

# M&M číslo 4 ročník IV

## Ahojte řešitelé!

Konečně vyšlo nové číslo! Do konce roku plánujeme ještě jedno páte číslo, ve kterém se vytiskne definitivní pořadí řešitelů za tento ročník. Vyjde před koncem školního roku.

Letní soustředění se bude konat od 19. do 26. července (tedy o prázdninách!) v chatě na Mariánské v Krušných horách. Všichni jste samozřejmě zváni. Pouze v případě, že by počet zájemců přesáhl kapacitu chaty (která je asi 38 lidí, ale možná ji nebudeme mít celou pro sebe), vybereme ty nejlepší řešitele. Po zkušenostech z loňska však tuto možnost nepředpokládáme.

Proto vás prosím, abyste nám předběžně napsali, zda byste měli zájem soustředění se zúčastnit. Definitivní přihláška vám bude poslána v další sérii. Teď s tím ještě nemusíte spěchat, ale čím dříve bude znát vaše názory (např. tenhle termín se mi vůbec nehodí), tím lépe. Napište prosím také informace o vás pro nás – např. co byste chtěli na soustředění slyšet či prožít a naopak, co byste byli schopni ostatním nabídnout.

Možná jste si všimli, že se vzhled časopisu trochu změnil. Aplikujeme menší typografické změny, naším cílem je zvýšení čitelnosti časopisu. Zatím nejsou změny definitivní. Napište nám, jaký máte na nový vzhled názor. Co se týče loga, omlouváme se, ale letos asi žádné logo nevybereme. Žádné z nich nebylo tak přehádné, že by přehlušilo všechna ostatní a obyčejné logo se nám zatím kreslit nechce.

*redaktoři časopisu*

## Téma 3 – Dláždění

*Mgr. Lenka Zdeborová: ... a zase to dláždění*

**Omluva redakce.** *Bohužel nebylo v mých silách překreslit všechny doprovodné ilustrace, myslím však, že výklad bude snadno pochopitelný i bez nich.*

Podle zadání uvažujeme pouze periodická dláždění, tj. ta dláždění, která jsou generována dvourozměrným posunutím jedné kostičky. Na pohled se tato dláždění mohou skládat z více typů kostiček. Proto zavedeme pojem *dlaždice*, dlaždicí budeme nazývat skupinu kostiček, která se v dláždění periodicky opakuje a navíc ji lze posunout tak, aby splývala postupně s každou svou sousední dlaždicí. Takových dlaždic je ovšem v daných dlážděních mnoho, uvažujeme vždy jen nejjednodušší z nich (složenou z minimálního počtu kostiček).

Nyní se pokusíme každé dláždění zjednodušit. Určíme si nějaký dominantní bod u dlaždice (např. některý její vrchol) a u sousedních dlaždic tyto body spojíme. Tuto novou síť nazveme *základní síť dláždění*. Nyní dláždění rozdělíme na 2 základní skupiny:

- i Základní síť se skládá ze 4-úhelníků, v jednom bodě se stýkají maximálně 4 dlaždice, každá dlaždice má 4 sousedy.
- ii Základní síť se skládá z 3-úhelníků, v jednom bodě se stýkají maximálně 3 dlaždice, každá dlaždice má 6 sousedů.

**Poznámka redakce.** Základní síť dláždění je vlastně duální graf ke grafu dláždění: stěny se stanou vrcholy, sousednost kostiček je vyjádřena propojením vrcholů, z vrcholů budou stěny duálního grafu. Nesouhlasím s tím, že by základní skupiny byly 2. Myslím si, že budou nejméně 3, jako skupinu III bych navrhoval základní síť složenou z 6-úhelníků.

Skupinu I rozdělíme podle tvaru 4-úhelníků:

- $I_\alpha$ . čtverce
- $I_\beta$ . obdélníky
- $I_\gamma$ . kosočtverce
- $I_\delta$ . rovnoběžníky

Skupinu II rozdělíme podle tvaru 3-úhelníků:

- $II_\alpha$ . rovnostranné
- $II_\beta$ . rovnoramenné pravouhlé
- $II_\gamma$ . rovnoramenné
- $II_\delta$ . pravouhlé
- $II_\varepsilon$ . obecné

V každé skupině můžeme jednotlivé druhy více specifikovat určením, podle kolika os je souměrná každá dlaždice. Osy souměrnosti určujeme samozřejmě u původní dlaždice, nikoliv u *základní sítě dláždění*, podle této sítě už jsme dláždění do skupin dělili.

**Skupina  $I_\alpha$ :** čtverce

1. souměrná podle 4 os (vodorovná, svislá, 2 šikmé),
2. souměrná podle 2 os (vodorovná, svislá),
3. souměrná podle 1 osy,
4. nesouměrná

**Skupina  $I_\beta$ :** obdélníky

1. 2 osy souměrnosti,
2. 1 osa souměrnosti,
3. žádná osa souměrnosti

**Skupina  $I_\gamma$ :** kosočtverce

1. 2 osy souměrnosti,
2. 1 osa souměrnosti,
3. žádná osa souměrnosti

**Skupina  $I_\delta$ :** rovnoběžníky

1. žádná osa souměrnosti

**Skupina  $II_{\alpha}$ :** rovnostranné

1. dlaždice má 6 os souměrnosti (pravidelný 6-úhelník),
2. dlaždice má 2 osy souměrnosti (dlaždice je obdélník, jednotlivé řady nad sebou jsou proti sobě posunuty),
3. dlaždice má 1 osu souměrnosti (tvar jako 2.),
4. dlaždice nemá žádnou osu souměrnosti (tvar jako 2.)

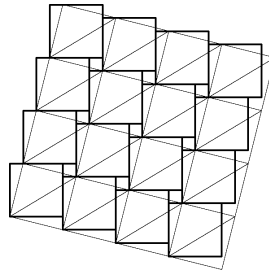
**Skupina  $II_{\beta}$ :** rovnoramenné

1. dlaždice má 2 osy souměrnosti (dlaždice je obdélník, jednotlivé řady nad sebou jsou proti sobě posunuty),
2. dlaždice má 1 osu souměrnosti (tvar jako 1.),
3. dlaždice nemá žádnou osu souměrnosti (tvar jako 1.)

**Poznámka redakce.** Do skupiny  $II_{\beta}$  druh 3. bude zřejmě patřit i dláždění z minulého čísla M&M. Myslím to dláždění, které jsem uvedl jako protipříklad vedle tabulky 'všech' dláždění. Problém této klasifikace je, že je příliš hrubá právě pro toto dláždění – je totiž házeno do 1 pytle spolu s dalšími nepravidelnými dlážděními, zanedbává se u ní symetrie rotace o  $90^{\circ}$ .

**Skupina  $II_{\gamma}$ :** rovnoramenné pravoúhlé

1. 4 osy souměrnosti dlaždice (čtverec),
2. 2 osy souměrnosti dlaždice (obdélník),
3. 1 osa souměrnosti dlaždice,
4. žádná osa souměrnosti dlaždice

**Skupina  $II_{\delta}$ :** pravoúhlé

1. 2 osy souměrnosti dlaždice (obdélník),
2. 1 osa souměrnosti dlaždice,
3. žádná osa souměrnosti dlaždice

**Skupina  $II_{\epsilon}$ :** obecné

1. 4 osy souměrnosti dlaždice (čtverec),
2. 2 osy souměrnosti dlaždice (obdélník),
3. 1 osa souměrnosti dlaždice,
4. žádná osa souměrnosti dlaždice

Sečtením všech druhů u všech skupin dojdeme k závěru, že existuje  $11 + 18 = 29$  skupin. Postup při zařazování dláždění do určité skupiny je následující:

1. nejprve určím *základní dlaždice*,
2. na ní vyberu 1 bod a nakreslím *základní síť dláždění*,
3. určím jednu z 9 tříd,

4. podle os souměrnosti určím druh v dané třídě.

**Závěr redakce.** Ačkoliv má tento postup výše uvedené slabiny, myslím, že je velice zdařilý, neboť charakterizuje obecnou metodu, podle níž lze při hledání skupin dláždění snadno postupovat.

JK

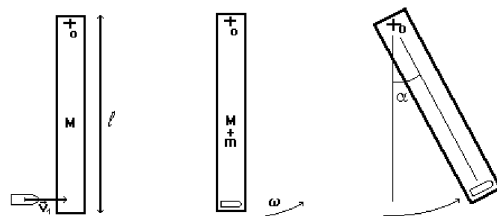
## Téma 5 – Pokus R. P. Feynmana

Na toto téma přišlo několik odpovědí, ale bohužel většina z těch, kteří poslali nějaký vědecký příspěvek, pouze odhadli, jak by mohla Feymannova trubka točit a nedokázali už svoji domněnku podložit nějakou teorií. Ostatní sice vypracovali teoretické modely, ale protože v nich bylo mnoho chyb, nepovažuji za rozumné je v tomto čísle zveřejňovat. Vyskytla se i jedna experimentárorka, výsledky její práce budou zveřejněny v dalším čísle s vašimi novými příspěvky na toto téma. Protože jste při tvorbě svých teoretických modelů dělali chyby zvláště kvůli tomu, že jste místo zákona zachování momentu hybnosti používali zákon zachování hybnosti, rozhodl jsem se sám něco na toto téma napsat. Na závěr článku ještě přidávám pár otázek k této problematice, na které můžete odpovídat v rámci tohoto tématu. Jinak stále vítám příspěvky na původní téma (Feymannova trubka). Prozatímni skóre toho, kam se bude trubka točit je 4:2. Stejným směrem, jako když je voda vystřikována, se bude točit podle názoru *Zuzany Kováčkové*, *Dr. Štěpánky Kučkové*, *Doc. Jana Myslívečka* a *Bc. Pavla Nečase*, opačný směr preferují naopak *Mgr. Robert Vácha* a *Doc. Jan Myslíveček* (který uvádí, že směr otáčení závisí na okolnostech).

### Hybnost versus moment hybnosti

Každý určitě zná příklad, ve kterém se z pušky střílí do pytle s pískem visícím na provazu. V případě, že kulka zůstane v pytli, pak z její hmotnosti  $m$ , hmotnosti pytle s pískem  $M$ , délky provazu a výchylky pytle po zásahu můžeme určit počáteční rychlost kulky. Je-li  $v_1$  je rychlost kulky před nárazem a  $v_2$  po nárazu (určit  $v_2$  je maličkost), pak  $v_1$  vyjádříme ze zákona zachování hybnosti ZZH jako

$$v_1 = \frac{M + m}{m} v_2.$$



Obr. 1. Náraz kulky do prkna, soustava kulka-prkno po nárazu získá moment hybnosti  $I\omega + m\omega l^2$  ( $I = 1/3 Ml^2$ )

Nyní budeme místo do pytle střílet do prkna, které je upevněno za jeden konec a kolem tohoto konce se může volně otáčet (viz. obr. 1). Prkno má hmotnost  $M$  a délku  $l$ . V tomto případě bychom

se **ZZH** moc neuspěli, protože prkno nemůžeme nahradit hmotným bodem jako v předchozím případě. Musíme tedy použít zákon zachování momentu hybnosti **ZZMH**. Moment hybnosti určitého hmotného bodu se dá vyjádřit jako vektorový součin ramene a hybnosti, tj.  $M_{\text{hybnosti}} = r \times p$ ,  $r$  je rameno momentu hybnosti, tedy vektor s počátkem v ose otáčení a koncem v hmotném bodě, který má hybnost  $p$ . Na středních školách se momenty hybnosti většinou nepočítají vektorově, ale jako součin hybnosti a efektivního ramene (což je kolmá vzdálenost hmotného bodu od osy vektoru hybnosti). V podstatě postupujeme stejně, jako když se počítá moment síly. Pro těleso, u kterého uvažujeme tvar, určíme moment hybnosti tak, že si těleso rozdělíme na elementy a sečteme momenty hybnosti jednotlivých elementů. Je-li  $m_i$  hmotnost a  $r_i$  vzdálenost elementu od osy otáčení a těleso se v určitém okamžiku otáčí kolem této osy úhlovou rychlost  $\omega$ , pak v tomto okamžiku má moment hybnosti

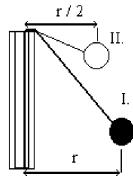
$$M_{\text{hybnosti}} = \sum m_i v_i r_i = \sum m_i (\omega r_i) r_i = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega I.$$

Ve vzorci můžeme nahradit sumu součinu hmotnosti a kvadrátu ramene všem známým momentem setrvačnosti  $I$ . Dále platí zákon zachování momentu hybnosti **ZZMH**: součet momentů hybnosti izolované soustavy zůstává zachován. Působí-li na těleso moment síly, je změna momentu hybnosti v čase v diferenciálním tvaru  $M_{\text{sily}} = \frac{d}{dt} M_{\text{hybnosti}}$ .

Nyní se vraťme k úloze s prknem. Musí platit **ZZMH**: před nárazem je prkno v klidu, moment hybnosti prkna je nulový, kulka má hybnost  $mv_1$  a délka ramena je  $l$  (při nárazu na dolním konci prkna), takže celkový moment hybnosti soustavy před nárazem je  $mv_1 l$ ; po nárazu zůstává kulka v prkně, takže moment setrvačnosti prkna s kulkou je  $\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2$ , a je-li okamžitá úhlová rychlost po nárazu  $\omega$ , je celkový moment hybnosti soustavy po nárazu  $(\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)\omega$ . Určit okamžitou úhlovou rychlost těsně po nárazu z výchytky prkna  $\alpha$  je pro každého jistě maličkost. Vypočteme tedy počáteční rychlost kulky  $v_1$  jako

$$mv_1 l = \left( \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2 \right) \omega$$

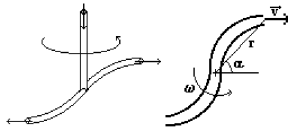
$$v_1 = \frac{\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2}{ml} \omega.$$



Obr. 2. Kulička na niti

Zkusme vyřešit jiný příklad. Kulička o hmotnosti  $m$ , upevněná na neroztažitelném a dokonale hladkém a ohebném vlákně procházejícím středem trubky, se pohybuje kolem trubky po kružnici o poloměru  $r$  (viz. poloha I. na obr. 2) úhlovou rychlostí  $\omega_1$ . Vtažením vlákna do středu trubky zmenšíme poloměr kružnice, po které kulička obíhá kolem trubky, na  $\frac{1}{2}r$  a úhlová rychlost kuličky vzroste na  $\omega_2$  (viz. poloha II. na obr. 2). Otázkou je, jaká bude úhlová rychlost  $\omega_2$  kuličky po vtažení nitě do trubky.

V zásadě se nabízejí dva postupy, jak příklad řešit – buď ze zákona zachování mechanické energie **ZZME** nebo ze zákona zachování momentu hybnosti **ZZMH**. Problém je v tom, že oběma postupy dojdeme k různým výsledkům. Špatný je postup využívající **ZZME**, protože tím, že vtahujeme níž do trubky, konáme práci, a proto zde **ZZME** bez započítání práce potřebné na vtažení nitě do trubky a změnu polohové energie neplatí. Ze **ZZMH** dostáváme rovnici  $m\omega_1 r^2 = \frac{1}{4}m\omega_2 r^2$ , tedy  $\omega_2 = 4\omega_1$ .



Obr. 4: Voda vytéká z S-trubky

Poslední příklad, který se zde budeme rozebírat, je otáčení trubky tvaru S, ze které voda vystřikuje ven (viz. obr. 4). Bude nás zajímat, jak velký moment síly S-trubku roztáčí. Do soustavy shora vtéká voda a na konci svislé trubky se rozděluje na dva proudy, které pokračují oběma konci S-trubky. V místě, kde se voda rozděluje, a ve svislé trubce má voda nulový moment hybnosti (také jeho rameno je nulové). Vyteče-li z trubky voda o hmotnosti  $m$ , rychlostí  $v$ , ve vzdálenosti  $r$  od osy a trubka již rotuje rychlostí  $\omega$ , pak má voda moment hybnosti  $m(v \sin \alpha - \omega r) r$ . Voda sice vytéká rychlostí  $v$  z trubky, ale její složka kolmá na rameno je  $v \sin \alpha$  a jelikož trubka zároveň rotuje opačným směrem i s vodou, která jí protéká, je třeba odečíst rychlost  $\omega r$  – ta je již kolmá na rameno. Protože platí **ZZMH** a voda měla na začátku moment hybnosti nulový, změní se moment hybnosti S-trubky o  $-m(v \sin \alpha - \omega r) r$ . Hmotnost vody, která vyteče za malý časový okamžik  $dt$ , je  $dm = v\rho S dt$ , kde  $\rho$  je hustota vody a  $S$  průřez trubky. Moment síly působící na trubku určíme ze změny momentu hybnosti trubky během času podle vzorce:

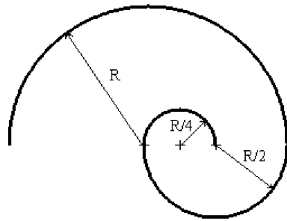
$$\begin{aligned} M_{\text{sily}} &= \frac{d}{dt} M_{\text{hybnosti}} = \frac{dm}{dt} (v \sin \alpha - \omega r) r = \\ &= \frac{(v\rho S dt)(v \sin \alpha - \omega r) r}{dt} = v(v \sin \alpha - \omega r) \rho S r. \end{aligned}$$

Pokud zanedáme odpor vzduchu a třecí síly v místě rotace, vidíme, že moment sil bude nulový právě tehdy, když platí  $v \sin \alpha = \omega r$ . Z toho plyne, že se úhlová rychlost rotace S-trubky ustálí na  $\omega = \frac{v}{r} \sin \alpha$ . Chceme-li spočítat úhlové zrychlení během fáze, kdy se trubka roztáčí, můžeme použít následující vztah (za  $M_{\text{brzdných sil}}$  můžeme dosadit moment třecích sil a moment síly odporu vzduchu):

$$\varepsilon = \frac{M_{\text{sily}} - M_{\text{brzdných sil}}}{I} = \frac{M_{\text{sily}} - M_{\text{brzdných sil}}}{I_{\text{trubky}} + I_{\text{vody}}}.$$

Nesmíme zapomenout, že moment sil neroztáčí samotnou trubku, ale i vodu, která v ní zrovna protéká, takže musíme započítat moment setrvačnosti trubky včetně vody v ní.

Doufám, že díky předchozím příkladům budete příště již všichni schopni odpovědět, kam se bude Feynmannova trubka točit a budete vědět proč. Proto očekávám záplavu řešení. Dále se můžete zamyslet nad následujícími otázkami. Odpovídat na ně můžete v rámci tohoto tématu.



Obr 3. Kulička se kutalí kanálkem tvaru půlkružnic se zmešujícíím se poloměrem

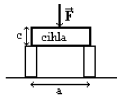
- (a) Proč má vrtulník dvě vrtule? K čemu je velká vrtule a k čemu malá?
- (b) Na obrázku č. 3 vidíte spirálovitý kanálek, který je sestaven z půloblouků, u kterých se zmenšuje poloměr. Následující půloblouk má poloviční poloměr předchozího půloblouku. Když na vnější konec takového kanálku položíme kuličku a udělíme jí takovou rychlost, aby putovala kanálkem ke středu, bude se její rychlost zvětšovat podle zákona zachování mech. energie (nedochází k úbytku energie). Kdybychom rychlost počítali podle zákona zachování momentu hybnosti, došli bychom k jinému výsledku, který je špatný. Proč zde neplatí **ZZMH**?

## Téma 6 – Destrukce

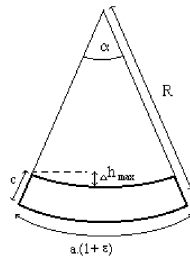
### Karatista

Na námět karatista rozbíjí cihlu přišlo několik příspěvků. Ve dvou z nich autoři počítají, jak velkou silou musí karatista praštit do cihly, aby praskla. Způsoby výpočtu se liší, a proto zde pro srovnání uvádíme oba dva.

*Tomáš Svatoň: Lámaní cihel*



Obr 1: Na cihlu o rozměrech  $a \times b \times c$  působíme silou  $F$



Obr 2: Určení maximálního průhybu  $\alpha^2 h_{\max}$  v závislosti na maximálním relativním prodloužení spodní části cihly  $\epsilon$

Autor použil pro výpočet síly při lámání cihly následujících vzorců (neuvádí, jak k nim dospěl):

$$\sigma_{\text{mez}} = \frac{M}{W_0}$$

$$W_0 = \frac{1}{6}bc^2, \text{ (průřezový modul pro kvádr)}$$

$$M = \frac{1}{4}Fa, \text{ (ohybový moment)}$$

kde  $a, b, c$  jsou rozměry cihly (viz obr. 1),  $F$  síla, kterou působíme na cihlu,  $\sigma_{\text{mez}} = 22 \text{ MPa}$  je pevnost cihly (maximální tečné napětí, které cihla vydrží). Průřezový modul  $W_0$  a ohybový moment  $M$  jsou určeny vzorci výše. Z těchto vzorců vyjádříme sílu potřebnou k rozbití cihly:

$$F = \frac{2\sigma_{\text{mez}}bc^2}{3a},$$

což číselně pro cihlu o rozměrech  $a = 25 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $c = 7 \text{ cm}$  a  $\sigma_{\text{mez}} = 22 \text{ MPa}$  dává potřebnou sílu:

$$F = 28 \text{ kN}.$$

Tento výsledek je řádově správný, je však otázkou zda dokáže ruka nárazem vyvinout takovou sílu, aby cihlu zlomila.

*Doc. Pavol Habuda:* Hail — Aúúú...

*Doc. Pavol Habuda* také řešil problém, ve kterém karatista rozbíjí cihlu. Karatista si položí cihlu na dva upevněné trámy a sekne. Ozve se zapraštění a karatistu odváží sanitka (pravděpodobně sám *Doc.* provedl experiment). V opačném případě se zlomí cihla, tak jak to bývá v amerických filmech. *Doc. Pavol Habuda* se dále zabývá tímto případem.

V momentě, kdy karatista udeří rukou do cihly, se cihla a kost začnou deformovat. Vrchní části cihly se zkracují a spodní prodlužují, tj. cihla se *prohýbá*. V okamžiku, kdy spodní vrstva překročí svoji mez pevnosti v tahu, cihla se rozbije. Průhyb cihly  $\Delta h$  (viz obr.2) je závislý na síle  $F$ , která na cihlu působí podle vzorce

$$\Delta h = \frac{Fa^3}{48EI}.$$

Rozměry cihly  $a, b, c$  a síla  $F$  mají stejný význam jako na obr. 1,  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu,  $I$  je plošný moment setrvačnosti (pro cihlu  $I = \frac{1}{12}bc^3$ ) a  $\sigma_{\text{mez}}$  je pevnost cihly v tahu. Když průhyb cihly dosáhne velikosti  $\Delta h_{\text{max}}$ , cihla praskne. Vyjádřeme mezní sílu  $F_{\text{max}}$ , kterou cihla vydrží jako:

$$F_{\text{max}} = \frac{4E\Delta h_{\text{max}}bc^3}{a^3}.$$

Nyní musíme určit maximální průhyb cihly  $\Delta h_{\text{max}}$  z maximálního relativního prodloužení spodní části cihly  $\varepsilon$ . Podle obr. 2 platí následující vztahy:

$$\alpha \frac{c}{2} = \varepsilon a, \text{ (prodloužení spodní části cihly)}$$

$$\frac{\alpha}{2} \approx \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{r^2 - (r - \Delta h_{\text{max}})^2}/r \approx \sqrt{2\Delta h_{\text{max}}/r}, \text{ (Pythagorova věta)}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{\text{mez}}}{E_{\text{cihly}}}$$

Z čehož nám vyjde:



$$\Delta h_{\max} = \frac{\varepsilon a^2}{4c}$$

Dosažením do vzorce pro mezní sílu  $F_{\max}$  dostáváme

$$F_{\max} = \frac{4E\Delta h_{\max}bc^3}{a^3} = \frac{\sigma_{\text{mez}}bc^2}{a}.$$

Číselně pro hodnoty  $a = 25$  cm,  $b = 10$  cm,  $c = 7$  cm a  $\sigma_{\text{mez}} = 22$  MPa,  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Pa vychází:

$$F_{\max} = 43 \text{ kN}, \quad \Delta h_{\max} = 0,07 \text{ mm}.$$

Dále *Doc. Pavol Habuda* zkusil určit rychlost, jakou by se ruka musela pohybovat, aby při nárazu vytvořila sílu 43 kN. Použijeme větu, která říká, že změna hybnosti za čas je rovna síle, která tuto změnu způsobila. Ruka pohybující se rychlostí  $v$  má hybnost  $p = m_{\text{ruka}}v$ . Předpokládejme, že během nárazu na ni působí konstantní síla proti směru původního pohybu tak dlouho, dokud se její hybnost nezmění na nulovou. Tato síla bude zpomalovat ruku konstantním zpomalením  $F_{\max}/m_{\text{ruky}}$  po dráze délky  $\Delta h_{\max}$ , tj.  $\Delta h_{\max} = F_{\max}t^2/2m$ . Společně s rovnicí  $F_{\max} = p/t = m_{\text{ruky}}v/t$  můžeme určit rychlost ruky, potřebnou aby při nárazu vyvolala sílu  $F_{\max}$ :

$$F_{\max} = \frac{m_{\text{ruky}}v}{t}$$

$$\Delta h_{\max} = \frac{1}{2} \frac{F_{\max}t^2}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta h_{\max} F_{\max}}{m_{\text{ruky}}}}.$$

Číselně pro  $m_{\text{ruky}} = 1$  kg a vypočítané hodnoty  $\Delta h_{\max} = 0,07$  mm a  $F_{\max} = 43$  kN vychází potřebná rychlost ruky k rozdrčení cihly

$$v = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

To není mnoho a vypadá to, že lámat cihly může každý. Musíme si, ale uvědomit, že stejná síla jako na cihlu (43 kN) působí i na naši ruku a ne každá ruka snese sílu 43 kN. Z toho plyne, že karatisti nemusí trénovat ani tak ten švih rukou, jako spíše opracovat si kosti, aby byly tvrdé.

*Doc. Pavol Habuda*: Meteoroidy, meteority, meteory



Obr. 3: Plášť lodi s "krátery" po meteoritech

*Doc. Pavol Habuda* se dále zabýval mikrometeority, které představují velké nebezpečí pro vesmírné lodě, protože mohou narušit jejich plášť. Předpokládá, že energie letícího mikrometeoritu se po nárazu z jedné desetiny přemění na teplo, které roztaví plášť. Dále předpokládá, že rychlost šíření

tepla vedením je zanedbatelná, takže po nárazu se na plášti lodě vytvoří kráter, jehož velikost je určena množstvím kovu, který byl roztaven (viz. obr. 1). Krátery nechtě mají tvar polokoule o poloměru  $r$ , a pokud by poloměr kráteru překročil tloušťku pláště  $h$ , dojde k proděravění pláště. *Doc. Pavol Habuda* se pokusil určit, jak velký meteorit musí být, aby proděravěl plášť lodě.

Nechť  $m_0$  je hmotnost meteoritu, hustota  $\rho$ , počáteční rychlost  $v$ , koeficient přeměny kinetické energie na teplo  $k = \frac{1}{10}$ ,  $m$  hmotnost vytaveného kovu z kráteru,  $\rho_m$  hustota kovu pláště lodi,  $c_v$  tepelná kapacita kovu, z něhož je plášť lodi,  $l_t$  skupenské teplo tání pláště lodi,  $\Delta T$  teplota tání pláště lodi minus teplota pláště lodi,  $h$  tloušťka pláště lodi. Aby meteorit prorazil plášť lodě, musí roztavit kov o objemu  $\frac{2}{3}\pi h^3$  (poloviční objem koule), tedy dodat energii  $E = m(c_v\Delta T + l_t) = \frac{2}{3}\pi h^3 \rho_m (c_v\Delta T + l_t)$ . Meteorit má kinetickou energii  $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$ . Tedy za předpokladu, že se jedna desetina kinetické energie přemění na teplo dodané na tavení pláště, platí  $E = kE_k$ . Z toho vychází kritická hmotnost meteoru

$$m_0 = \frac{4\pi h^3 \rho_m (c_v \Delta T + l_t)}{3kv^2}.$$

Pro kamenný meteor  $\rho = 3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $v = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $h = 2 \text{ cm}$ ,  $l_t = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $c_v = 452 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\Delta T = 1800 \text{ K}$ ,  $\rho_m = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  vychází kritická hmotnost meteoritu a jeho poloměr:

$$m_0 = 3,5 \text{ mg}, \quad r_0 = 6,5 \text{ mm}.$$

Z výpočtu plyne, že šestiapůlmilimetrový šutřík letící rychlostí  $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  dokáže zničit vesmírnou loď.

*Tomáš Svatoň*: Ohýbání tyče

*Tomáš Svatoň* vypočítal, jak velkou silou musí člověk ohýbat ocelovou tyč. Aniž by uvedl literaturu, použil vzorců  $\sigma = M/W_0$ ,  $M = \frac{1}{4}Fl$ ,  $W_0 = \frac{1}{32}\pi d^3$ , kde  $M$  je ohybový moment,  $F$  síla, kterou tyč ohýbáme,  $l$  je vzdálenost míst na tyči, kde na ni působíme silou – například ohýbáme-li tyč přes koleno (jako se láme chraští), je  $l$  vzdálenost rukou na tyči,  $W_0$  průřezový modul,  $d$  průměr tyče a  $\sigma$  pevnost oceli v ohybu (zde  $\sigma = 400 \text{ MPa}$ ). Z těchto veličin vyjádřil sílu jako

$$F = \frac{\pi d^3 \sigma}{8l},$$

tj. pro ohýbání tyče o průměru  $1 \text{ cm}$  při uchopení rukama  $130 \text{ cm}$  od sebe mu vyšla potřebná síla  $F = 120 \text{ N}$ .

*Mgr. Zdeněk Dvořák*: Rozbití atomu olova

*Mgr. Zdeněk Dvořák* se zajímal o to, jak velkou silou bychom museli udeřit desetikilovým kladivem do olověné destičky (konkrétně izotop  $^{208}\text{Pb}$ ) za předpokladu, že veškerá energie dodaná destičce nárazem kladiva bude předána jádrům atomů olova. Uvádí, že k rozbití jednoho atomu potřebuje stejné množství energie, jako je vazebná energie jádra připadající na jeden nukleon.

Z hmotnostního schodku určil vazebnou energii jádra jednoho atomu olova:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n + Zm_e - A_r m_u = 4,222 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$E_{\text{vaz}} = \Delta mc^2 = 3,795 \cdot 10^{-10} \text{ J},$$

kde  $\Delta m$  je hmotnostní schodek jádra atomu olova,  $Z$  protonové číslo olova,  $A$  nukleonové číslo olova,  $m_p$  hmotnost protonu,  $m_n$  neutronu,  $m_e$  elektronu,  $m_u$  atomová hmotnostní jednotka a  $E_{\text{vaz}}$  vazebná energie jádra atomu olova.

Na jeden nukleon tedy připadá vazebná energie  $E_0$ :

$$E_0 = \frac{E_{\text{vaz}}}{A} = 1.825 \cdot 10^{-12} \text{ J}.$$

*Mgr. Zdeněk Dvořák* se ale nespokojil s rozbitím pouhého jednoho atomu olova, ale počítá jak velkou silou musíme výše zmíněným kladivem udeřit do olověné destičky  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 0.01 \text{ mm}$ , aby jsme v ní rozbili všechny atomy. Vyšlo mu, že je třeba dodat energii 60.152 MJ, kterou dostaneme, působíme-li na kladivo o hmotnosti 10 kg po dráze 1 m silou 60 MN. Protože výsledná síla převyšuje možnosti člověka, nedoporučuje tento postup pro průmyslové využití (např. výroba zlata).

**Poznámka redakce.** Na rozbití jádra potřebujeme celou vazebnou energii, ne tedy jen podíl na jeden nukleon.

*Mgr. Zdeněk Dvořák:* Trhání (mono?)krystalů NaCl

*Mgr. Zdeněk Dvořák* se dále zabýval tím, jaká je třeba síla na roztrnutí krystalu NaCl. Ze solného roztoku si vypěstoval tři krystaly, které posléze upevnil za jeden konec a za druhý tahal siloměrem. Po přetržení krystalu změřil jeho průřez. Mez pevnosti krystalu určil jako podíl síly potřebné k přetržení krystalu a plochy průřezu. Z těchto tří měření mu vyšly meze pevnosti krystalů v rozmezí 650–900 kPa. Protože tabulkové hodnoty meze pevnosti krystalu NaCl jsou v řadů desítek MPa, usoudil, že experiment byl tak trochu zcestný.

*Michal Tarana:* Den pro šakala

Michal Tarana věnoval svůj příspěvek destruktivním silám střelných zbraní. Uvádí, že účinnost zbraní obecně klesá se vzdáleností. Poukazuje na zajímavý fakt, citují: „*Ak na niekoho strielate z 1 m, hravo mu ustrielite palici, ale z 10 m to bude iba diera do hlavy (literatúra)*“. Bohužel nepodává vysvětlení tohoto jevu, ani literaturu, z které čerpal.

*Zuzana Kováčiková:* Žena v domácnosti

*Zuzana Kováčiková* formulovala následující úlohu: Mějme čas  $t$ , hrnečky o počtu  $n$  a člověka s adrenalinem na hodnotě  $z$  (jednotku ani definici této nanejvýš zajímavé veličiny autorka neuvádí). Autorka dále uvádí, že z pokusů vyplývá, že člověk je schopný rozbít všechny hrnečky nezávisle na výše uvedených veličinách.

## Téma úlohy 1 – Zahradní sprcha

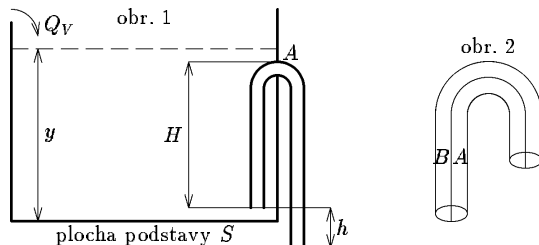
*Doc. Pavol Habuda nám poslal podrobnou analýzu zahradní sprchy. Přibližný přepis jeho myšlenek vám přinášíme v následujícím článku.*

## Odvození podmínek laminárního proudění v trubici

Základní vztah, který používám, je rovnice viskozního tření

$$p = \eta \frac{dv}{dx}, \quad (1)$$

kde  $p$  je tangenciální napětí na rozhraní dvou sousedních vrstev,  $\eta$  dynamická viskozita. Uvažme nejprv, jaké změny nastanou v proudění v místě ohybu. Uvažujme-li laminární proudění (tj. nemůže docházet ke vzniku vířů), je třecí síla kolmá na sílu odstředivou. To znamená, že odstředivá síla nepřispívá k síle třecí, lze ji tedy zanedbat a na místo ohybu se dívat jako na rovnou rouru.



**Poznámka redakce.** Toto tvrzení se mi zdá být příliš odvážným. Rovnice viskozního tření platí samozřejmě i v tomto případě, rozhodně však již rychlostní profil proudění není rotačně symetrický, jak autor níže předpokládá. Představme si rouru rozdělenou na dvě části jako na obr. 2. Pokud by rychlostní profil v části A (blíže k vnitřnímu okraji trubice) a v části B (blíže vnějšímu okraji trubice) byl zrcadlově symetrický (což je nutná podmínka pro symetrii rotační), předbíhala by kapalina v části A kapalinu v části B.<sup>∇</sup> Takový případ však samozřejmě ve viskozní kapalině nastat nemůže. Proto kapalina ve vnější části roury zpomaluje pohyb kapaliny ve vnitřní části roury a tím dochází k deformaci rychlostního profilu a porušení symetrie. Pro velký poloměr ohybu by se však řešení se zanedbáním ohybu mělo blížit řešení bez zanedbání.

Pro rotačně symetrickou trubici platí

$$\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right). \quad (2.1)$$

Výraz na pravé straně nezávisí na  $z$ , můžeme tedy přejít od derivace  $dz/dp$  k podílu  $\Delta p/\Delta z = \Delta p/l$  ( $\Delta p$  je rozdíl tlaků v dvou bodech vzdálených  $l$ )

$$\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{\Delta p}{l}. \quad (2.2)$$

Řešením této rovnice dostáváme

<sup>∇</sup> Analogicky atlet běžící ve vnitřní dráze předbíhá atleta (který má stejnou rychlost) ve vnější dráze.

$$\begin{aligned}\int d\left(r\frac{dv}{dr}\right) &= \int \frac{\Delta p}{\eta l} r dr, \\ r\frac{dv}{dr} &= \frac{\Delta p}{\eta l} \frac{r^2}{2} + A, \\ dv &= \left(\frac{\Delta p r}{2\eta l} + \frac{A}{r}\right) dr.\end{aligned}$$

A odtud

$$v = \frac{\Delta p r^2}{4\eta l} + A \ln r + B.$$

Pro  $r = 0$  musí být rychlost konečná, tedy musí být  $A = 0$ . V místě dotyku s rourou (tj. pro  $r = R$ ) musí být rychlost nulová, proto  $B = -(\Delta p R^2)/(4\eta l)$ . Po úpravě

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (3)$$

Dosaďme nyní za  $\Delta p = h\varrho g$ . Podle vztahu (3) skrz mezikruží s poloměrem  $r$  a šířkou  $dr$  proteče za čas  $t$  kapalina objemu

$$dV = 2\pi r dr \cdot vt = \frac{\pi}{2\eta} \frac{\varrho h g}{l} (R^2 - r^2), \quad (4.1)$$

kde  $h$  je rozdíl výšek dvou bodů. Integrováním této rovnice dostáváme

$$\frac{V}{t} = Q_V = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\varrho h g}{l} R^4, \quad (4.2)$$

kde jsme integrovali od nuly do  $R$  (přes celý poloměr). Veličina  $Q_V$  značí objemový průtok. Toto je známý Hagenův-Poiseuilleův vztah. Zavedme si střední rychlost kapaliny

$$\bar{v} = \frac{Q_V}{S} = \frac{h\varrho g}{8\mu l} (R^2 - r^2), \quad (5)$$

kde  $S$  je průřez trubice. Pro laminární proudění platí, že Reynoldsovo číslo  $Re = (\bar{v}\varrho\bar{l})/\eta$  ( $\bar{l}$  charakteristiky rozměr, zde průměr potrubí). je menší než tzv. kritické Reynoldsovo číslo  $Re_{\text{krit}} \approx 2500$  (zhruba údaje se pohybují od 2000 do 10000).

**Poznámka redakce.** Tato hodnota je možná trochu nadsazená, běžně se bere hodnota  $Re_{\text{krit}} \approx 1000$ . (I když hodnota  $Re_{\text{krit}}$  velmi závisí na tvaru vstupního otvoru, uklidnění kapaliny v nádobě apod. a za vhodných podmínek může dosáhnout až  $Re_{\text{krit}} \approx 20000$ .) Podezření na turbulentní proudění níže bych proto považoval za oprávněné.

Zkombinujeme nyní vztah (5) a vztah pro Reynoldsovo číslo a vyjádříme si poměr  $h/l$

$$\varphi = \frac{h}{l} \leq \frac{4\eta^2 Re}{\varrho^2 R^3 g}. \quad (6)$$

Platí-li tato nerovnost, můžeme proudění považovat za laminární. Dosadíme-li za  $l = 2H + h$  (viz obr. 1), dostáváme

$$h \leq \frac{8H\eta^2 Re}{\rho^2 R^3 g - 4\eta^2 Re}. \quad (7)$$

Dosadme nyní (6) do (4.2) a dostaneme maximální objemový průtok

$$Q_{V\max} = \frac{\pi Re\eta R}{2\rho}. \quad (8)$$

Pozn.: Ve vztahu (7) máme ve jmenovateli rozdíl dvou členů. Ten však musí být větší jak 0, aby měl výraz smysl. Postupným dosazováním zjistíme, že výraz  $\rho^2 R^3 g < 4\eta^2 Re$  se dá upravit na tvar  $l < h$ , což platí vždy.

Experimentálně jsem použil rouru s průměrem 3,5 mm a dvěma 90° koleny. Podle teorie  $h \leq 2$  cm a  $Q_{V\max} = 6,6$  ml · s<sup>-1</sup>. Naměřená hodnota je  $Q = 4$  ml · s<sup>-1</sup>. Už se tu pravděpodobně trochu uplatnilo turbolentní proudění.

### Určení vlivu povrchového napětí

Proti hydrostatickému tlaku působí povrchové napětí, ve vzorci (3) musíme tedy  $\Delta p = h\rho g$  nahradit výrazem  $\Delta p = h\rho g - 2\sigma/\bar{R}$ , kde  $\bar{R} = \int_0^T R dt/T$  je průměrný poloměr křivosti přes dobu vytváření kapky  $T$ . Podle teorie  $\bar{R} \approx \sqrt{2}R$ . Dosadme nyní vztah pro  $\Delta p$  do rovnice (4.2), a dostáváme

$$Q_V = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \left( h\rho g - \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma}{R} \right). \quad (9)$$

Abychom mohli vliv povrchového napětí zanedbat, musí platit

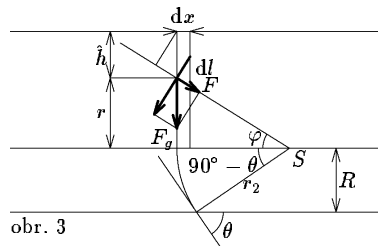
$$h\rho g \ll \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma}{R},$$

neboli

$$h \ll \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma}{R\rho g}. \quad (10)$$

Pro můj pokus vychází po dosazení 2 cm  $\gg$  0,6 cm a tedy určitý vliv má i povrchové napětí. Velká chyba může být způsobena také tím, že  $Q_V$  závisí na čtvrté mocnině poloměru kapiláry, a ten rozhodně není konstantní.

### Určení maximální velikosti poloměru trubice



obr. 3

Největší zátěž na síly povrchového napětí je právě ve vrcholu trubice. Tam totiž povrchová blána odolává hydrostatickému tlaku, který daný vztahem  $p_h = \bar{h}\rho g \cos \alpha$ , kde  $\cos \alpha$  je odchylka tečny k proudovému vláknu od vodorovné osy. Tlak  $p_h$  je největší, je-li  $\cos \alpha = 1$ , neboli  $\alpha = 0$ , tj. tečna je vodorovná s rovinou povrchu Země. Před odtržením od povrchu skla musí platit

$$F_\sigma \geq F_g, \quad \text{tedy} \quad p_\sigma \geq p_h.$$

Po dosazení

$$\frac{2\sigma}{R_z} \geq \bar{h}\rho g \sin \varphi. \quad (11)$$

**Poznámka redakce.** Takto zapsaný vztah považuji za nekorektní. Autor zde porovnává síly různého směru. Ostatně je zajímavé, že  $R_{\max}$  (viz vztah (14) níže) nezávisí na úhlu  $\theta$  (tj. na tom, jak voda smáčí sklo).

Uvážením  $\hat{h} + r = R$ ,  $R = R_z \cos \theta$  a  $r = R_z \sin \varphi$  a úpravami dostaneme

$$\left(1 - \frac{\sin \varphi}{\cos \theta}\right) \sin \varphi = \frac{2\sigma \cos \theta}{R^2 \rho g}$$

(rovnítko použijeme, protože hledáme extrém). Odtud vyjádříme  $R$

$$R = \sqrt{\frac{2\sigma \cos^2 \theta}{\rho g \sin \varphi (\cos \theta - \sin \varphi)}}. \quad (13)$$

Tuto rovnici zderivujeme podle  $\varphi$  a dostaneme následující řešení  $\sin \varphi = (\cos \theta)/2$ ,  $\cos \varphi = \cos \theta$ ,  $\sin \varphi = 0$  a  $\cos \varphi = 0$ . Z těchto řešení vyhovuje pouze  $\sin \varphi = (\cos \theta)/2$ , neboť ostatní řešení dávají  $R$  imaginární, nebo nekonečné. Dosazením získáme

$$R_{\max} = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho g}}. \quad (14)$$

Po dosazení konstant dostáváme  $R_{\max} \approx 7$  mm. V tom případě bude maximální objemový tok  $Q_{V_{\max}} \approx 30$  ml  $\cdot$  s $^{-1}$ . V tom případě čas výtoku bude

$$T = \frac{SH}{Q_{V_{\max}} - Q_V}, \quad (15)$$

kde  $S$  je plocha podstavy nádoby.

V případě, že bude  $Q_V > Q_{V_{\max}}$ , začne stoupat hladina vody nad koleno trubice, začne docházet k turbolentnímu proudění v trubici. Nakonec, při určité výšce, nastane rovnovážný stav.

Je-li výška vody  $y$ , platí pro tlak v místě výtoku  $p = \rho(y + h - H)g - \Delta p$ , kde  $\Delta p$  je ztráta tlaku způsobená třením.

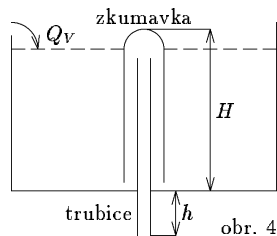
Přítok musí být rovný výtoku, pro který z rovnice kontinuity dostáváme

$$Q_V = \pi R^2 \cdot \sqrt{\frac{2\rho(y + h - H)g - 2\Delta p}{\rho}}. \quad (16)$$

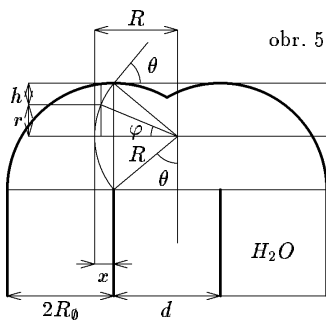
Odtud dostáváme

$$y = \frac{Q_V^2}{2\pi^2 R^4 g} - \frac{\Delta p}{\rho g} + H - h. \quad (17)$$

## Jiný model výtokového zařízení



obr. 4



obr. 5

Obr. 4 znázorňuje ještě jeden model výtokového zařízení, který ještě v M&M nebyl popsán. Zanedbejme tření v zahnuté části zkumavky. Musí se nám zachovávat objemový průtok ve zkumavce i trubici. Počítat objemový průtok v mezikruží pomocí rovnice (2) by bylo velmi složité. Obejdeme tento integrál pomocí triku. Skrz mezikruží i skrz trubice proteče za stejný čas stejný objem vody. Vezmeme-li obalovou křivku vektorů rychlosti v kapalině na průřezu  $S$ , vytvoří nám útvar s objemem  $V$ .

Mějme částice v jedné rovině, která je kolmá na zkumavku. Za čas  $t$  urazí po jednotlivých proudnicích částice délku  $l$  a vznikne nám prostorový útvar, který má velikost úměrnou objemovému toku.

Rovnice tohoto útvaru je dána vztahem

$$r = k_1 v^2 \quad \text{neboli} \quad vt = k_2 \sqrt{r}.$$

Pro střed trubice platí  $r = R_\phi$ ,  $vt = v_{\max} t = \Delta p / (4\eta l) \cdot R_\phi^2$ . Odtud dostáváme

$$k_2 = \frac{\Delta p}{4\eta l} R_\phi^{3/2} t.$$

Celková plocha útvaru je

$$S = 2t \int_0^R k_2 \sqrt{r} \, dr = 2k_2 R_\phi^{3/2} \frac{2t}{3} = \frac{\Delta p}{3\eta l} R_\phi^3 t.$$

Těžiště tohoto útvaru leží na ose  $r$ , tedy vzdálenost těžiště od osy  $o$  je

$$x_T = \frac{d}{2} + R_\phi.$$

Podle druhé Guldinovy věty<sup>◇</sup> dostáváme

$$V = S \cdot 2\pi x_T = \frac{\Delta p}{3\eta l} R_\phi^3 t \cdot 2\pi \left( \frac{d}{2} + R_\phi \right)$$

<sup>◇</sup> Objem tělesa vzniklého rotací plochy je roven obsahu této plochy násobené délkou křivky opsané těžištěm



a objemový průtok

$$Q_V = \frac{\Delta p}{3\eta l} R_0^3 \cdot 2\pi \left( \frac{d}{2} + R_0 \right). \quad (18)$$

Tento objemový průtok je roven objemovému průtoku v trubici, tedy

$$Q_V = Q'_V = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} \left( \frac{d}{2} \right)^4.$$

Porovnáním těchto rovnic dostáváme

$$3d^4 - 128R_0^3d - 16^2R_0^4 = 0. \quad (19)$$

Úpravou

$$3 \left( \frac{d}{4R_0} \right)^4 - 2 \left( \frac{d}{4R_0} \right) - 1 = 0.$$

Tato rovnice má dvě reálná řešení:  $d/(4R_0) = 1$  a  $d/(4R_0) = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{2} - (\sqrt[3]{2})^2 - 1) \approx -0,4425$ . Druhé řešení pochopitelně nemá fyzikální smysl (ani  $d$  ani  $R_0$  nemůže být záporné), tedy

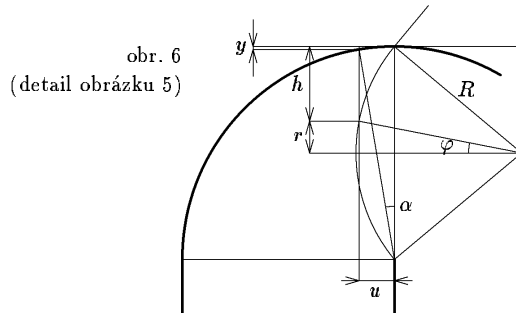
$$d = 4R_0.20$$

Podle obr. 5 platí

$$h_{cg} \sin \varphi = \sigma \left( \frac{\cos \theta}{R_0} + \frac{1}{R'} \right), \quad (21)$$

kde  $R'$  je druhý poloměr křivosti, kolmý na  $R_0/\cos \theta$ . Vztah napravo se jmenuje Laplaceova věta, a říká, že tlak pod zakřiveným povrchem je přímo úměrný součtu dvou navzájem kolmých poloměrů křivosti. Má-li  $R'$  střed na ose procházející středem trubice, potom platí

$$R' = d/2 + x = d/2 + R(1 - \sin \theta). \quad (\times)$$



Dále platí podle obr. 6  $y = 2R_0(1 - \cos \alpha)$ ,  $y + r + h = R_0$ . Také platí

$$u = 2R_0 \sin \alpha = R(\cos \varphi - \sin \theta),$$

kde  $R = r / \sin \varphi$ . Tyto čtyři rovnice sloučíme, a dostáváme

$$R \sin \varphi = R_0 + h = \sqrt{4R_0^2 - R^2(\cos \varphi - \sin \theta)^2}. \quad (*)$$

Do rovnice (21) dosadíme (20) a (\*), a máme

$$h \rho g \sin \varphi = \sigma \left( \frac{\cos \theta}{R_0} + \frac{1}{2R_0 + R(1 - \sin \theta)} \right). \quad (**)$$

Potřebujeme ještě jednu rovnici. Uvědomme si, že podle obr. 5 platí

$$R_0 = R \cdot \sin(90 - \theta) = R \cdot \cos \theta. \quad (***)$$

Dosadíme-li rovnici (\*\*\*) do (\*\*), dostáváme

$$h \rho g \sin \varphi = \frac{\sigma \cos \theta}{R_0} \left( \frac{2 \cos \theta - \sin \theta + 2}{2 \cos \theta - \sin \theta + 1} \right). \quad (22)$$

Na první pohled tento vztah nesedí. Vpravo je totiž pro  $\theta = 0$  nevychází  $\sigma/R_0$ , ale  $\frac{4}{3}\sigma/R_0$ . V tomto případě je tu však ještě podle vztahu (21) další ploměr křivosti, a podle (20) je jeho poloměr  $d/2 + R_0 = 3R_0$ . Také to, že pravá strana (22) je konstantní, je samozřejmé, protože se jedná o rovnovážný stav. Dosadíme do (\*) rovnici (\*\*\*), a vyjádříme  $h$

$$h = R_0 \sqrt{4 - \left( \frac{\cos \varphi - \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2} - R_0 \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} + 1 \right). \quad (23)$$

Rovnice (22) a (23) sloučíme a získáme

$$\sin \varphi \left[ \sqrt{4 - \left( \frac{\cos \varphi - \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2} - \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} - 1 \right] = \frac{\sigma \cos \theta}{R_0^2 \rho g} \left( \frac{2 \cos \theta - \sin \theta + 2}{2 \cos \theta - \sin \theta + 1} \right) = \frac{h}{R_0}. \quad (24)$$

Autor dále uvádí tabulku extrémů této funkce (nalezených numericky) pro některé hodnoty  $\theta$ . Na základě této tabulky usuzuje, že  $R_0$  je maximální pro  $\theta = 90^\circ$ .

Pro  $\theta = 90^\circ$  však vychází nekonečný poloměr. Podle tohoto modelu by např. kolmá stěna vody neměla klesat, což je samozřejmě nesmysl. Kdybychom rovnice (11) a (21) psali bez  $\sin \varphi$  (a v tomto případě bychom vyhověli Pascalovu zákonu), vypadala by rovnice (13) takto

$$R = \sqrt{\frac{2\sigma \cos^2 \theta}{\rho g (\cos \theta - \sin \varphi)}}.$$

Tato funkce má extrémy  $\cos \theta = \sin \varphi$  (ten nedává konečné  $R$ ) a  $\cos \varphi = 0$  (z podmínky  $\varphi \leq 90^\circ - \theta$  by muselo být  $\theta = 0^\circ$  a opět nedává konečné  $R$ ). Problém bude pravděpodobně způsoben chybným předpokladem, že menisky mají kruhové průřezy. Ve skutečnosti meniskus není ani koule ani anuloid, ale složitější křivka. Je otázkou, jestli to vadí pro vypočtené hodnoty.

Otázkou je i to, zda se voda vlivem kapilarity dostane až do polohy, kterou zobrazuje model. Bude-li voda stále přitékat, určitě v jistém okamžiku může nastat situace, že povrch hladiny v nádobě bude nad horní částí roury, a kdyby nemohlo nastat odtržení, kapalina by danou polohu dosáhla.

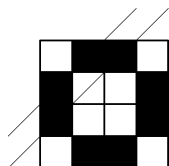
Rozhodl jsem se, že za maximální poloměr budu brát hodnotu  $R_0 = 7$  mm. (Autor tak činí na základě zde pro rozsáhlost neuvedené tabulky.)

## Úloha 7 – Plusy a mínusy

V zadání úlohy bohužel nebylo přesně definováno slovo *diagonála*; slovy *nemusí to být nutně hlavní diagonála* bylo míněno, že použít můžeme všech 14 diagonál, nikoliv 2 (hlavní a vedlejší). Velká část řešitelů uvažovala, že diagonály jsou jen dvě, a odpověděla správně, že úloha nemá řešení. Zajímavé je, že úloha nemá řešení ani v případě, kdy můžeme měnit libovolně všech 14 diagonál. Důkaz je trochu složitější, ale nepostrádá elegancí.

Důkaz neexistence řešení provedeme použitím vhodného *invariantu*. Slovo invariantní znamená nemění se – najdeme v úloze takovou lehce rozpoznatelnou veličinu, která se provedením libovolné povolené úpravy nezmění. Pokud bude hodnota této veličiny v počátečním a koncovém stavu různá, zřejmě není možné libovolnou posloupností tahů dojít z jednoho stavu do druhého.

Do této veličiny rozhodně nebudeme zahrnovat rohová políčka, neboť tato můžeme bez ovlivnění ostatních políček snadno invertovat podle diagonály délky 1 procházející rohem. Podobně bychom zjistili, že stejně tak nás nezajímají ani 4 prostřední políčka. Budeme tedy uvažovat jen 8 nerohových políček podél obvodu čtverce (viz. obrázek 1). Snadno nahlédneme, že invertováním libovolného sloupce či řádku zasáhneme vždy právě 2 políčka. Také všechny diagonály splňují podobnou podmínku: buď tento útvar nezasáhne vůbec (rohové a středové) nebo ho protne v právě 2 bodech.



Tedy počet změn v tomto útvaru po provedení libovolné povolené úpravy je sudý. Toho můžeme využít, vzpomeneme-li si na násobení  $-1$ . Vhodným *invariantem* tedy může být součin znamének v tomto útvaru. Po provedení změny se obrátí buď 2 znaménka nebo žádné, takže jejich celkový součin se nezmění.

Podívejme se na počáteční pozici: útvar obsahuje 7 znamének  $+$  a 1 znaménko  $-$ , součin je tedy  $-$ . Nicméně koncová pozice je složena z 8 znamének  $+$ , jejichž součin je  $+$ , takže není možné se do této pozice povolenými úpravami dostat.

## Téma úlohy 7 – Tabulka velikosti $n \times n$

*Pavel Moravec:* Není vyloučeno pro  $n$  liché

Autor uvažuje pro sudá  $n$  stejné řešení jako je řešení úlohy. Řádkové a sloupcové úpravy mění buď 2 nebo  $n - 2$  znamének (což je také sudé), diagonální úpravy mění opět dvě znaménka nebo žádné. Takže ani u obecné tabulky rozměru  $2k \times 2k$  nelze opačné znaménko na pozici  $[1, 2]$  obrátit.

Pro liché  $n$  tato metoda nemá smysl, mimo jiné proto, že  $n - 2$  není sudé číslo. Pro důkaz neexistence řešení by bylo nutné zkontrolovat jiný *invariant*.

Zdeněk Dvořák: Teoretická úvaha nad obecným řešením

Tento příspěvek popisuje algoritmus, který pro libovolnou tabulku  $Z$  typu  $n \times n$  nalezne posloupnost tahů  $T_k$ , které ji vynulují. Samozřejmě pouze tehdy, je-li to možné. Bohužel z příspěvku neplyne, dá-li se takto vyřešit zadaná tabulka rozměru  $(2k+1) \times (2k+1)$ .

Při výpočtu možných stavů tabulky stačí každou možnou operaci provést jednou nebo vůbec, protože dvojnásobným použitím jednoho tahu se tento vyruší. Ke každému povolenému tahu přísluší binární vektor čísel  $\{0, 1\}$  o  $n^2$  prvcích, který obsahuje jedničky na těch místech, kde invertuje znaménka. Tabulku rozměru  $n \times n$  přečísľujeme na čísla  $1, 2, \dots, n^2$  takto:  $[i, j] \rightarrow n \cdot (i-1) + j$ .

Tyto transformační vektory si označím jako  $T_k$ . Zadáním úlohy je vlastně vyjádřit vektor  $Z$  obsahující popis koncového stavu tabulky (zde je tento vektor nulový, pouze na jedné dané souřadnici  $[i, j]$  je 1) jako lineární kombinaci (modulo 2) těchto vektorů  $T_k$ .

- i. je-li  $n = 1$ , je úloha triviální
- ii. je-li  $Z_1 = 0$  a  $(\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}) T_{k,1} = 0$  (tedy první políčko není nastaveno, ani ho žádný vektor nemění), není nutno toto políčko uvažovat a úloha je ekvivalentní úloze pro  $N-1$  prvků  $2, 3, \dots, N$ , kterou řešíme stejným algoritmem
- iii. je-li  $Z_1 = 1$  a  $(\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}) T_{k,1} = 0$ , úloha zjevně nemá řešení, neboť první políčko nelze nijak změnit
- iv. je-li  $Z_1 = 0$  a  $(\exists k_0) T_{k_0,1} = 1$ , pak odečtu  $T_{k_0}$  (v tomto okruhu je odčítání rovno sčítání) od ostatních  $T_k$ , které také splňují tuto podmínku. Nyní provedu stejný obrat jako v bodě (ii.) a vyřeším podobnou úlohu s  $N-1$  prvky  $2, 3, \dots, N$  a s upravenými vektory (samozřejmě i s těmi, které jsme teď nezměnili).  
Existuje-li řešení nové úlohy, existuje i řešení úlohy původní; v odvozeném řešení vynulují čísla  $2, 3, \dots, N$  a protože žádný z modifikovaných vektorů nemá na 1. místě jedničku, nemůže tuto pozici nijak změnit. Nutno dodat, že modifikované vektory jsou lineární kombinací vektorů původních.
- v. je-li  $Z_1 = 1$  a  $(\exists k_0) T_{k_0,1} = 1$ , pak tuto situaci převedu na bod (iv.) odečtením vektoru  $T_{k_0}$  od  $Z$ . Pokud dokážu vyřešit tuto situaci, pak přidáním  $T_{k_0}$  vyřeším i situaci původní.

Takto se z libovolného  $N = n \cdot n$  dostaneme zpětnou indukci až k  $N = 1$  nebo zjistíme už někdy dříve, že úloha nemá řešení.

Tímto algoritmem je možno vyřešit libovolnou tabulku, nemusí nutně obsahovat jedničku na právě jednom místě. Kromě toho tato metoda umožňuje hledat řešení i s netradičními povolenými tahy – nejenom s převrácením sloupce, řádku a diagonály.

**Poznámka redakce.** Z uvedeného důkazu plyne zřejmě, že pokud nalezneme řešení odvozené úlohy, pak umíme vyřešit i úlohu původní. Autor se bohužel vůbec nezmiňuje o opačné straně implikace – tj. jestli z neexistence řešení odvozené úlohy skutečně plyne neřešitelnost úlohy zadané. My totiž vybereme jeden konkrétní vektor  $T_{k_0}$  a řešíme odvozenou úlohu s vektory upravenými podle něj. Nepomohl by nám ale výběr jiného odečítaného vektoru  $T_{k_1}$ ?

## Úloha 8 – Kondenzátor

Tak jsem dle vašich řešení zjistil, že jsem špatně formuloval zadání, za což se vám omlouvám. Nikdo z vás totiž nepochopil úlohu tak, jak jsem ji zamýšlel. Tak, jak jste ji beze zbytku pochopili všichni (došlo deset řešení), byla ale opravdu triviální. Z toho důvodu jsem poněkud snížil bodové hodnocení úlohy; dával jsem body spíš za to, jak precizně bylo řešení formulováno, případně za nějaký zajímavý nápad.

Ted byste možná chtěli vidět nějaké to vzorové řešení. Ale vzhledem k tomu, že ve vašem podání byla úloha velmi jednoduchá a většina z vás ji vyřešila správně, nebudu se s tím nijak moc rozepisovat. Takže jenom stručně: v okamžiku, kdy elektron opouští kondenzátor (jehož desky jsou izolované, což jste ne všichni pochopili), je, jak jste vypočítali, jeho kinetická energie větší než před vltnutím do kondenzátoru. Tento přírůstek kinetické energie je hrazen z potenciální energie v poli kondenzátoru. Na tom opravdu žádný paradox není.

Do příštího čísla se zkuste zamyslet nad tím, jak to mělo být původně. Uvažujme dva časové okamžiky.

1. elektron je *v nekonečnu* před tím, než vletí do kondenzátoru. Jeho kinetická energie je  $\frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2$ , kde  $m$  je jeho hmotnost,  $\vec{v}_0$  jeho rychlost. Energie kondenzátoru je  $\frac{Q^2}{2C}$ , kde  $C$  je jeho kapacita,  $Q$  jeho náboj. Elektron je ale od kondenzátoru velmi daleko, takže jejich vzájemná potenciální energie je nulová (resp. je naprosto zanedbatelná). Takže celková energie soustavy elektron–kondenzátor je  $\frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 + \frac{Q^2}{2C}$ .
2. elektron odletěl po průletu kondenzátorem *do nekonečna*. Kinetická energie elektronu je, jak jste spočítali,  $\frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2 > \frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2$ , energie kondenzátoru je zase  $\frac{Q^2}{2C}$ , protože průletem elektronu se nezmění ani celkový náboj kondenzátoru, ani jeho kapacita. No a vzájemná energie elektronu a kondenzátoru je zase nulová, ze stejných důvodů jako výše.

Když se to všechno sečte, zjistíme, že se celková energie soustavy elektron–kondenzátor opravdu zvětšila. Tak, a teď můžete přemýšlet.

Tomáš

## Úloha 9.1. – Ach ta maturita

Ačkoliv je tento příklad úplně jednoduchý a na úrovni ZŠ, vyřešila ho precizně pouze asi  $\frac{1}{2}$  řešitelů. Možná proto jsme ho sem také zařadili.

Každý žák se hlásí maximálně na jednu školu, tedy buď na jednu ze 3 uvedených nebo na žádnou. Bylo-li na besedě  $n$  žáků a na každou školu se hlásilo  $n - 3$  žáků, pak celkem se někam přihlásilo  $3(n - 3)$  žáků, což ale nemůže být víc než je celkový počet žáků. Víme tedy, že:

$$\begin{aligned} n &\geq 3, \text{ neboť každý zástupce školy řekl: „všichni kromě 3“} \\ 3(n - 3) &\leq n \\ n &\leq 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Okamžitě vidíme, že jediné 2 varianty jsou  $n = 3$  a  $n = 4$ . Obě vyhovují podmínkám úlohy: při první z nich  $n = 3$  se na žádnou školu nikdo nepřihlásil, při druhé z nich  $n = 4$  se na každou školu přihlásil jeden žák a jeden se nepřihlásil nikam.

## Úloha 9.2. – Tři mudrcové

Sešlo se mnoho řešení diskutujících to či ono. Jedním ze správných řešení může být například tato úvaha:

1. Vidím oba dva špinavé mudrce a všichni se smějeme,
2. kdybych já sám byl čistý, pak každý ze zbylých 2 mudrců by viděl tuto jednoho ušpiněného a jedno čistého mudrce,
3. takže by mu došlo, že ten špinavý se směje jemu – přece se nebude smát čistému mudrcovi,
4. a šel by se umýt.
5. No jo, to ale nikdo neudělal, všichni se pořád smějí. Takže já nutně musím být taky špinavý!

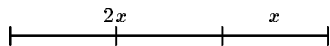
## Úloha 9.3. – Věčný věkový problém

Protože u této úlohy přišlo několik rozdílných řešení a na každém z nich je něco pravdy (převážná většina řešitelů se shodla na jednom výsledku), ale neodpovídají řešení ve sbírce, jsou udělené body úměrně projevené snaze a také srozumitelnosti komentáře k rovnicím (pokud existoval). Pochopitelně poze odhadnuté výsledky odměním minimálně.

Doufám, že alespoň jedno z následujících řešení bude to pravé. Každopádně, pokud objeví kdokoliv chybu v některém z uvedených, může se o svůj poznatek podělit prostřednictvím M&M s ostatními.

**Řešení 1.** Podle sbírky příkladů autorů *Novoveský, Krížalkovič, Lečko: Zábavná matematika, příklad 3.16.*

1. V určitém okamžiku může být jeden dvakrát tak starý jako druhý. Jestliže je v tom okamžiku věk druhého  $x$ , je věk prvního  $2x$ . První je o  $x$  roků starší než druhý. Tento rozdíl se stále zachovává.



2. V jiném okamžiku bude věk prvního tvořit  $\frac{9}{4}$  počtu let, kterého by druhý dosáhl v okamžiku uvedeném pod bodem 1. Úsečka zobrazující věk prvního musí být  $\frac{9}{4}x = 2\frac{1}{4}x$  a druhého bude zase o  $x$  menší, bude tedy  $1\frac{1}{4}x$ .
3. Nynější počet let prvního je  $\frac{15}{16}$  počtu let druhého v okamžiku uvedeném v bodě 2, tj.

$$\frac{15}{16} \cdot \frac{5}{4}x = \frac{75}{64}x.$$

Věk druhého bude zase o  $x$  menší, bude tedy

$$\frac{75}{64}x - x = \frac{11}{64}x.$$

Protože dohromady je jim 8, platí

$$\frac{75}{64}x + \frac{11}{64}x = 86.$$

Z toho  $x = 64$ .

Prvnímu je tedy nyní  $\frac{75}{64} \cdot 64 = 75$  let a druhému  $\frac{11}{64} \cdot 64 = 11$  let.

**Řešení 2.** Podle Dr. Štěpánky Kučkové.

1. Dvěma lidem je dohromady 86 let.  $A + B = 86$ .
2. ... za  $X$  let bude první dvakrát tak starý jako druhý  $(A + X) = 2(B + X) = A_1$ .
3. ... kdyby se druhý dožil věku, který je  $12 \times$  větší než počet let prvního z nich v okamžiku z bodu 2.  $B_1 = 12A_1$ .
4. ... kterého druhý dosáhne, až věk prvního bude tvořit  $9/16$  počtu let z bodu 3.  $B_2 = (\frac{9}{16}B_1 - A) + B$ .
5. Počet let jednoho z nich tvoří  $\frac{15}{16}$  počtu let, ...  $A = \frac{15}{16}B_2$ .

Vyřešme tuto komplikovanou přes několik řádků se táhnoucí rovnici:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{15}{16} \left[ B + \left( \frac{9}{16} \cdot 12 \cdot (A + X) - A \right) \right] & A + X &= 2B + 2X & A + B &= 86 \\
 A &= \frac{15}{16} \left[ 86 - A + \frac{27}{4} (A + A - 2(86 - A)) - A \right] & A - 2B &= X \\
 A &= \frac{15}{16} \left[ 86 - 2A + \frac{27}{4} (4A + 172) \right] \\
 A &= \frac{15}{16} [25A - 1075] \\
 16A &= 375A - 16125 \\
 16125 &= 359A
 \end{aligned}$$

Jednoduchým podělením zjistíme, že  $A \doteq 44.916$  a  $B \doteq 41.084$  let.

S ostatními řešeními nevím, zda mám souhlasit a možná by se k nim dalo všeobecně podotknout – pozor na přepočítání věků, tj. když je např. druhému o 5 let více, tak musím s věkem prvního také počítat, jako by mu bylo o 5 let více v okamžiku, kdy sestavuji pro oba najednou nějaké rovnice.

Dokonale (ač asi neúmyslně) zamlžil své řešení *Pavel Moravec*, takže ač nedospěl k výsledku, který byl uvažován jako správný (neboť byl „demokraticky zvolen“ naprostou většinou řešitelů), bylo by velmi obtížné najít v jeho postupu chybu.

## Úloha 9.4. – Čtyři čtyřky

Téměř každý řešitel poslal vlastní řešení. Většina z vás se bohužel nesnažila optimalizovat počet a druh matematických operací. Např. operaci *faktoriál* bych považoval za natolik silnou operaci, že bych ji využíval pouze v nejnútnejším případě. V následující tabulce jsou všechna čísla vyjádřena pokud možno co nejjednodušším výrazem. Za nejjednodušší operace jsem považoval  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  a  $/$ . Pokud nebylo zbytl, použil jsem umocňování a  $\sqrt{x}$ . Pouze ve 3 případech bylo nutno použít faktoriál.

Pokud má někdo z vás pocit, že by dokázal čísla 19, 27 a 29 dále zjednodušit, napište nám to. Jsem si skoro jist, že faktoriál je u těchto čísel holá nezbytnost.

$$\begin{array}{lll}
 0 = 44 - 44 & & \\
 1 = 44/44 & 11 = 44/\sqrt{4 \cdot 4} & 21 = (44 - \sqrt{4})/\sqrt{4} \\
 2 = 4 - (4 + 4)/4 & 12 = (4 + 44)/4 & 22 = 44/(4 - \sqrt{4}) \\
 3 = (4 + 4 + 4)/4 & 13 = \sqrt{4} + 44/4 & 23 = (\sqrt{4} + 44)/\sqrt{4} \\
 4 = 4 + 4(4 - 4) & 14 = \sqrt{4} + 4 + 4 + 4 & 24 = 4 + 4 + 4 \cdot 4 \\
 5 = (4 \cdot 4 + 4)/4 & 15 = 4 + 44/4 & 25 = (4 + 4/4)^{\sqrt{4}} \\
 6 = 4 + (4 + 4)/4 & 16 = 4 + 4 + 4 + 4 & 26 = 4 + 44/\sqrt{4} \\
 7 = 44/4 - 4 & 17 = 4/4 + 4 \cdot 4 & 27 = 4 + 4! - 4/4 \\
 8 = 4 + 4 + 4 - 4 & 18 = 44/\sqrt{4} - 4 & 28 = 44 - 4 \cdot 4 \\
 9 = 4 + 4 + 4/4 & 19 = 4! - (4 + 4/4) & 29 = 4 + 4! + 4/4 \\
 10 = (44 - 4)/4 & 20 = 4(4 + 4/4) & 30 = 4(4 + 4) - \sqrt{4}
 \end{array}$$

Po předchozím úvodu byste asi nevěřili, že pomocí 4 čtyřek je skutečně možno zapsat všechna přirozená čísla. Potřebujeme k tomu ale použít jednu velice silnou matematickou operaci – logaritmus. Vzorec pro zápis obecného přirozeného čísla  $n$  je

$$n = -\sqrt{4} \cdot \log_4 \log_4 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}$$

ve vzorci je za sebou napsáno  $n$  odmocnin. Ověřte.

U tohoto příkladu jsem nedával často plný počet bodů, neboť většina řešitelů používala často operaci faktoriál  $x!$ , která je z nabízených operací „nejsložitější“. Již v zadání jsem zdůraznil, že se čísla mají vyjádřit pokud možno pouze pomocí základních 4 početních operací, teprve v případě, že to nejde, použít složitější operace.

Pouze *Doc. Pavol Habuda* se pokusil nalézt obecný vzorec pro všechna přirozená čísla, bohužel jeho úvahy byly zcestné. *Dr. Ondřej Příbyla* popsal důkladně metodu, která ho vedla k sestrojení tabulky čísel – postupné hledání čísel, které je možno zapsat s použitím  $k$  čtyřek. Začal od jedné čtyřky, pokračoval dvěma, ... až skončil u čtyřech čtyřek.

*Dr. David Holec* zaslal nejdůkladnější příspěvek – program v jazyce Pascal, který toto vyhledávání provede, včetně vytisklého výstupu tohoto programu. Tímto programem byl vlastně proveden důkaz, že některá čísla nelze pomocí základních 4 operací zapsat – jeho program totiž projde postupně všechny možnosti. Bohužel není možno výpis jeho programu přetiskovat, body mu však samozřejmě udělujeme.

SR



**Zadání témat:****7. Kombinatorika a grafy**

Určitě jste se už setkali s pojmem *graf*. Pakliže ne, tak vězte, že je to uspořádaná dvojice  $(G, E)$ , kde  $G$  je množina vrcholů grafu a  $E \subset \binom{G}{2}$  je množina hran grafu. Lidštěji řečeno máme nakreslené nějaké puntíky a některé z nich jsou vzájemně spojeny čarou. Takle definice tedy mluví o neorientovaných neohodnocených grafech.

V jazyku teorie grafů lze nadefinovat spoustu zřejmých pojmů, např. *souvislost*, *cesta*, *kružnice*, *strom*, *izomorfismus*. . . Pro vyloučení nedorozumnění pojmy uvedené v zadání vysvětlím. *Strom* je souvislý graf, který neobsahuje kružnici. *Souvislý graf* je takový graf, ve kterém se lze po hranách dostat z libovolného jeho vrcholu do libovolného dalšího. *Kružnice* je uzavřená cesta, tj. cesta, která začíná a končí ve stejném bodě. Takže ve stromu existuje z každého vrcholu do každého právě jedna možná cesta. *Izomorfismus* je přejmenování vrcholů – dva grafy nazveme izomorfní, pokud lze jeho vrcholy na sebe vzájemně zobrazit (přejmenovat z jednoho na druhý) tak, aby se tímto zobrazením zachovávaly hrany. Např. graf obsahující pouze jednu kružnici je izomorfní sám se sebou při pootočení kružnice. Obecné ověření izomorfismu dvou grafů je obtížný úkol.

Pokuste se napsat článek o některém z těchto témat:

- (i) Popište co největší počet neizomorfních stromů na  $N$  vrcholech.  
*Jinými slovy:* navrhnete postup, kterým bychom mohli nakreslit co nejvíce stromů na  $N$  vrcholech. Ale tyto stromy musí být velice různorodé, nesmějí se lišit pouze pojmenováním vrcholů. Takže např. strom tvořený jednou čarou délky  $N$  je pouze jeden.
- (ii) Zkuste zjistit, kolik existuje stromů na  $N$  vrcholech. Vrcholy si tentokrát očíslijme čísly  $1, 2, \dots, N$  a zajímejme se o všechny stromy, tedy mohou být i vzájemně izomorfní.  
Dva stromy s daným pojmenováním vrcholů jsou tedy shodné, pokud mají i stejné hrany. Pokud si nebudete vědět rady, zkuste napsat alespoň horní a dolní odhad.
- (iii) Navrhnete algoritmus na vybloudění z bludiště. Zde vrcholy jsou křižovatky a hrany cesty mezi nimi. Někde v grafu existuje vrchol, ve kterém je východ, a také určitě existuje mezi vaší startovní pozicí a východem cesta.  
Předpokládejte, že na každé křižovatce leží křída a tudíž jste schopni na libovolnou z cest cokoliv nakreslit. Na druhé straně nemáte žádnou paměť, tedy nejste schopni pamatovat si, odkud jste kam šli. Příchodem na každou křižovatku všechno zapomenete a jste schopni pouze kreslit značky a postupovat podle navrženého algoritmu.  
*Poznámka:* Poněvadž bloudíme na obecném grafu, naprosto nepředpokládejte, že by v něm bylo např. nadefinováno, kde je vpravo a kde vlevo. Pravidlo pravé ruky by stejně nešlo použít, protože bychom se mohli zacyklit.
- (iv) Je dán graf na  $N$  vrcholech, který určitě neobsahuje kružnici délky 4. Kolik může mít maximálně hran?  
*Poznámka:* Neobsahovat kružnici délky 4 znamená, že ať si vezmeme libovolnou čtveřici bodů  $A, B, C, D$ , pak nejsou v žádném pořadí propojeny do kružnice. Graf samozřejmě může obsahovat kružnice délky větší či menší.

**8. Šachovnice**

S šachovnicí je spojena celá řada úloh. Jedna z těch jednodušších je v tomto čísle vlastně obsažena i jako odpočinková úloha. Zkuste raději bádát nad načrtnutými tématy:

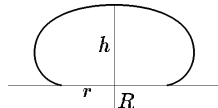
- (i) Na klasickou šachovnici  $8 \times 8$  se dá umístit 8 dam tak, aby se vzájemně neohrožovaly. Tato úloha je notoricky známá, takže vám raději předkládáme úlohu sice podobnou, ale jinou.  
Zkuste umístit na šachovnici co nejméně dam tak, aby každé políčko bylo buď ohroženo nebo aby na něm přímo stála dáma. Jistěže to jde pomocí 8 dam, jak plyne z předchozího odstavce. My bychom však chtěli použít co nejméně dam. Pro šachovnici obecné velikosti  $n \times n$  se pokuste alespoň o asymptotický odhad.
- (ii) Zkuste řešit stejnou úlohu, ale pro jiné šachové figury, např.: pěšce, věže, jezdce, střelce či krále. Všechno samozřejmě obecně pro šachovnici rozměru  $n \times n$ .

## Zadání rekreačních úloh:

### 10. Rtuťová kapka

5b

Na stole leží kapka rtuti (viz obr.). Výška kapky je  $h$ , poloměr křivosti povrchu kapky v jeho nejvyšším bodě je  $R$ . Kapka se dotýká povrchu stolu na plošce tvaru kruhu o poloměru  $r$ . Jaký je objem kapky? Potřebné konstanty si najdete v nějakých tabulkách.



### 11. Vrtulník

5b

Představte si vrtulník. Na to aby se udržel ve vzduchu (tj. aby v něm „visel“), musí jeho motor vyvinout výkon  $P$ . A teď si představte repliku našeho prvního vrtulníku, která je vyrobena ze stejného materiálu, je mu podobná v geometrickém smyslu, jenom je dvakrát menší (tj. všechny její rozměry jsou dvakrát menší a její hmotnost je osmkrát menší než u prvního vrtulníku).

Jaký výkon musí vyvinout motor této repliky, aby také „visela“ ve vzduchu?

### 12. Odpočinkové úlohy

1,2,3,4 b

- (i) Mějme šachovnici rozměru  $8 \times 8$ , ze které je odříznuto jedno rohové políčko, nechť to je  $a_1$ . V protějším rohu šachovnice (tedy na pozici  $h_8$ ) stojí jezdec. Šachový jezdec se může pohybovat pouze skokem, tj. současným pohybem o 2 políčka v horizontálním či vertikálním směru a pohybem o 1 políčko v libovolném z na něj kolmých směrů.  
Je možné, abychom tímto jezdcem obeskákali celou šachovnici tak, abychom na každém políčku byli právě jednou, tj. abychom na žádné nezapomněli a na žádném nebyli víckrát? Po ukončení skákání může jezdec zůstat na libovolném koncovém poli.
- (ii) Zjistěte součet prvních  $n$  členů řady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6} + \frac{1}{2+4+6+8} + \frac{1}{2+4+6+8+10} + \dots,$$

zjistěte také součet celé řady.

(iii) Zjistěte hodnotu výrazu

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}}}$$

Výrazy pod odmocninou pokračují stejným způsobem až do nekonečna.

(iv) Ve firmě *Microsoft* je  $N$  generálních ředitelů. Zdrojové kódy *Windows 98* je nutno kvůli intrikám konkurence uzavřít do trezoru. Poněvadž ani generální ředitelé nejsou velmi důvěryhodní, chtěli bychom, aby se trezor dal otevřít pouze v případě, že s tím bude souhlasit alespoň  $n$  ředitelů. Navrhněte počet zámků  $k$ , počet klíčů  $l$  a způsob rozdělení klíčů mezi generální ředitele tak, aby jejich libovolná  $n$ -tice byla schopna otevřít trezor, ale také aby libovolných  $n - 1$  ředitelů toho už nebylo schopno. Samozřejmě čím méně zámků, tím lépe.

Např. pro  $N = 3$ ,  $n = 2$  vybavíme trezor  $k = 3$  zámky  $A, B, C$ . Vyrobité  $l = 6$  klíčů  $a, a, b, b, c, c$  a rozdělíme je takto: první ředitel dostane klíče  $a, b$ , dvojka dostane  $b, c$  a trojka dostane  $c, a$ . Věřím tomu, že každý z vás zvládne ověřit, že žádný z ředitelů trezor sám neotevře, ale libovolní dva to už dohromady svedou.

Pořadí	Jméno	Škola	$\Sigma_{-1}$	Témata			Rekreačky			Odpočinkové úlohy					$\Sigma_0$	$\Sigma_1$	
				3	5	6	1t	7	7t	8	9.1	9.2	9.3	9.4			9.4t
1.	Doc. Pavol Habuda	4.B,GVOZa	198	0	12		15		2	0	2	0	2	1	34	87	
2.	Mgr. Zdeněk Dvořák	VI.A,GNovéM	32		4			5	6	2	0	2	3	3	25	57	
3.	Mgr. Lenka Zdeborová	3.A,GPlzeň	25	7						3	1	2	2	3	18	43	
4.	Mgr. Robert Vácha	3.A,GJihl	20		3	1		5	4		1	2	2	3	21	41	
5.	Doc. Jan Mysliveček	3.A,GKJB	114		4	3		3	2		1	0		3	16	40	
6.	Mgr. Petr Zima	4.A,GKlad	39												0	39	
7.	Dr. Jan Holeček	3.A,GKJB	94												0	38	
8.	Mgr. Antonín Lejsek	5B/6,GKojc	24						2		0	2	3	3	10	34	
9.	Dr. David Holec	3.A,GKJB	77					3			0	0	3	4	6	16	32
10.	Bc. Jiří Chaloupka	kvinta,GŽidlo	14						3		1	2	3	3	12	26	
11.-14.	Bc. Jan Prokleška	oktáva,B,GZlín	10						3		1	2	2	3	11	21	
	Dr. Ondřej Přibyla	3.A,GKJB	81					3	0			0		4	3	10	21
	Bc. Tomáš Nečas	3.B,GKJB	19		2										2	21	
	Mgr. Karel Kyrián	3.A,GBudč	21												0	21	
15.-17.	Bc. Martin Wokoun	3.A,GKJB	11							1	2	3	3		9	20	
	Pavel Moravec	3.A,GKJB	4					5	2		1	2	3	3	16	20	
	Bc. Martin Netolický	3.B,GMedl	15							1	0		3		5	20	
18.	Vladislav Válek	???	6		1			3			1	1	3	4	13	19	
19.	Dr. Štěpánka Kučková	4.E,GArab	54		3						1	2	3	3	12	18	
20.-21.	Michal Tarana	1.C,GVOZa	5		3			1	1	2	0		3	2	12	17	
	Bc. Václav Kučera	3.A,GSmich	17												0	17	
22.	Bc. Svatava Stehlíková	sexta,GHust	11										3		3	14	
23.	Bc. Jozef Gajdoš	4.A,SPŠS Žil	13												0	13	
24.-25.	Bc. Pavel Augustinský	V.B,GHavíř	11												0	11	
	Bc. Jiří Vábek	kvinta,GŽďár	11												0	11	
26.	Bc. Luboš Dostál	septima,GStřib	10												0	10	
27.	Lenka Kučerová	septima,GJičín	9												0	9	
28.	Dr. Václav Račanský	3.A,GKJB	87												0	8	
29.	Kristína Kováčiková	4.,GNovéM	0	2	2			0			0	0		3	7	7	
30.-33.	Peter Hunana	4.,GBystr	5												0	5	
	Alena Kovárová	3.A,GBlava	5												0	5	
	Karel Honzl	3.,GPodb	5												0	5	
	Juraj Fedor	4.,GBystr	5												0	5	
34.-38.	Lucie Petráčková	4.L,GStraš	4												0	4	
	Tomáš Svatoň	1.,SPŠStav	1		3						0				3	4	
	Miroslav Černý	3.,GKutn	4												0	4	
	Andrea Svinková	?,GUHr	4												0	4	
	Mgr. Jarmila Mulačová	4.,GMIBol	29												0	4	
39.	Braňo Bača	4.,GDubni	3												0	3	

Uzávěrka posledního čísla M&M je 20. května 1998.

Adresa redakce je:

Robert Špalek B1506  
VŠK 17. listopadu  
Pátkova 3  
182 00 Praha Holešovice