSP je v podstatě trojúhelník ABC posunutý ve směru úsečky CD o její délku. Tedy

$$S_{ABSPR} - S_{ABSR} = S_{ABSPR} - (S_{BSPC} + S_{ACPR})$$

$$S_{ABSR} = S_{BSPC} + S_{ACPR}$$

$$S_{BSPC} = S_{BKLC}$$

$$S_{ACPR} = S_{ACMN}$$

$$S_{ABSR} = S_{BKLC} + S_{ACMN}$$

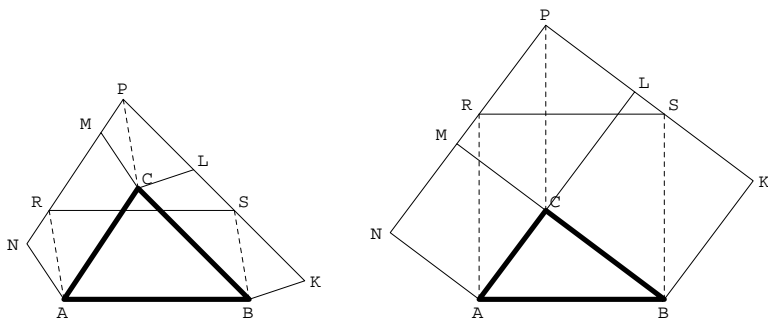
q.e.d.

#### 2. Důkaz Pythagorovy věty

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu C) a zvolím-li rovnoběžníky BKLC a ACMN jako čtverce, bude trojúhelník CLP (nebo MCP) shodný s trojúhelníkem ABC, protože  $|PM| = |CL| = |CB|$ ,  $|PL| = |MC| = |CA|$ ,  $\angle PLC = \angle ACB = 90^\circ$ ,  $|PC| = |AB|$ . Nyní prodloužíme přímkou PC směrem ke straně AB a označíme jejich průsečík X. Trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku CBX, protože  $\angle ABC = \angle XBC$  a  $\angle XCB = \angle MCP = \angle BAC \Rightarrow \angle CXB = 90^\circ$ .

Když sestrojíme podle Pappovy věty rovnoběžník ABSR, bude to čtverec, tedy aké platí  $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$ .

q.e.d.





Pořadí	Jméno	Škola	$\Sigma_{-1}$	T1	T2	T3	R1	R2	R3	Feyn	$\Sigma_0$	$\Sigma_1$
1.	Dr. Zdeněk Dvořák		79	22	10		4	5			41	41
2.	Doc. Jan Mysliveček		135		10	5				20	35	35
3.	Mgr. Antonín Lejsek		46	7			2	4	4		17	17
4.-5.	Jitka Poláčková		0	10					5		15	15
	Dr. Lenka Zdeborová		62				5	5	5		15	15
6.-8.	Mgr. Robert Vácha		41	7		2	4	0			13	13
	Mgr. Michal Tarana		42	5			3	5			13	13
	Tomáš Svatoň		8			10		3			13	13
9.-11.	Robert Hanyš		0	4		6		0			10	10
	Veronika Deckerová		0					5	5		10	10
	Mgr. Pavel Moravec		20					5	5		10	10
12.	Mgr. Vladislav Válek		30	9							9	9
13.	Lada Oberreiterová		0					3	5		8	8
14.-15.	Bc. Pavel Augustinský		11						5		5	5
	Chaloupka		0					5			5	5