

STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXXII

Číslo 4



MATEMATIKA

FYZIKA

INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

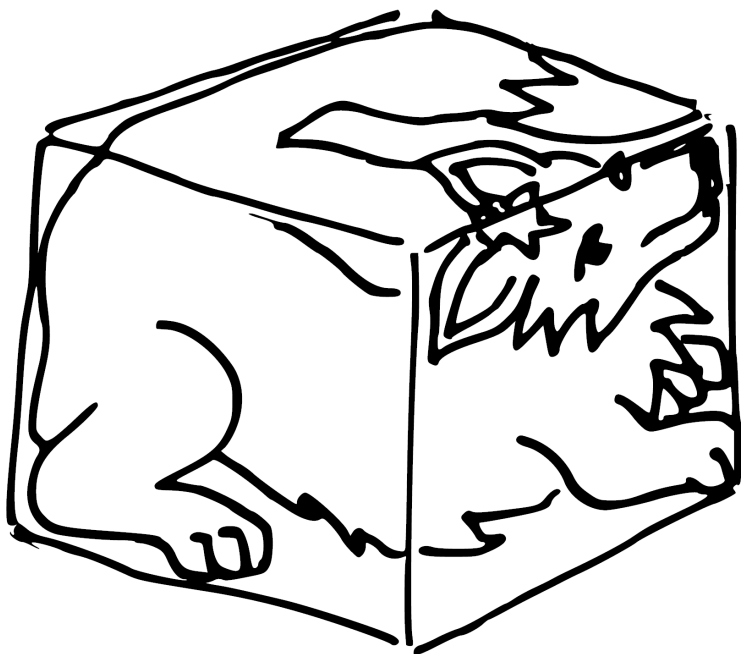
školní rok se nám překulil do druhé poloviny a spolu s ním i celém M&Mko. Vánoční víkendovka už je za námi, příprava jarního soustředění v plném proudu a vy držíte v rukou už čtvrté číslo našeho časopisu. Co najdete uvnitř?

S velkou slávou se vrací tématko *Grupy*, opět oděno ve fyzikálním hávu. Kdo se bojí kvantovky, nesmí do lesa symetrií (leda že by byl velmi odvážný). Pokud jste se s prvním dílem tématka *Kombinatorika* naučili počítat, určitě nesmíte minout díl druhý. Dozvíte se, jestli jste to minule spočítali správně, ale hlavně získáte dovednost pro matematika ještě zásadnější – totiž jak nepočítat. Informatická archeologie bude také pokračovat, proto si nachystejte své závorky. Téma *LISP* přichází s meta-programováním v podobě *maker*! A konečně *Šifrovací* tématko se strategickým číslem 26 vám přináší (kromě řešení z minula) další sadu důmyslně promyšlených šifer od ostatních řešitelů.

Tématka *Brainfuck*, *Výpočetní geometrie* a *Elektrostatika* se s námi v tomto čísle rozloučí skrze řešení dříve zadaných úloh a problémů, ať už organizátorská, nebo přímo od vás.

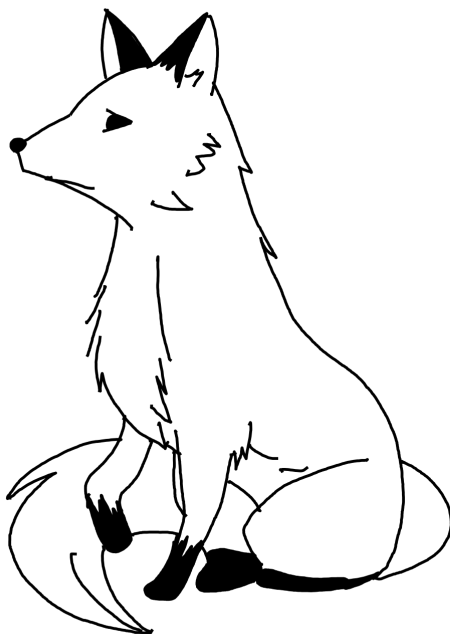
Přejeme příjemné čtení a těšíme se na viděnou!

Vaši orgové M&M



Obsah

Téma 1 – Grupy aneb Kterak matika k souměrnosti přišla.....	4
Téma 2 – Brainfuck	20
Téma 3 – Elektrostatika	21
Téma 4 – Výpočetní geometrie.....	30
Téma 5 – Kombinatorika	33
Téma 6 – LISP	40
Téma 26 – Šifrování	48





Zadání a řešení témat

1. deadline: 24. února 2026 | 2. deadline: 17. března 2026

Téma 1 – Grupy aneb Kterak matika k souměrnosti přišla

Díl 3: Kalibrační teorie

Třetí díl našeho tématka zamýšlí ukovat slibované pouto mezi teorií grup a standardním modelem částicové fyziky. Oním poutem jsou tzv. *kalibrační teorie* (angl. *gauge theories*) – teorie pole, jejichž lagrangián je neměnný vůči lokálním transformacím. Nezoufejte, nečekali jsme, že vyřčenou větu bez pomoci pochopíte. Ihned se jmemme vysvětlit. Podotýkáme však, že – podobně jako v díle minulém – budeme poněkud volně využívat jazyka lineární algebry¹.

Kvantové teorie pole

Ve fyzice značí slovo *pole* fyzikální veličinu, jež je popsána pomocí skaláru, vektoru či tensoru² nabývajících hodnoty v každém bodě časoprostoru. Obvykle budeme, zanedbávající časovou složku, mluvit prostě o hodnotě polí v bodech prostoru. Uvedme pár příkladů.

Polem, jež je popsáno jediným číslem (tedy skalárem), může být například teplota. Lze ji vnímat jako funkci $T(x, y, z, t)$, jež obdrží trojici (x, y, z) souřadnic v prostoru a čas t a vrátí teplotu v daném bodě a čase.

Příkladem vektorového pole budiž proudění vzduchu na povrchu Země. Dívejme se na ně jako na funkci $A(x, y, z, t)$, která každému bodu přiřadí vektor (d_1, d_2, d_3) značící směr větru v bodě (x, y, z) a čase t . Velikost vektoru (d_1, d_2, d_3) pak vyjadřuje rychlost větru.

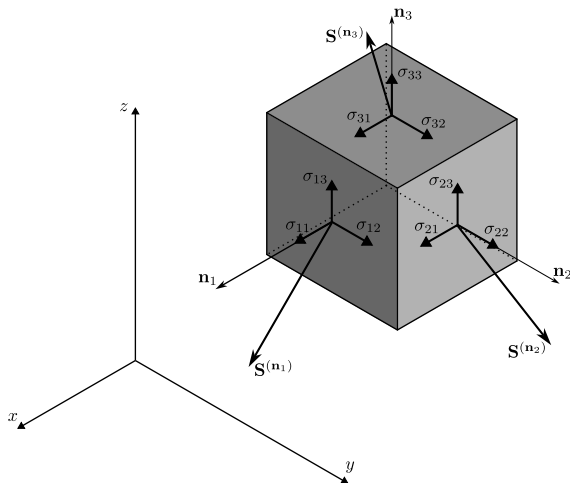
Mezi tensorovými poli najdeme kupříkladu tensor *napětí*. Vyberme si nějaký vnitřní bod tělesa $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a libovolnou rovinu procházející tímto bodem. Tato rovina vlastně „rozřízne“ těleso na dva kusy. Jednotkový vektor kolmý na tuto rovinu (též *normálový* vektor) označme $\mathbf{n}$. Napětí (jako veličinu se směrem a velikostí), které jeden kus tělesa vytváří na druhý kus v bodě $\mathbf{x}$ podél zvolené roviny, můžeme vyjádřit jako vektorové pole $\mathbf{S}^{(n)}(\mathbf{x})$ o třech složkách závislé na vektoru $\mathbf{n}$ (tj. na volbě roviny) a bodu $\mathbf{x}$. Ovšem, tento popis naznačuje, že napětí v bodě $\mathbf{x}$ umíme popsat pouze pomocí nekonečného množství vektorů $\mathbf{S}^{(n)}(\mathbf{x})$ – jeden vektor pro každou jednu rovinu s normálovým vektorem $\mathbf{n}$. Zde přispěchá na pomoc tzv. *Cauchyova věta o napětí*³, která stvrzuje, že stačí znát vektor $\mathbf{S}^{(n)}(\mathbf{x})$ ve třech vzájemně kolmých rovinách procházejících bodem $\mathbf{x}$. Jelikož tři vzájemně

¹Zájemci o tuto stránku matematiky budtež odkázáni na tématko *Vektory a matice* z 31. ročníku.

²O tensorech lze přemýšlet jako o maticích, jejichž prvky mohou být čísla (skaláry) nebo též další matice. Více například zde: en.wikipedia.org/wiki/Tensor.

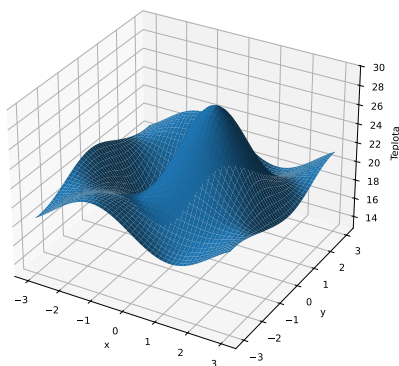
³Detailní popis tensorového pole napětí včetně jeho odvození přes newtonovskou mechaniku hledejte například na engcourses-uofa.ca/books/introduction-to-solid-mechanics/stress/cauchy-sensor-tensor/.

kolmé vektory tvoří *bázi* třídimensionálního prostoru, lze dále odvodit z této věty, že existuje 3×3 matice $\sigma(\mathbf{x})$ nezávislá na $\mathbf{n}$, pro kterou platí, že $\mathbf{S}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$. Řečeno slovy, matice $\sigma(\mathbf{x})$ obsahuje informace o stavu napětí (ve „všech směrech“) v bodě $\mathbf{x}$. Na napětí se pročež můžeme dívat jako na tensorové pole $\sigma(x, y, z, t)$, které danému bodu $\mathbf{x} = (x, y, z)$ přiřadí matici $\sigma(\mathbf{x})$ popisující napětí v tomto bodě v čase t . Tušíme, že tento odstavec byl velmi objemný. Kéž zmatení zmírní vizuální doprovod v podobě obrázku 1.

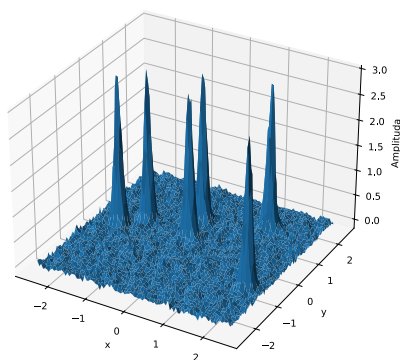


Obrázek 1: Složky tensoru napětí v bodě krychle vzhledem ke třem vzájemně kolmým rovinám (stěnám krychle). Hodnoty σ_{ij} představují složky matice σ .

Nemáme vám za zlé, ctění čtenáři, podezíráte-li nás ze zbytečného obchvatu. Přeci, k čemu nám je popis fyzikálních veličin přes pole, když nás zajímají elementární částice? Částice nejsou veličiny. Či ... jsou? Jako mnoho věcí v kvantové mechanice – jsou i nejsou. Totiž, co přesně nazveme fyzikální *veličinou*? Například teplo intuitivně vnímáme jako „vlastnost“ tělesa, která se může v jeho různých bodech lišit. Špatně udělaný steak je na povrchu horký, ale vevnitř studený. Nicméně, přechod od teplého bodu na povrchu ke chladnému vevnitř je plynulý – na úsečce spojující tyto body teplota klesá postupně, nikdy nárazově. V tomto pojetí leží elementární částice někde mezi svým intuitivním pojetím jako izolovaného bodu v časoprostoru a tepelným polem. Fakt, že elektron (či kterákoli jiná elementární částice) ve hvězdě v galaxii Andromeda je dokonale totožný s elektronem v křovinách parku Stromovka, naznačuje, že v jistém smyslu je každý jednotlivý elektron pouze lokálním „projevem“ mnohem abstraktnějšího objektu: elektronového *pole*, jež prochází celým vesmírem. V rámci jednoduchosti si můžeme představovat, že je v daný čas toto pole nulové všude ve vesmíru vyjma body, kde se nacházejí elektrony. Elektrony jsou pak stabilními výkyvy v tomto jinak v zásadě nulovém poli. Pro srovnání vizte obrázek 2.



(a) Příklad tepelného pole.



(b) Příklad elektronového pole.

Obrázek 2: Rozdíl mezi klasickým a kvantovým polem. Pro přehlednost jsou obě pole vykreslena pouze ve dvou dimenzích prostoru.

Kvantová mechanika s sebou ovšem nese jistý svízel. Elementární částice se nechovají stejně jako tělesa, která jsou vnímána našimi smysly. Totiž, elementární částice obývají několik míst najednou. Teprve jejich sloučení (formálně *superposici*) bychom mohli nazvat „skutečnou polohou“ částice. Jeden oblíbený, přestože nepřesný, přírůbek je ke strunám na kytarě. Každá jednotlivá struna vibruje s rozdílnou frekvencí (výškou tónu) a amplitudou (hlasitostí). Teprve sloučení zvuků všech strun můžeme nazvat „skutečným zvukem“ kytary. Kvantová pole v každém bodě a čase nabývají více hodnot zároveň. Formálně se tento jev modeluje ve fyzice tak, že kvantová pole nabývají *komplexních* hodnot místo reálných. Tato vlastnost kvantových polí bude v dalším textu důležitá jen implicitně; přesto jsme shledali užitečným ji zmínit.

Lokální symetrie a kalibrační pole

Mezi hmototvornými částicemi (fermiony) nacházíme tak zvané *kvarky*. Každý kvark může být jedné ze tří barev – červené, zelené a modré. Této jejich vlastnosti přezdívkově říkáme *barevný náboj* či zkrátka *barva*. Ovšem, jak je možná zřejmé, slovo „barva“ je zde pouze pohodlným vyjádřením faktu, že každý kvark⁴ má vlastnost, jež může nabývat tří různých hodnot. Spojitost s obvyklým pojetím barev je nulová. Tušíme, bohužel, že v makroskopickém světě jen stěží nalézt vlastnost, k níž bychom uměli barevný náboj kvarků přiměřit.

Existence barevného náboje s sebou ihned přináší jistou symetrii. Skutečnost, že je konkrétní kvark červený, zelený či modrý, nemá žádný fyzikální dopad; jedná se o pouhé pojmenování. Důležitý je pouze fakt, že tři kvarky stejného typu

⁴Jednotlivé typy kvarků vyjmenujeme v omezené míře později. Podrobný přehled hledejte třeba v článku <https://en.wikipedia.org/wiki/Quark>.

(tj. tři výkyvy v témže kvantovém poli) mohou být tří různých barev. Přirovnání lze učinit případem elektronu a jeho antičástice (tzv. positronu). Elektron má záporný *elektrický* náboj, zatímco positron má kladný *elektrický* náboj. Ovšem, zda nazveme rozdílný náboj „kladným“ a „záporným“ či „levým“ a „pravým“ či „slaným“ a „sladkým“ je naprosto bezvýznamné. Smyslu nabývá pouze tvrdit, že má-li elektron jistý elektrický náboj, pak positron má ten druhý.

Do prostoru barevného náboje se tato idea přenáší přímočaře. Místo jednodimensionální reálné⁵ přímky, na níž můžeme libovolně číslo označit za elektrický náboj elektronu, sobě představme třidimensionální prostor s osami reprezentujícími každou ze tří zmíněných barev. Za barevný náboj jistého kvarku nyní můžeme zvolit libovolný vektor v tomto prostoru – ten představuje volbu náhodného čísla na každé ze tří barevných os. Jiný barevný náboj stejného kvarku pak bude zkrátka vyjádřen odlišným vektorem v témže prostoru.

Nyní, fakt, že konkrétní hodnota (vyjádřena vektorem) barevného náboje kvarku je irrelevantní, dává vzrůst hned dvěma zdánlivě souvisejícím, ale prakticky odlišným symetriím. Totiž, abychom například z červeného kvarku vyrobili modrý, můžeme celý prostor zrotovat kolem zelené osy. Obecně, rotací můžeme z třidimensionálního vektoru vyrobit kterýkoliv jiný vektor stejné velikosti. Provádíme-li tuto rotaci v každém bodě pole (tedy vlastně rotujeme barevný náboj v celém vesmíru naráz), hovoříme o symetrii *globální*. Příklady globálních symetrií hledejte v předchozím díle tématka; patří mezi ně tamže diskutovaná symetrie translační, spjata se zachováním hybnosti.

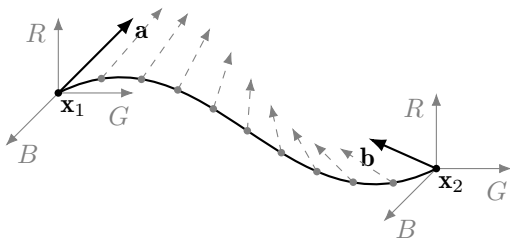
Přestože globální symetrie mají ve standardním modelu své místo, mnohem zajímavější jsou symetrie *lokální*. Kvarky vykazují chování, které si lze jen obtížně představit. Že vlastnosti kvantového pole nezkreslíme pouhým přejmenováním červených kvarků na modré je vcelku přirozené; bdělosti hodné však je, že kvantové pole v každém bodě můžeme **rotovat jinak**! Konkrétně, rotaci v třidimensionálním prostoru lze reprezentovat vhodnou 3×3 maticí. V každém bodě $\mathbf{x} = (x, y, z)$ prostoru volme matici rotace $R(\mathbf{x})$ a barevný náboj kvantového pole nějakého kvarku v témže bodě označme $q(\mathbf{x})$. Kvantová chromodynamika⁶ stvrzuje, že fyzikální vlastnosti pole s barevným nábojem $R(\mathbf{x})q(\mathbf{x})$ jsou dokonale neodlišitelné od pole s nábojem $q(\mathbf{x})$.

Uvědomme si, co přesně existence takové symetrie znamená: hodnoty $q(\mathbf{x}_1)$ a $q(\mathbf{x}_2)$ mohou být ve dvou bodech $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ shodné, ale hodnoty $R(\mathbf{x}_1)q(\mathbf{x}_1)$ a $R(\mathbf{x}_2)q(\mathbf{x}_2)$ rozdílné. Z modrého kvarku se může na jednom místě stát červený a na jiném zelený bez jakékoliv pozorovatelné změny fyzikálního systému, jež obývají. To však neznamená, že by barevný náboj samotný neměl efekt – modrý kvark s červeným interaguje jinak, než se zeleným. Jak se tedy může stát, že výsledek interakce kvarků s náboji $q(\mathbf{x}_1)$ a $q(\mathbf{x}_2)$ je stejný jako interakce kvarků s náboji $R(\mathbf{x}_1)q(\mathbf{x}_1)$ a $R(\mathbf{x}_2)q(\mathbf{x}_2)$?

⁵Z důvodů zmíněných výše obvykle komplexní. Zjednodušujeme za účelem přístupnosti geometrické představy.

⁶Disciplína studující vlastnosti interakce mezi elementárními částicemi přímo souvisejícími s barevným nábojem.

Odpověď zní, že musí existovat způsob, jak porovnat barevné náboje dvou kvarků, přestože lze prostor tří barevných os libovolně otáčet v každém bodě zvlášť. Představme si, že se jeden kvark blíží k jinému podél nějaké trajektorie. Abychom jeho barevný náboj mohli po této trajektorii přenášet společně s ním, musíme mít informaci o tom, co znamená udržovat vektor konstantní vzhledem k dané rotaci barevného prostoru v každém bodě dráhy. Přenosu vektoru podél křivky tak, aby byl v každém jejím bodě konstantní, se v diferenciální geometrii říká *paralelní přenos*. Zjednodušený příklad vizte na obrázku 3, kde se kvark s barevným nábojem $\mathbf{a}$ v bodě $\mathbf{x}_1$ blíží ke kvarku s barevným nábojem $\mathbf{b}$ v bodě $\mathbf{x}_2$. Jsou-li tyto dva náboje z fyzikálního pohledu „stejný“, bude výsledkem paralelního přenosu vektoru $\mathbf{a}$ z bodu $\mathbf{x}_1$ vektor $\mathbf{b}$ v bodě $\mathbf{x}_2$. Za (silného) předpokladu, že barevný prostor rotujeme v jistém smyslu *spojitě* (tedy ve dvou blízkých bodech jsou provedené rotace podobné), můžeme si onen přenos představit jako postupné rotování vektoru $\mathbf{a}$ ve vektor $\mathbf{b}$.



Obrázek 3: Paralelní přenos vektoru barevného náboje $\mathbf{a}$ z bodu $\mathbf{x}_1$ do bodu $\mathbf{x}_2$. Vektor $\mathbf{b}$ v bodě $\mathbf{x}_2$ představuje „stejný“ barevný náboj jako vektor $\mathbf{a}$ v bodě $\mathbf{x}_1$.

Onu „informaci“, jak přenášet vektor podél dané křivky, zakódujeme v podobě tensorového pole T . Bude jím ovšem tensorové pole výrazně složitější, než například tensorové pole napětí zmíněné v předchozí sekci. Totiž, abychom mohli spočítat, kterému vektoru bude odpovídat vektor $\mathbf{a}$ v jistém bodě $\mathbf{x}$ dané křivky, musíme uchovávat informaci o tom, jak se v bodě $\mathbf{x}$ mění každý možný vektor barevného náboje v každém možném směru pohybu (směr pohybu je zde tečný vektor ke křivce v bodě $\mathbf{x}$). Jelikož vektory barevného náboje i pohybu kvarku můžeme vyjádřit vzhledem ke zvoleným bázím (například barevných os pro barevný náboj a souřadnicových os pro 3D prostor) definujeme $T(\mathbf{x})$ vzhledem k těmto bázím jako 3×3 matici, jejíž prvky jsou však opět 3×3 matice. Například, vnitřní maticí na pozici $(1, 3)$ (první řádek, třetí sloupec) vnější matice $T(\mathbf{x})$ bude matice, která vektor ležící na první *barevné* ose otočí tak, jako bychom jej posouvali po křivce, která má v bodě $\mathbf{x}$ směr třetí *souřadnicové* osy.

Tensorovým polím, která umožňují paralelní přenos vektorů po křivkách, se v diferenciální geometrii říká *konexe* a snadněji se představují jako funkce, které dostanou dva vektory a vrátí jeden. V našem případě obdrží vektor barevného náboje a vektor směru pohybu v daném bodě a vrátí vektor představující „stejný“

barevný náboj. Že je takováto funkce ekvivalentní právě popsané matici $T(\mathbf{x})$ zde obhajovat pro úsporu místa, času i duchovní kapacity nebudeme.

Přišel-li vám předchozí odstavec příliš komplikovaný, nebědujte; s tensorovými poli nebudeme potřebovat nic počítat, ani se o nich nijak šířeji zmiňovat. Shrnuto, aby mohl barevný náboj každého kvarku vykazovat lokální symetrii, musí existovat kvantové pole, které v sobě nese informace, díky kterým lze barevné náboje dvou kvarků porovnat s ohledem na provedené lokální transformace. Takovým polím se obecně (tedy i v případě veličin různých od barevného náboje) říká *kalibrační*.

Doufáme, že právě přemýšlujete, k čemu to celé vede. Inu, kalibrační pole nejsou jen výplod nespoutané představivosti teoretických matematiků; mají skutečnou fyzikální podobu, a to právě v podobě *sílonosných* částic! Vskutku, fluktuace kalibračních polí jsou přesně ty částice, jimž fyzikové říkají *kalibrační bosony* a které zprostředkovávají tři ze čtyř tzv. základních sil: elektromagnetismus a slabou a silnou nukleární sílu. Ovšem, v závěru právě učiněné diskuse je snad intuitivně nevhodné uvažovat o kalibračních bosonech jako o nositelích „sil“ – přikláníme se spíše k představě nositelů „informace“. Takže, částice „infony“, „datony“...?

Po velké objížďce putujeme konečně k cíli, kde aspoň zevrubně popíšeme kvantová pole konkrétních elementárních částic a kalibrační pole, jimž lokální symetrie těchto kvantových polí dávají vzniknout.

Elektromagnetismus

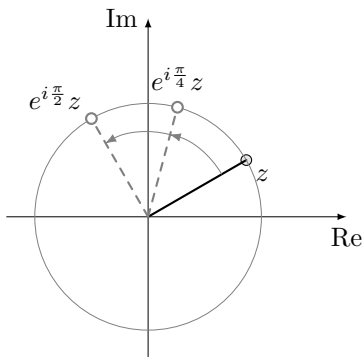
Elektron patří mezi elementární částice zvané *leptony* – hmototvorné částice, které narozdíl od kvarků nemají barevný náboj; mají však náboj elektrický. Všechny elementární částice mají rovněž vlastnost zvanou *spin*, již však s cílem jednoduchosti zanedbáme. Pročež, elektrický náboj budeme vnímat jako jedinou zásadní vlastnost elektronu a elektronové pole pro nás bude komplexní skalární pole značené ψ_e . Připomínáme, že komplexnost pole ψ_e modeluje fakt, že se pole nachází ve „více stavech zároveň“.

Jak jsme nahlédli již v minulé sekci, konkrétní hodnota elektrického náboje je irelevantní, důležitá je pouze schopnost porovnat elektrický náboj dvou částic. Podobně jako barevný náboj, i elektrický náboj vykazuje lokální symetrii vzhledem k jeho změně na libovolné jiné komplexní číslo stejné velikosti. Nahlédneme-li na komplexní číslo $\psi_e(\mathbf{x})$ jako na bod v komplexní rovině, pak všechna komplexní čísla o stejné velikosti leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem právě této velikosti.

Zde bychom rádi přivedli vaši paměť zpět ke grupě $\mathcal{U}_n$ z úlohy 1.5 prvního dílu témátka. Tam jsme zpozorovali, že komplexní čísla $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ všechna leží na (komplexní) kružnici o poloměru 1 a úhel mezi dvěma po sobě jdoucími je přesně $2\pi/n$. Na tento geometrický fakt se dá pohlédnout i jinak: totiž, můžeme spočítat, že

$$e^{i(k+1)\frac{2\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \cdot e^{ik\frac{2\pi}{n}},$$

čili násobení číslem $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ vlastně otočilo číslo $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ o úhel $2\pi/n$. Bez důkazu tvrdíme, že tento argument funguje zcela obecně. Pro libovolné číslo $z \in \mathbb{C}$ a úhel $\theta \in [0, 2\pi)$ platí, že $e^{i\theta}z$ je číslo z otočené o úhel θ . Vizte obrázek 4.



Obrázek 4: Rotace komplexního čísla $z \in \mathbb{C}$ o úhly $\pi/4$ a $\pi/2$.

Nyní už můžeme definovat grupu lokálních symetrií elektronového pole. At $\mathbf{x}$ je jako vždy bod prostoru a $\theta(\mathbf{x}) \in [0, 2\pi)$ je úhel závislý na $\mathbf{x}$. Fakt, že pole lze v každém bodě zvlášť rotovat o libovolný úhel a nezměnit tak jeho chování, znamená, že hodnotu $\psi_e(\mathbf{x})$ můžeme nahradit hodnotou $e^{i\theta(\mathbf{x})}\psi_e(\mathbf{x})$. Snadno ověříme, že pro každý úhel θ má komplexní číslo $e^{i\theta}$ velikost 1 a součin dvou takovýchto čísel má rovněž velikost 1. Z toho plyne, že množina

$$\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$

tvoří grupu vzhledem k běžnému násobení komplexních čísel. Značíme ji $U(1)$. Neformálně na ni můžeme nahlížet jako na grupu, která vznikne z grupy $\mathfrak{U}_n$, když číslo n „pošleme do nekonečna“. Tuto myšlenku podpírá geometrická představa, že kružnice je „mnohoúhelník s nekonečně mnoha vrcholy“.

Právě popsaná lokální symetrie elektronového pole zaručuje existenci kalibračního pole umožňujícího porovnat elektrický náboj dvou částic podél dané křivky. Výkyvům tohoto pole se říká *fotony*, částice světla, a základní síle, kterou zprostředkovávají, *elektromagnetismus*. Tušíme, že představa světla jako „nosiče informace o rozdílnosti elektrického náboje“, bude řadě čtenářů nová.

Ve sledu výsledku Emmy Noether o souvislosti mezi symetriemi a zachovanými veličinami diskutovaném v minulém díle snad není překvapivé, že lokální symetrie elektronového pole s sebou nese zákon zachování elektrického náboje ve smyslu, který právě popíšeme. Totiž, vágní formulace „nemění chování fyzikálního systému“, již jsme v průběhu tématka několikrát použili, má formální paralelu v tvrzení, že lagrangián tohoto systému je neměnný vůči uvažované lokální transformaci. V případě elektromagnetismu onen systém obsahuje elektronové a fotonové pole⁷

⁷Přesnou podobu lagrangianu kvantové elektrodynamiky zde uvádět pro složitost nebude. Lze nalézt na https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_electrodynamics#Mathematical_formulation.

(to označíme písmenem γ), jež spolu interagují. Lagrangián, jak známo, je rozdíl kinetické a potenciální energie systému. Potenciální energie systému závisí na hmotnostní energii částic. Hmotnostní energie elektronu zase závisí na hodnotě $|\psi_{e^-}(\mathbf{x})|^2$, tedy vlastně na absolutní hodnotě čísla $\psi_{e^-}(\mathbf{x})$. Tuto skutečnost je nad rámec tématka plně objasnit; intuici snad trochu pomůže myšlenka, že pod hmotností si obvykle představíme kladné reálné číslo. Zůstává tato hodnota konstantní i po transformaci $\psi_{e^-}(\mathbf{x}) \mapsto e^{i\theta(\mathbf{x})}\psi_{e^-}(\mathbf{x})$?

Vskutku ano. Totiž, pro libovolné komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ platí

$$|z|^2 = \bar{z}z,$$

kde $\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené k z . Je jednoduché spočítat, že $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, a tedy

$$\begin{aligned} |e^{i\theta(\mathbf{x})}\psi_{e^-}(\mathbf{x})|^2 &= \overline{e^{i\theta(\mathbf{x})}\psi_{e^-}(\mathbf{x})} e^{i\theta(\mathbf{x})}\psi_{e^-}(\mathbf{x}) = e^{-i\theta(\mathbf{x})}\overline{\psi_{e^-}(\mathbf{x})} e^{i\theta(\mathbf{x})}\psi_{e^-}(\mathbf{x}) \\ &= e^{-i\theta(\mathbf{x})} e^{i\theta(\mathbf{x})} \overline{\psi_{e^-}(\mathbf{x})} \psi_{e^-}(\mathbf{x}) = \overline{\psi_{e^-}(\mathbf{x})} \psi_{e^-}(\mathbf{x}) = |\psi_{e^-}(\mathbf{x})|^2, \end{aligned}$$

tedy hmotnostní energií elektronu je opravdu neovlivněna. Nabízí se však otázka, čemu odpovídá hodnota $\overline{\psi_{e^-}(\mathbf{x})}$? Inu, představují-li hodnoty $\psi_{e^-}(\mathbf{x})$ elektrony, pak hodnoty pole $\overline{\psi_{e^-}(\mathbf{x})}$ popisují *positrony*, částice s nábojem opačným elektronům. Tím se dostáváme k jádru věci. Totiž, energie systému rovněž závisí na interakci mezi fotonovým polem γ a elektronovým polem ψ_{e^-} . Matematicky se taková interakce projevuje pouhým součinem výrazů závislých na hodnotách obou polí. Ovšem, fotony jsou částice bez elektrického náboje. Aby nedošlo ke změně lagrangiánu vlivem lokální symetrie, musí tento „interakční člen“ obsahovat součin fotonového pole s vhodným výrazem čítajícím stejný počet elektronů i positronů (pro vykrácení čísel $e^{i\theta(\mathbf{x})}$ s čísly $e^{-i\theta(\mathbf{x})}$). Ve skutečnosti nastává nejjednodušší situace – onen součin je právě $\gamma(\mathbf{x}) \cdot \overline{\psi_{e^-}(\mathbf{x})} \psi_{e^-}(\mathbf{x})$ a představuje právě zákon zachování elektrického náboje. Říká totiž, že při interakci elektronu a positronu – dvou částic s opačným elektrickým nábojem – dochází ke zrodu fotonu – částice s nulovým elektrickým nábojem.

Tímto jsme samozřejmě nedokázali, že symetrie $\psi_{e^-}(\mathbf{x}) \mapsto e^{i\theta(\mathbf{x})}\psi_{e^-}(\mathbf{x})$ zachovává lagrangián kvantové elektrodynamiky; to je zcela nad rámec tématka. Pouze jsme poukázali na omezení, jež lokální symetrie elektronového pole klade na členy tohoto lagrangiánu a jejich fyzikální interpretaci.

Slabá nukleární síla

Slabá nukleární síla je interakce přenášena třemi typy bosonů – tak zvanými W^+ , W^- a Z bosony. Její existence je ekvivalentní (nedokonalé) lokální symetrii vlastnosti jak kvarků, tak leptonů, (tedy všech fermionů – hmototvorných částic) zvané *vůně*. Tuto vlastnost nebudeme zkoumat tak podrobně jako elektrický náboj a zůstaneme ve svém vyjádření spíše strozí. Vůně každé částice může nabývat jedné ze dvou hodnot, reprezentujeme ji pročež jako komplexní vektor o dvou složkách. Zde musíme striktně vzato hovořit o neúplné symetrii, neboť existuje

šest různých druhů vůně – tři pro kvarky a tři pro leptony – a hmototvorné částice se dělí na *generace* podle toho, který z těchto druhů mohou vlastnit. Pro jejich seznam vizte tabulku 1. Například kvark první generace může vonět buď *nahoru* nebo *dolů* a jeho kvantové pole je lokálně symetrické vzhledem k záměně těchto dvou hodnot. Avšak, kvarky druhé generace voní *podivně*, nebo *půvabně*. Nemůže se stát, aby kvark druhé generace voněl třeba dolů.

Tabulka 1: Fermiony standardního modelu po generacích vůně.

	I.	II.	III.
Kvarky	u horní d dolní	c půvabný s podivný	t svrchní b spodní
Leptony	ν_e el. neutrino e^- elektron	ν_μ mi. neutrino μ^- mion	ν_τ ta. neutrino τ^- tauon

V úloze 2.2 minulého dílu jsme nahlédli, jak vypadají matice rotací o daný úhel v reálném prostoru o třech dimensích. Dvě jejich vlastnosti jsou významnější než jiné: pro matici rotace R platí $R^T R = I$ a její determinant je roven 1. Pro teď bez důkazu budeme tvrdit, že tyto dvě vlastnosti charakterisují *úplně všechny* matice rotace (o libovolný úhel kolem libovolné přímky) v $\mathbb{R}^3$. Pro nás je klíčové, že v komplexních prostorech lze matice rotací charakterisovat velmi obdobně.

Je-li $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ komplexní matice o m řádcích a n sloupcích, tak k ní *hermitovsky sdruženou* matici definujeme jako transponovanou matici k X , kde každé číslo nahradíme jeho komplexně sdruženým. Značíme ji X^* . Například, je-li

$$X = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -2-2i \\ -i & 3-i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 3},$$

pak

$$X^* = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 2 & 3+i \\ -2+2i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 2}.$$

Na hermitovské sdružení se můžeme dívat jako na paralelu transponování matic v reálných číslech. Velmi mnoho vlastností transponovaných reálných matic se přenáší na hermitovsky sdružené komplexní matice. Jedním příkladem je právě charakterisace rotačních matic. Totiž, matice popisující rotace v komplexním prostoru jsou právě ty matice X s determinantem 1, pro které platí, že $X^* X = I$.

Protože vůně je dvoudimensionální komplexní vektor, její lokální symetrií bude otočení na jakýkoliv jiný vektor stejné velikosti. Z předchozího odstavce známe grupu matic zodpovědných za takové transformace. Značíme ji $SU(2)$. Symbolicky,

$$SU(2) = (\{X \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid X^* X = I \text{ a } \det X = 1\}, \cdot, ^{-1}, I),$$

čili $SU(2)$ je množina komplexních 2×2 matic udávajících rotace spolu s běžným násobením a invertováním matic. Poněkud prostoduše můžeme tvrdit, že

slabá nukleární síla existuje jako důsledek lokální SU(2)-symetrie vůči fermionů. Závěrem vám na mysl přivedeme jedno zajímavé pozorování. Nejmenší možný počet *rodin* generátorů SU(2) je *tři*, jako je i počet různých kalibračních bosonů zprostředkujících slabou nukleární sílu. *Rodinou* (či úplně *jednoparametrickou rodinou*) generátorů zde myslíme množinu matic z SU(2), které závisejí na pouze jednom (komplexním) parametru. Například, celá grupa U(1) je takovou rodinou, neboť každý její prvek lze napsat ve tvaru $e^{i\theta}$, kde onen parametr je právě úhel θ . Dalším příkladem může být třeba množina všech matic

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

pro nějaké reálné číslo a .

Silná nukleární síla

Zákusem tohoto dílu tématka je silná nukleární síla, spjata s lokální symetrií barevného náboje, který jsme již zmínili. V zásadě lze jeho předchozí zhmotnění v předšedším textu přenést plynule sem s tím rozdílem, že barevný náboj kvarků (leptony barevný náboj nemají) je *komplexní* tříslučkový vektor. Lokální symetrií barevného náboje je rotace tohoto vektoru na kterýkoliv jiný o stejné velikosti v každém bodě zvlášť. Jako v případě slabé nukleární síly, i zde takovou transformaci popisují komplexní matice X – tentokrát 3×3 – jejichž determinant je roven 1 a splňující $X^*X = I$. Grupě takových matic darujeme symbol SU(3). Není již nic, co bychom si přáli o barevném náboji vyřknout a neučinili jsme tak již dříve. Jedině snad ponoukneme vaše cenné šedé buňky mozkové informací, že SU(3) lze generovat osmi jednoparametrickými rodinami matic – takový je i počet různých částic silné nukleární síly, tzv. *gluonů*.

Matematická formulace standardního modelu

Vzhledem k objemu tohoto dílu nám přijde záhodno učinit jisté závěrečné shrnutí, než standardní model částicové fyziky nadobro i nazlo opustíme. Elementární částice dělíme na hmototvorné (fermiony) a silonosné (mezi nimi kalibrační bosony). Vlastnosti fermionů vykazují jisté významné lokální symetrie, které lze vysvětlit existencí kalibračních polí zprostředkujících interakce mezi fermiony. Částicím těchto polí říkáme kalibrační bosony a jsou zodpovědné za tři ze čtyř základních interakcí či sil. Když fyzikové hovoří o „matematické formulaci“ standardního modelu, obvykle mají na mysli kartézský součin grup

$$U(1) \times SU(2) \times SU(3),$$

který v sobě nese téměř úplnou informaci o lokálních symetriích fermionových polí. Elektrický náboj leptonů je lokálně U(1)-symetrický, což garantuje existenci fotonů – částic světla. Vůně kvarků i leptonů zase vykazuje SU(2)-symetrii a dává vzniknout W^+ , W^- a Z bosonům, nositelům slabé nukleární síly. Konečně, barva kvarků je lokálně SU(3)-symetrická a interakci, kterou přidružených osm typů gluonů umožňuje, zverne silnou nukleární silou.

 Úloha 4.1 [3b]: *Dokažte, že*

$$\mathrm{SU}(n) = (\{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^*X = I \text{ a } \det X = 1\}, \cdot, {}^{-1}, I),$$

je opravdu grupa. Smíte použít kterýchkoliv vlastností matic a jejich determinantů z tématka Vektory a matice z předchozího ročníku.

 Úloha 4.2 [až 12b]: *V sekci o slabé nukleární síle jsme tvrdili, že $\mathrm{SU}(2)$ lze generovat třemi rodinami komplexních 2×2 matic. Postupně vás provedeme důkazem tohoto tvrzení. Rozdělili jsme jej na části, abyste si mohli zvolit, kterým se hodláte věnovat. Za jednotlivé části lze získat body zvlášť.*

1. Dokažte, že každá matice $X \in \mathrm{SU}(2)$ lze napsat ve tvaru

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

pro komplexní čísla $a, b \in \mathbb{C}$.

(a) [1b] Předpokládejte, že X je obecná 2×2 komplexní matice, čili

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

*a rozepište, které všechny rovnosti pro čísla $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ plynou z podmínek $X^*X = I$ a $\det X = 1$. Nezapomeňte, že $z\bar{z} = \bar{z}z = |z|^2$ pro jakékoli $z \in \mathbb{C}$.*

(b) [1b] Upravte rovnost $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ plynoucí z $X^*X = I$ tak, aby obsahovala pouze čísla b a c . Doporučujeme využít rovností $\det X = 1$ a $|c|^2 + |d|^2 = 1$.

(c) [2b] Odvoďte, že $c = -\bar{b}$. Nabízíme tři pomůcky. Platí $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ pro jakékoli $z \in \mathbb{C}$, kde $\mathrm{Re}(z)$ je reálná část čísla z . Když si už nebudete vědět rady, jak výraz dále upravit, doporučujeme čísla b a c přepsat do „algebraického“ tvaru $x + iy$. Konečně, $c = -\bar{b}$ právě tehdy, když $\mathrm{Re}(c) = -\mathrm{Re}(b)$ a $\mathrm{Im}(c) = \mathrm{Im}(b)$, kde Im pro změnu značí část imaginární.

(d) [1b] Znovu využijte rovnosti $X^*X = I$ a výsledku z (c), abyste dokázali, že $d = \bar{a}$.

2. [1b] Vezměme úhly $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ a uvažme dvě rodiny matic:

$$Z(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad Y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že $Z(\alpha)$ i $Y(\beta)$ jsou matice z $\mathrm{SU}(2)$ pro každé α, β . Argumentujte, že jejich součin je též matice z $\mathrm{SU}(2)$.

3. [2b] Ukažte, že každá matice $X \in \text{SU}(2)$ lze zapsat jako součin tří matic z těchto rodin jako

$$X = Z(\alpha)Y(\beta)Z(\gamma)$$

pro vhodné úhly $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$. Napovíme, že je užitečné použít tvar matice X z bodu 1. a též si uvědomit, že rovnost $|a|^2 + |b|^2 = 1$ klade důrazné omezení na možné hodnoty čísel $a, b \in \mathbb{C}$.

4. [4b] Dokázali byste geometricky interpretovat (s dostatečným komentářem) matice $Z(\alpha)$ a $Y(\beta)$. Co vlastně „dělají“ s dvoudimenzionálními komplexními vektory? Můžeme si posléze nějak představit i jejich součin?

Problém 4.3: Existuje domněnka, že i gravitace, jako čtvrtá fundamentální interakce, je zprostředkována hypotetickými (ve smyslu „nenaměřenými“) bosony, zvanými gravitony. Ty by vznikaly důsledkem lokální symetrie tensoru energie a hybnosti. Hrubě řečeno má tento tensor čtyři složky – tři prostorové a jednu časovou. Lokální symetrie, která jej transformuje, spočívá v rotaci zvlášť prostorové a zvlášť časové, tedy v rotaci, která sice transformuje celý časoprostor, ale prostorové souřadnice se nesmějí „prolnout“ s časovými. Dokázali byste najít grupu takových transformací?

Při řešení problému smíte využít jakékoli online zdroje, dokud je pochopíte a dokázete vysvětlit.

Problém 4.4: Jak jsme v tématku již zmiňovali, počet prvků z jednoparametrických rodin, který je potřeba na vyjádření libovolného prvku z grupy lokálních symetrií dané vlastnosti fermionů, odpovídá počtu bosonů, jež ztvárňují příslušnou fundamentální interakci. Tedy, v případě elektrického náboje, jehož grupou lokální symetrie je $U(1)$, je tímto bosonem pouze částice světla. V případě chutě a $SU(2)$ jsou to tři bosony a v případě $SU(3)$ (kde každá matice lze napsat jako součin osmi matic závislých na jednom parametru) je částic nesoucích silnou nukleární sílu osm. Zkuste tento jev vysvětlit.

Při řešení problému smíte využít jakékoli online zdroje, dokud je pochopíte a dokázete vysvětlit.

Adam, Jáchym; grupytematko@gmail.com
odevzdávejte do odevzdávátka

Řešení 2. dílu

Úloha 1

Zadání:

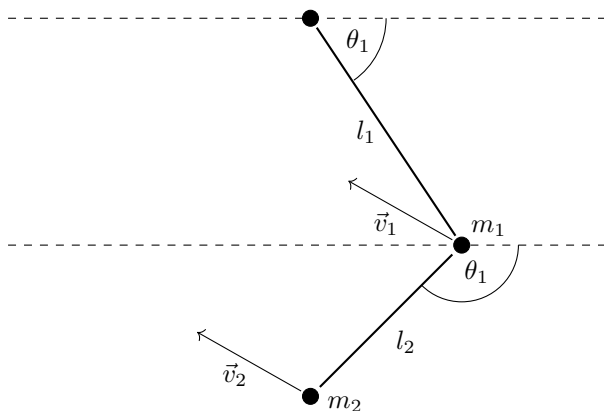
Vymyslete možný konfigurační prostor, který lze použít k popisu fyzikálního systému dvojitého kyvadla⁸, tedy systému, kde je na jednom kyvadle zavěšeno druhé. Nemusíte být rigorózní; stačí uvést množinu s intuitivním objasněním důvodu její volby.

Řešení:

U úloh tohoto typu člověk často rychle skáče k nejjednoduššímu řešení; my se ve jménu konstruktivity pokusíme k řešení probrat podrobněji a ze všech stran. Začneme s co nejvíce informacemi o systému a budeme postupně vyřazovat ty přebytečné nebo neměnné.

Na začátku je také důležité zmínit, že neexistuje jeden nejlepší konfigurační prostor, v praxi bychom z těch možných použili ten nejužitečnější. Toto rozhodnutí můžeme učinit pouze s cílem v mysli, který my postrádáme, a tak jich ukážeme více.

Všechny rozumné veličiny, které můžeme uvažovat v systému o dvou kyvadlech, jsou znázorněné na obrázku 5. Jde o úhly obou kyvadel od vodorovné osy (θ_1, θ_2), délky jednotlivých kyvadel (l_1, l_2), váhy hmotných bodů na konci kyvadel (m_1, m_2) a nakonec rychlosti těchto hmotných bodů ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$).



Obrázek 5: Zajímavé veličiny v systému dvou kyvadel.

Jako první vyřadíme z konfiguračního prostoru všechny konstantní veličiny. V našem případě se jedná o l_1, l_2 a m_1, m_2 . Ty technicky nevyřazujeme **úplně**, stále je potřebujeme pro počítání, ale svojí neměnností napříč stavy konfiguračního prostoru nepřidávají nic zajímavého.

⁸Vizte např. en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum.

Zbyly nám tak dvě dvojice proměnných, o nichž rozhodujeme, zda jsou vhodné pro konfigurační prostor. Dvojice úhlů očividně vhodná je, protože každý stav je touto dvojicí jednoznačně určen. Dvojice rychlostí tuto vlastnost bohužel nemá, ilustrujeme si nejednoznačnost na příkladu: Představte si, že dostanete dvojici rychlostí $(0, 0)$, jak byste nakreslili dvojité kyvadlo? Tak je jasné, že obě kyvadla budou ve svém nejvyšším bodě, ale kde takový bod je? To z dvou nul nezjistíme.

Abychom dostáli svému slibu ukázat více než jeden možný konfigurační prostor, poukážeme na to, že zakončení každého kyvadla určíme jednoznačně jeho souřadnicemi – nějakou dvojicí z $\mathbb{R}^2$. Tyto body máme dva a tak za konfigurační prostor máme $\mathbb{R}^4$.

Ti teorie dimenze znali z vás si určitě povšimli jedné domnělé nesrovnalosti mezi konfiguračními prostory zde přednesenými. Pokud prostor popíšeme pomocí úhlů, má dvě dimenze – je to víceméně $\mathbb{R}^2$, zatímco použijeme souřadnice máme najednou dimenze čtyři. Za tento zmatek v dimenzích si můžeme, jako vždy, sami; v druhém případě máme prostě některé informace navíc a dvě dimenze jsou nedosažitelné. Tento problém můžeme podle rčení „moudřejší ustoupí“ ignorovat, dokud ovšem dostaneme něco nazpět (například průzračnější vzhled do problematiky nebo jednodušší výpočty).

Úloha 2

Zadání:

1. Dokažte, že matice $R_x(\theta)$ je opravdu maticí rotace kolem osy x o úhel θ . Případný obrázek, prosíme, nezapomeňte doplnit rozumným argumentem.
2. Dokažte, že z rovnosti $\mathbf{y} = R_x(\theta)\mathbf{x}$ opravdu plyne rovnost $\dot{\mathbf{y}} = R_x(\theta)\dot{\mathbf{x}}$.
3. Dokažte, že platí $R_x(\theta)^T R_x(\theta) = I$.

Řešení:

1. První zjednodušení celého problému se nalézá v pozorování, že matice $R_x(\theta)$ při součinu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y(\cos \theta - \sin \theta) \\ z(\sin \theta + \cos \theta) \end{pmatrix}$$

nijak nemění x -ovou souřadnici. Což je jednak vlastnost, kterou bychom očekávali, a druhak vlastnost, jež nám dovolí se na problém dívat ve 2D.

Nejdříve si rozmyslíme, jak otočit libovolný vektor ve 2D a poté tento otočený vektor porovnáme s násobením maticí $R_x(\theta)$. Chceme-li otočit vektor $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, stačí otočit vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vynásobit tyto rotace koeficienty y, z a výsledky sečíst.

Z obrázku 6 je jasné, jak dopadne otočení zmíněných vektorů o úhel θ . Následující postup načrtnutý v předchozím odstavci, získáváme jako rotaci

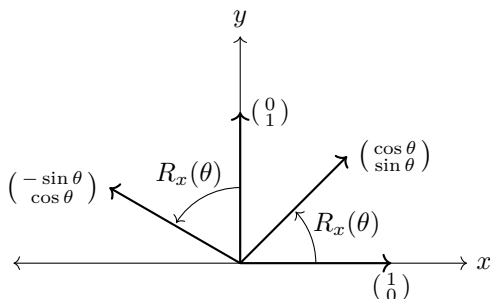


vektoru $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ vektor

$$y \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(\cos \theta - \sin \theta) \\ z(\sin \theta + \cos \theta) \end{pmatrix},$$

což je přesně ten očekávaný výsledek (až na souřadnici x , která ale při rotaci podle osy x zůstává identická).

2. Z rovnice $\mathbf{y}(t) = R_x(\theta)\mathbf{x}(t)$ se k té kýžené dostaneme jednoduchou derivací. Derivace levé strany je triviálně $\dot{\mathbf{y}}(t)$. Pro derivaci pravé strany je důležité si uvědomit, že $R_x(\theta)$ je konstantní a mění se pouze $\mathbf{x}(t)$. Výsledkem je tedy $R_x(\theta)\dot{\mathbf{x}}(t)$.



Obrázek 6: Rotace vektorů $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ o úhel θ .

3. Třetí rovnost dokážeme jednoduše roznásobením součinu $R_x(\theta)^T R_x(\theta)$.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta \\ 0 & -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Úloha 3

Zadání:

Možná jste, sečtělí čtenáři, slyšeli o zákonech zachování jiných veličin než hybnosti. Mezi nimi je například zákon zachování tzv. „momentu hybnosti“⁹. V závěsu

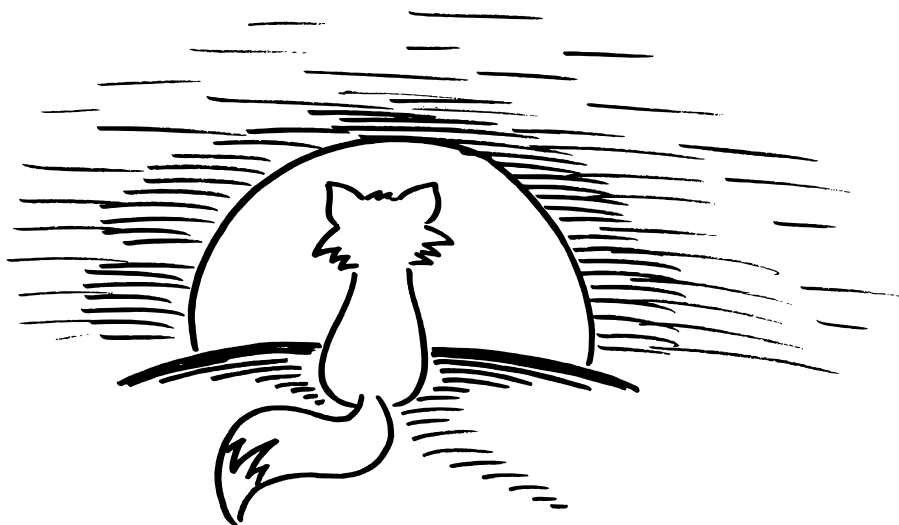
⁹Lze si o něm přečíst např. opět na Wikipedii: cs.wikipedia.org/wiki/Moment_hybnosti.

předchozího textu snad není překvapující, že je i tento zákon ekvivalentní jisté symetrii fyzikálního systému, v němž platí. Nás by zajímalo vědět, která symetrie to je a hlavně (co vám výmluvnost dovolí) proč.

Řešení:

Abychom nemuseli tápat v nekonečnu možných symetrií, pomůžeme si na začátek výzkumu edukovaným tipem. Pokud je moment síly zachován díky translační symetrii a moment hybnosti je rotační obdobou momentu síly, dává smysl se domnívat, že hledáme rotační obdobu translační symetrie – symetrii rotační. Prožřívše touto symetrií symetrií (metasymetrií, chcete-li) přednášíme, výmluvností obdaření, důvod k tomuto důsledku.

Snažíme se odůvodnit, že z rotační symetrie vyplývá zákon zachování momentu hybnosti. Jako už mnohokrát, pomůžeme si obměněnou implikací. Přenesme se tedy do vesmíru, ve kterém neplatí zachování momentu hybnosti. Jinými slovy, existuje nějaký disk, jenž se jen tak sám od sebe začne točit okolo některé osy. Pokud se v takové chvíli pokusíme uplatit rotační symetrii a celý vesmír otočíme podle jiné osy, než podle které se točí náš disk, zjistíme, že neplatí. Došli jsme k jinému výsledku experimentu (disk se najednou z našeho pohledu točí podle jiné osy než předtím) jen na základě rotace celého vesmíru, čímž jsme náš výsledek dostatečně odůvodnili.

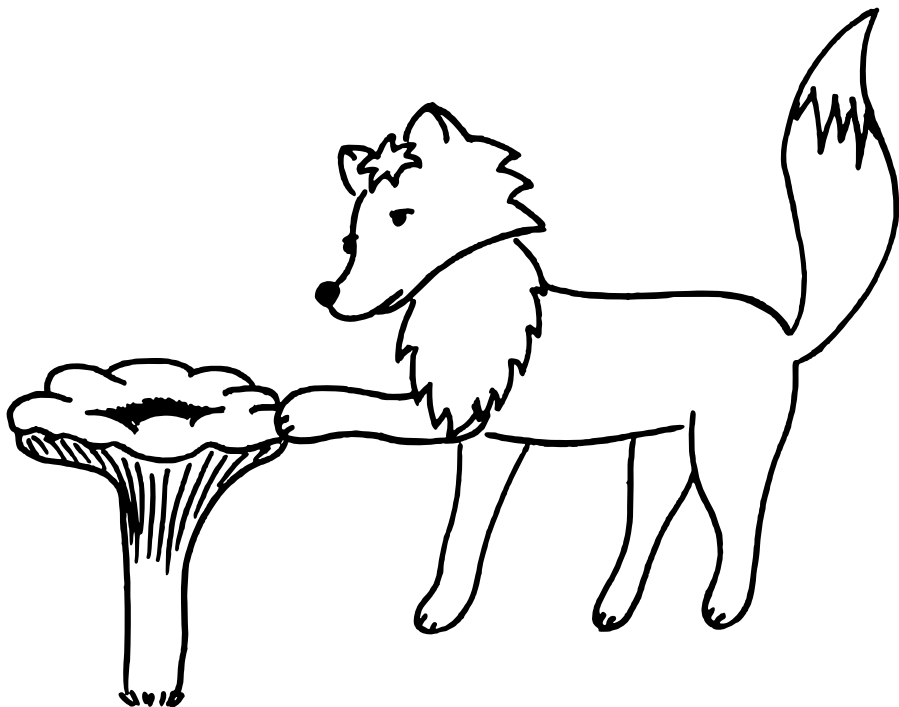


Téma 2 – Brainfuck

Závěr

Během prvních dvou dílů tohoto ročníku jsme se podívali do prapodivného světa ezoterických programovacích jazyků, konkrétně na Brainfuck. Tento na první pohled primitivní jazyk nám ukázal, že se v něm dá vytvořit téměř cokoliv, jak jsme mohli vidět např. v parametrizovaném řešení hry života od Doc.^{MM} Michaela Jarvise. Nakonec bych pro inspiraci rád přiložil řešení vytváření komplexních Brainfuck programů od Bc.^{MM} Lukáše Komy: <https://mam.mff.cuni.cz/media/prilohy/32-4-t2-Koma.zip>.

Vašek; vaclav.tichy.mam@gmail.com



Téma 3 – Elektrostatika

Řešení 1. dílu

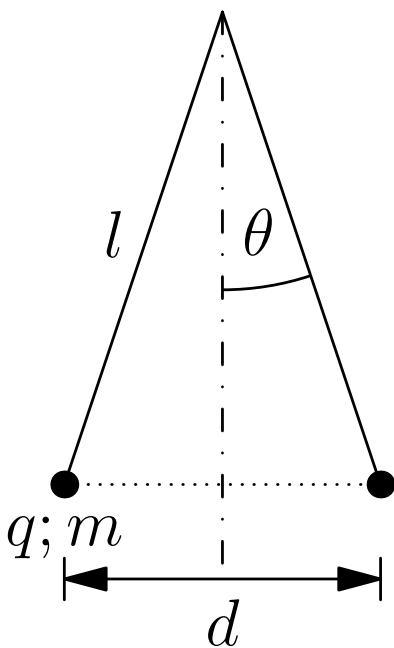
Úloha 1.1

Zadání:

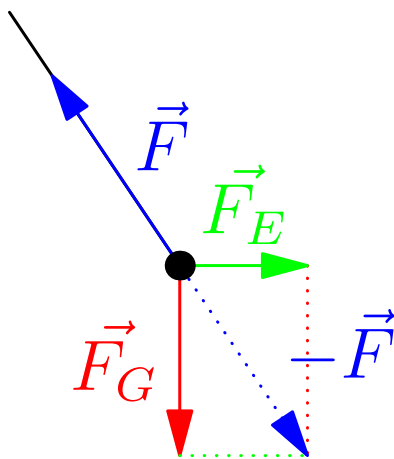
Uvažujme dvě stejně nabité částice s nábojem q a se stejnou hmotností m . Obě jsou zavěšené na nitích o délce l v laboratoři na Zemi. Obě nitě visí ze stejného bodu na stropě laboratoře a v laboratoři je vakuum. V jakém úhlu θ od svislé přímky musí nitě být, aby se soustava nepohybovala? (Tedy alespoň vzhledem k laboratoři.) Stačí nalézt algebraickou rovnici, jejímž řešením bude hledaný úhel, není třeba dopočítávat.

Řešení od Matěje Hoška:

Řešení této úlohy jsem započal nákresem situace.



(a) Nákras situace v laboratoři



(b) Rozbor sil působících na jeden z nábojů

Obrázek 7: Nákras pro úlohu 1.1

Do levého obrázku (7a) jsem si zakreslil situaci v laboratoři: dva hmotné náboje velikosti q a hmotnosti m zavěšené na nitích délky l , mezi kterými se vlivem působení odpudivé síly vytvořila mezera velikosti d a nitě se vychýlily pod

úhlem θ . Do pravého obrázku (7b) jsem si pak nakreslil rozbor sil působících na jeden z nábojů. Symetrická situace nastává i u druhého náboje. Na náboj působí tíhová síla ve svislém směru a elektrická síla ve vodorovném směru směrem pryč od druhého náboje. Jejich výslednice je pak ve směru nitě, její výchylka od svislého směru je tedy stejná jako výchylka nitě. Z pravoúhlých trojúhelníků pak můžeme psát:

$$\sin(\theta) = \frac{d}{2l},$$

$$\tan(\theta) = \frac{F_E}{F_G}.$$

Jelikož rovnice pro elektrickou sílu závisí na vzdálenosti nábojů d , rozhodl jsem se proto si d vyjádřit z první rovnice a dosadit do rovnice druhé. Zároveň si můžeme rozepsat tangens jako podíl sinu a kosinu, jelikož se nám sinus objevuje i v první rovnici.

$$d = 2l \sin(\theta)$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4l^2 \sin(\theta)^2}}{m \cdot g}$$

Nyní ekvivalentními úpravami převedeme $\sin(\theta)^2$ na levou stranu rovnice a úpravou zlomku získáme výslednou rovnici.

$$\frac{\sin(\theta)^3}{\cos(\theta)} = \frac{q^2}{16l^2 mg \pi \epsilon_0}$$

Vztah, který vyšel, není vůbec pěkný. Vykreslíme-li si graf levé strany rovnice, zjistíme, že se chová podobně jako tangens, jen s pomalejším náběhem do asymptoty. Pravou stranu si pak můžeme zkontrolovat úvahou – zvětšíme-li náboj q , zvětší se funkční hodnota našeho „tangentu“, a tedy i úhel a vzdálenost mezi náboji. Zvětšíme-li ale délku nitě l , úhel se naopak zmenší, což je očekávané chování. Zvětšíme-li přeponu a nezměníme-li protilehlou odvěsnu, úhel se zmenší.

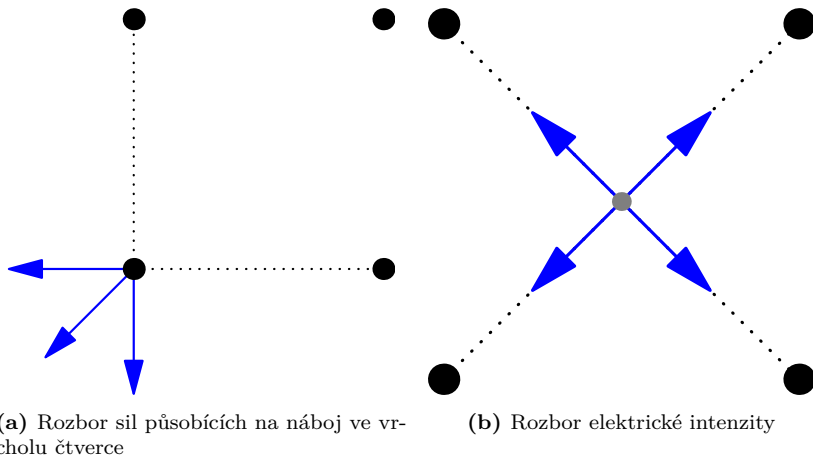
Úloha 1.2

Zadání:

Mějme čtyři stejné náboje v rovině, každý zafixovaný ve vrcholu čtverce se stranou a . Spočítejte sílu působící na každý náboj a elektrickou intenzitu ve středu čtverce. Jaká síla by působila na náboj stejné velikosti, ale opačného znaménka vložený do středu čtverce? Byla by tato poloha stabilní?

Řešení od Matěje Hoška:

Řešení úlohy jsem opět započal nákresem.



Obrázek 8: Náskres pro úlohu 1.2

Začněme situaci v levém obrázku (8a). Na náboj umístěný ve vrcholu působí silami zbylé tři náboje, celkovou sílu tedy můžeme určit jako součet těchto příspěvků. Pro jednodušší znamení budu dále používat Coulombovu konstantu $k = 1/4\pi\epsilon_0$.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = k \left(\frac{q^2}{a^2} \hat{r}_1 + \frac{q^2}{a^2} \hat{r}_2 + \frac{q^2}{2a^2} \hat{r}_3 \right)$$

Jelikož směr součtu vektorů $\hat{r}_1$ a $\hat{r}_2$ má stejný směr jako $\hat{r}_3$, můžeme sečíst síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$, jejichž výslednice pak bude mít stejný směr jako $\vec{F}_3$. Ve skalární formě pak získáme výraz

$$F = k \left(\frac{q^2\sqrt{2}}{a^2} + \frac{q^2}{2a^2} \right),$$

odkud můžeme vytknout q^2/a^2 , čímž získáme výsledek. Výsledná síla pak působí ve směru $\hat{r}_3$, tedy po úhlopříčce směrem ven ze čtverce.

$$F = k \frac{q^2}{a^2} \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

Druhou část úlohy pak můžeme vyřešit jen úvahou – elektrická intenzita ve středu čtverce bude nulová, jelikož se působení všech nábojů vyruší. Čtyři náboje čtverce si můžeme rozdělit do dvou dvojic nábojů ležících proti sobě po



úhlopříčce (8b). Ty pak leží na opačných stranách středu čtverce, jejich příspěvky k elektrické intenzitě tedy musí mít opačný směr. Jejich velikost bude také stejná, jelikož náboje jsou stejné a jsou stejně daleko. Pro rozhodnutí o stabilitě této konfigurace tedy stačí jen rozhodnout o stabilitě nábojů ve vrcholech. Ty budou stabilní za předpokladu, že síla, kterou na ně bude působit náboj ve středu, bude přesně opačná, než síla, kterou na sebe působí navzájem. Podle definice tedy náboj ve středu působí silou o velikosti:

$$F_S = -k \frac{q^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -k \frac{2q^2}{a^2}.$$

Směr nové síly je správný – přidaný náboj leží na úhlopříčce čtverce, síla bude tedy působit ve správném směru. Její velikost je ale jiná, než velikost síly nábojů ve vrcholech. Z obou rovnic pro síly můžeme vytknout Coulombovu konstantu a druhé mocniny náboje a strany čtverce, čímž zjistíme, že po přidání náboje do středu čtverce náboje z vrcholů se přiblíží do středu, jelikož $2 > (1 + 2\sqrt{2})/2$. Přitažlivá síla tohoto náboje je silnější, než odpudivé síly zbylých nábojů.

Úloha 1.3

Zadání:

Uvažujeme kruhový prstenec s rovnoměrnou délkovou hustotou náboje λ a poloměrem R . Jaký je průběh intenzity na ose prstence v závislosti na vzdálenosti od středu? Možná vám připadá problematické, že vztah $\vec{E}_c = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ platí pro bodové náboje. Pro spojitě rozložený náboje budeme postupovat analogicky. Vždy si určíme nekonečně malý element náboje a spočteme příspěvek elektrické intenzity od něj pomocí Coulombova zákona. Následně všechny takové příspěvky posčítáme. Pro výpočet tedy zkuste použít vztah:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r},$$

kde $dq = \lambda dl$ a integrujete od 0 do $2\pi R$. Nezapomeňte, že r^2 je vzdálenost od elementu prstence, ne od středu. Tedy $r^2 = R^2 + z^2$ kde z je vzdálenost od středu. Dejte si pozor na směr $\hat{r}$, protože nebude stejný jako jednotkový vektor ve směru osy. Kam bude výsledná intenzita mířit?

Řešení od Doc.^{MM} Julie Klementové:

Máme kruhový prstenec s rovnoměrným rozložením náboje, jehož element je na kružnici s poloměrem R . Bod pozorování je na ose prstence ve vzdálenosti z od středu. Vzdálenost mezi elementem a bodem je $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Pozorovací bod je na ose, takže pro symetrii se složky kolmé na osu všech elementů vzájemně ruší. Výsledná intenzita má tedy směr podélně na osu prstence, takže ve směru osy z .

Protože symetrické složky se ruší, stačí počítat jen složku intenzity ve směru osy z :

- element intenzity: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2}$
- složka podél osy: $\vec{E}_z = dE \cos \alpha$, kde α je úhel mezi $\hat{r}$ a osou z
- pomocí pravoúhlého trojúhelníku: $\cos \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$
- integrace přes celý prstenec:
 - celkový náboj prstence je $Q = \lambda \cdot 2\pi R$
 - délka elementu prstence je $dl = R d\varphi$, kde $\varphi \in (0, 2\pi)$
 - element náboje je $dq = \lambda R d\varphi$
 - velikost intenzity od elementu je $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\varphi}{R^2 + z^2}$, r^2 je konstantní pro každý element prstence, protože všechny body na kružnici jsou od osy prstence stejně vzdálené.
- složka ve směru osy:

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\varphi}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\varphi}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

- integrace přes celý prstenec:

$$E_z = \int_0^{2\pi} dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi$$

- výsledný vztah:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi\lambda R z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kde $Q = 2\pi\lambda$ je celkový náboj prstence.

Výsledná intenzita směřuje ve směru osy prstence (tj. ve směru osy z). Pokud je náboj $Q > 0$ a $z > 0$, směřuje od prstence.

Úloha 1.4

Zadání:

Jakou silou bude působit dipól o dipólovém momentu $\vec{p}$ na náboj velikosti q v těchto konfiguracích?

1. Dipól je orientovaný v pravém úhlu ke spojnici středu dipólu a náboje.
2. Dipól míří přímo na náboj.



Řešení od Doc.^{MM} Julie Klementové:

1. Dipól orientovaný kolmo ke spojnici středu dipólu a náboje

- úhel mezi $\vec{p}$ a $\hat{r}$ je 90° , tedy $\vec{p} \cdot \hat{r} = p \cos 90^\circ = 0$
- intenzita pole: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3 \times 0 \times \hat{r} - \vec{p}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$
- síla na náboj: $\vec{F} = q\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qp}{r^3} \hat{r}$
- směr síly je tedy opačný než $\vec{p}$ a jeho velikost je $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qp}{r^3}$.

2. Dipól míří přímo na náboj

- úhel mezi vektory je 0° , tedy $\vec{p} \cdot \hat{r} = p \cos 0^\circ = p$
- intenzita pole: protože $\vec{p}$ a $\hat{r}$ jsou ve stejném směru, můžeme psát $\vec{p} = p\hat{r}$, tedy

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3p\hat{r} - \vec{p}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3p\hat{r} - p\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \hat{r}$$

- síla: $\vec{F} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \hat{r}$, její velikost je $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}$.

Úloha 1.5

Zadání:

Pokud mám konfiguraci čtyř stejně velkých nábojů, dvou kladných a dvou záporných, jak bude vypadat celkový dipólový moment? Zkuste z toho vyvodit, jak se sčítají dipólové momenty, pokud počítáme celkový dipólový moment konfigurace více dipólů.

Řešení od Doc.^{MM} Michaela Jarvise:

Systém si popíšeme jako dva dipóly v jednom bodě. Výsledná elektrická intenzita je pak

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_1) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_2)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_1 + 3(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_2)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r} + \vec{p}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3((\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \cdot \hat{r})\hat{r} - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2))$$

Celkový dipólový moment je jednoduše $\vec{p}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

Úloha 1.6

Zadání:

Mějme dipól v homogenním elektrickém poli. Bude na něj působit nějaká síla? Spočítejte moment síly, který by působil na dipól v homogenním elektrickém poli. Spočítejte ho pro co nejobecnější situaci, tedy když dipól není orientovaný souběžně s polem ani kolmo na pole. (Homogenní vektorové pole je takové pole, které má všude konstantní velikost a všude míří stejně.)

Řešení od Doc.^{MM} Michaela Jarvise:

Na dipól nebude působit žádná síla, protože síla na kladný náboj a síla na záporný náboj dipólu se vyruší. Avšak bude na něj působit točivý moment. Na kladný náboj bude působit moment $\tau_+ = q\vec{E} \times \frac{\vec{d}}{2}$. Na záporný náboj bude působit moment $\tau_- = -q\vec{E} \times \frac{\vec{d}}{2}$.

Celkový moment vychází:

$$\tau_+ + \tau_- = q\vec{E} \times \vec{d} = \vec{E} \times \vec{p}.$$

Úloha 1.7

Zadání:

Mějme dipól připevněný k pojízdnému vozíku na kolejnicích a mějme kruhovou trať vytvořenou z kolejí. Dipól je připevněný tak, že vždy míří ve směru tečném k trati. Uprostřed tratě mějme bodový náboj. Jaká síla bude působit na dipól? (Zkuste odpovědět alespoň kvalitativně.) Jaktože se nejedná o perpetuum mobile?

Řešení od Vojtěcha Kubrychta, Aleny Mouchové a Michala Stroffa:

To je velice zajímavý mechanismus. Na základě výsledku z úlohy 1.4 víme, že síla působí ve stejném směru, jako ukazuje dipól (opačně, než jsme spočetli, díky akci a reakci), konkrétně

$$\vec{F} = \frac{q\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

což nutně znamená, že síla vždy působí ve směru jízdy a to by mělo vozík bezlimitně urychlovat. Není tomu tak, už jen logiky věci, že pole náboje uprostřed je konzervativní (platí, že jeho rotace je nulová), pokud se nehýbe, což předpokládám. Když je pole konzervativní, nelze z něj vydolovat při návratu do stejného bodu nějakou energii navíc. Co se tam tedy ale děje? Jednoduše, aby mohl jezdit po kružnici a udržovat se v požadovaném směru, je potřeba neustále vykonávat práci na natáčení dipólu, protože tím, jak je dipól orientován, by pro něj bylo energeticky výhodnější otevírat se směrem od středu, ne se neustále stáčet ke středu jak vyžaduje trajektorie, tato energetická podmínka (společně ještě s třením apod.) je dost náročná na to, aby ji energetický zisk

z podvolení se translační síle mohl kompenzovat. Proto se vozík ani nerozjede a když ho postrčíme, časem zbrzdí (vlivem tření a nějakého generovaného záření, hádám).

Úloha 1.8

Zadání:

Odvodte vztah

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}). \quad (1)$$

Hint: Položte si záporný náboj do počátku soustavy souřadnic a kladný náboj na osu z . Poté si napište vztah pro elektrickou intenzitu takovéto konfigurace podle $\vec{E}_c = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. V jednom členu bude vystupovat velikost separačního vektoru od kladného náboje (od záporného je to prostě vzdálenost od počátku), tedy vektoru spojujícího zkoumaný bod s kladným nábojem. Jeho velikost spočtete pomocí kosinové věty. Dále budete chtít jít se vzdáleností mezi náboji k nule. Upravte vztah, který jste dostali z kosinové věty, a použijte aproximaci:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x,$$

pro velmi malé x . Dosadte pak vše do výrazu pro elektrickou intenzitu a zkuste spočít limitu, kdy vzdálenost mezi náboji jde k nule. Pamatujte, že součin náboje a této velikosti je velikost dipólového momentu a ta se s limitou měnit nebude. Po tomto výpočtu si jen uvědomte, čemu je ve vztahu (1) roven člen $(\vec{p} \cdot \hat{r})$.

Řešení od Vojtěcha Kubrychta, Aleny Mouchové a Michala Stroffa:

Použit navržený hint je samozřejmě rozumná možnost, ovšem já moc nemusím popis pomocí intenzit a už vůbec ne nějaké jejich pracné sčítání, proto se pokusím vztah odvodit pomocí potenciálů. Protože platí $\vec{E} = -\nabla\varphi$, nepoužíváme-li v elektrostátice popis elektrického pole pomocí nestacionárního vektorového potenciálu, a zároveň nabla je lineární operátor, platí princip superpozice i pro skalární potenciál φ . Potenciál bodového náboje je jednoduše

$$\frac{kQ}{r}.$$

Umístíme-li si do počátku soustavy souřadnic kladný náboj $+q$ a na osu z do vzdálenosti d záporný náboj $-q$, dostáváme celkový potenciál ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \approx \\ &\approx kq \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 2dz + d^2 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \right). \end{aligned}$$

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ označíme jako r a škrtneme řád $\mathcal{O}(d^2)$.

$$\varphi(\vec{r}) \approx kq \left(\frac{r\sqrt{1 - 2dz/r^2} - r}{r^2} \right) \approx kq \frac{1 - dz/r^2 - 1}{r} = kq \frac{dz}{r^3}$$

No a qdz odpovídá v naší volbě souřadnic skalárnímu součinu $\vec{p} \cdot \vec{r}$.

$$\varphi(\vec{r}) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Protože aproximace použité výše platily pro malá d a d je nekonečně malé ve výsledku, je výsledný potenciál dipólu exaktním řešením problému. Tento vztah by měl být invariantní vůči rotaci soustavy souřadnic, proto volba obou nábojů na ose z nezpůsobila žádnou újmu na obecnosti.

Dále spočteme gradient tohoto potenciálu.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -k \frac{\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} + 3k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r} \nabla r}{r^4}$$

Poměrně triviálně, když si rozderivujeme skalární součin $\vec{p} \cdot \vec{r}$, dojdeme rychle k tomu, že $\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p}$. Zároveň je ∇r už jen intuitivně podle definice gradientu kolmý na křivky konstantního r , tedy by měl nějak ukazovat (i s ohledem na rozměr výsledku) jednotkový vektor $\hat{r}$. Po parciálním rozderivování $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ se o tom lehce přesvědčíme. Výsledkem je tedy

$$\vec{E} = k \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\hat{r}}{r^4} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

Za použití normy $\hat{r} = \vec{r}/r$ máme intenzitu el. pole kolem dipólu ve tvaru, který je uveden v textu.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p})$$



Téma 4 – Výpočetní geometrie

Řešení úloh

Ahoj, možná si někdo ještě pamatuje na první číslo a možná ještě čekáte na pokračování tématka o výpočetní geometrii. To zde sice nedostanete, ale alespoň se podívám na řešení zadaných úloh.

Úloha 1.3

Zadání:

Pokud je počet průsečíků $k \in \mathcal{O}(n^2)$, je sweeping algoritmus lepší než naivní algoritmus, ve kterém procházíme všechny možné průsečíky?

Řešení:

Ne. Naivní přístup zkusit každou dvojici úseček by trval $\binom{n}{2} \in \mathcal{O}(n^2)$ času. Zametací algoritmus by vyšel na $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

Úloha 1.4

Zadání:

Náš odhad délky seznamu bodů akce S je trochu hrubý ($\mathcal{O}(n+k)$). Lehkou úpravou analýzy algoritmu lze zkrátit jeho délku na nejvýše $\mathcal{O}(n)$. Ukažte ji.

Řešení:

Můžeme si rozmyslet následující: Všechny body akce v seznamu korespondují s nějakým průsečíkem na zametací přímkce a každý průsečík přidává do seznamu nejvýše dva body. Tedy délka seznamu bude nejvýše $2n$, kde n je počet úseček.

Úloha 1.5

Zadání:

Zlepší předchozí úprava složitost algoritmu?

Řešení:

Předchozí úprava nijak nezmění asymptotickou časovou složitost, protože jak $\log n$, tak i $\log n^2$ jsou ve stejné asymptotické třídě, neboť:

$$\log n^2 = 2 \log n$$

Obecně dobrým nápadem, jak řešit úlohy, bylo prvně zkusit použít zametací algoritmus. Zkusme si tedy na úloze 1.7 ukázat, jak přesně by to bylo možné udělat.

Úloha 1.7

Zadání:

Máme n trojúhelníků tak, že žádné dva se neprotínají. Nalezněte algoritmus, který v čase $\mathcal{O}(n \log n)$ o každém trojúhelníku rozhodne, zda je obsažen v jiném. Následně algoritmus upravte tak, že ve stejném čase pro každý trojúhelník nalezně trojúhelník, ve kterém je obsažen.

Řešení:

Prvně si úlohu zjednodušíme a zamysleme se, jak tuto úlohu vyřešit pro dva trojúhelníky A a B . BÚNO řekněme, že trojúhelník A je obsažen v trojúhelníku B . Pak existuje vodorovná přímka q , která protíná oba trojúhelníky.

Označme si průsečíky přímky q s trojúhelníky A a B jako A_1, A_2 a B_1, B_2 s tím, že A_1 je více napravo než A_2 a obdobně B_1 než B_2 . Zde je dobré si rozmyslet, že A_1 a A_2 mohou být jeden a ten samý bod, nám to ale nijak vadit nebude.

Pak platí, že body na přímce q jsou uspořádané takto: B_1, A_1, A_2, B_2 . Jak ale takovou přímku q najít? Celkem jednoduše – stačí nám vzít libovolný bod v A . Naopak, pokud nalezneme libovolný bod v A , pro který předchází vlastnost neplatí, tak A není obsažen v B .

Nyní můžeme tento postup zkusit zobecnit pro libovolně velkou množinu trojúhelníků. Vezmeme si zametací algoritmus (*sweep-line*) a vložíme do něj všechny hrany trojúhelníků. Uděláme jenom drobnou úpravu: v každém vrcholu na zametací přímce si budeme držet, zda je obsažena v nějakém trojúhelníku.

Ve chvíli, kdy poprvé zametací přímka protne nějaký trojúhelník A , podíváme se na dané přímce o jednu doprava a jedna doleva. Pokud oba průsečíky patří nějakému trojúhelníku B , pak A je obsažen v B . Pokud nějaký z těchto průsečíků je obsažen v trojúhelníku C , pak A je také obsažen v C (jinak by to nemohl být nejbližší průsečík na přímce, protože nějaký z bodů C by musel být blíže).

Pokud ale ani jeden z těchto průsečíků nepatří žádnému trojúhelníku, pak A není obsažen v žádném trojúhelníku. I zde se použije obdobný argument: kdyby byl v nějakém trojúhelníku D obsažen a nejbližší v žádném ne, musely by být průsečíky D blíže než nejbližší průsečíky na přímce q , a to je spor.

Zametací algoritmus nám umožňuje udržovat průsečíky trojúhelníků se zametací přímkou v čase $O(n \log n)$, kde n je počet trojúhelníků. Tedy daný problém umíme řešit v tomto čase.

Úloha 1.6

Zadání:

Lenka se rozhodla, že se dá na chov ovcí. Pořádila si tedy ohradu R ve tvaru mnohoúhelníka. Ovece jí ale z ohrádky utíkaly, a tak každé dala růžovou stužku s GPS lokátorem (ten vrací informaci, v jakém bodě se zrovna ovečka nachází). Čas od času chce Lenka zkontrolovat, zda jsou všechny její ovečky v ohradě. Pomozte Lence pro každou ovečku rozhodnout, zda je v ohradě. Navrhněte algoritmus a odhadněte jeho složitost v závislosti na počtu oveček a počtu vrcholů ohrady.

Řešení:

Zde se dá použít velmi obdobný přístup jako v 1.7. Místo trojúhelníků ale použijeme body.

Úloha 1.14

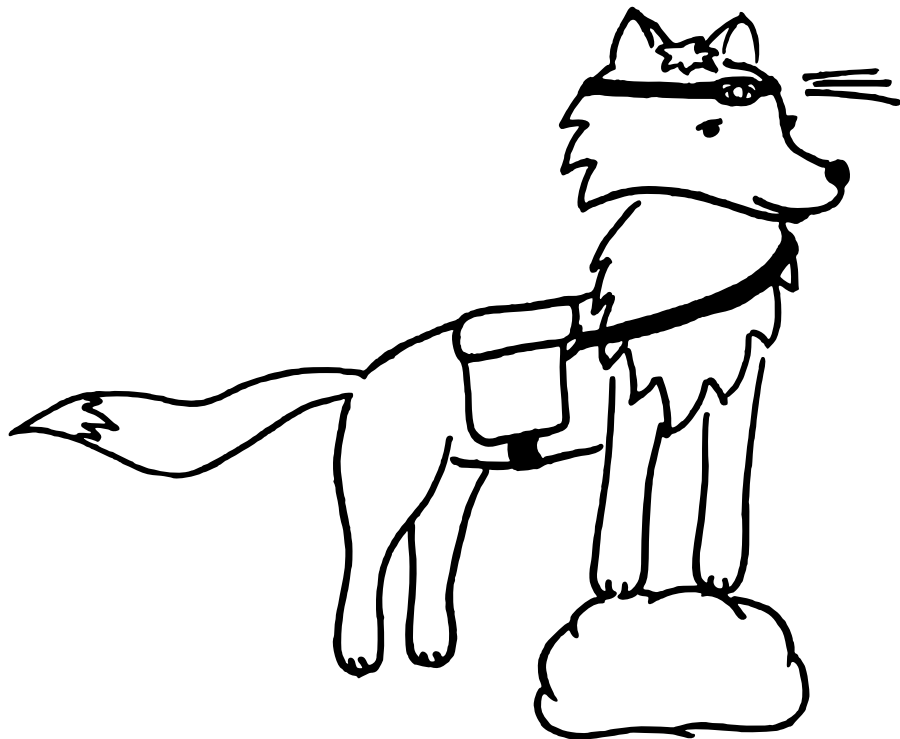
Zadání:

Orgové se rozhodli, že si spolu zahrají na schovávanou. Pan Kostička ale byl nějak podezřele dobrý. Vojtovi to nedalo a rozhodl se ověřit, zda mohl pan Kostička své spoluorgy vidět. K dispozici má plánek m překážek (úseček) a n hráčů a pozici pana Kostičky. O každém hráči můžete uvažovat jako o bodu. Pomozte Vojtovi nalézt algoritmus, který mu řekne, zda daný hráč byl zrovna vidět z pozice pana Kostičky, nebo ne.

Řešení:

Opět je možné použít zametací algoritmus. Je ale nutné si rozmyslet, jak má taková přímka vypadat.

Dláža; gadurekvojtech@outlook.com



Téma 5 – Kombinatorika

Díl 4: Nepočítání a principy

Úvod

V minulém čísle jsme si ukázali, jak počítat některé základní věci v kombinatorice nebo co je to kombinační číslo. V tomto díle na to navážeme a ukážeme si některé zajímavé vlastnosti kombinačních čísel, poté si pomocí nich dokážeme binomickou větu a nakonec si popíšeme dva důležité kombinatorické principy – Princip inkluze a exkluze a Dirichletův princip. Stejně jako v minulém díle vás části vyznačené *kurzívou* vyzývají k zamyšlení.

Kombinatorické nepočítání

Pokud si kombinační čísla správně zapíšeme, tak tvoří zajímavý útvar nazývaný Pascalův trojúhelník zachycený na obrázku 1. Jeho konstrukce je jednoduchá. Jen pozor, při tvorbě Pascalova trojúhelníku indexujeme od nuly. Každý jeho prvek je kombinačním číslem $\binom{n}{k}$, kde n značí číslo řádku (n je tedy stejné pro prvky ve stejném řádku) a k značí pozici v řádku (tedy $k \in \{0, 1, \dots, n\}$). Pascalův trojúhelník je nekonečný, hodnotu n můžeme zvyšovat do nekonečna.

Konstrukce pomocí rozepisování a počítání binomických čísel je však lehce zdoluhavá, existuje i jednodušší způsob. Všimněme si, že obě boční strany trojúhelníku jsou tvořeny samými jedničkami. Každé číslo, které má nad sebou dva sousedy, je jejich součtem. Platí tedy $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. *Zkuste se zamyslet, proč by měly tyto vlastnosti platit.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \binom{0}{0} \\
 & 1 & & 1 & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
 \end{array}$$

Obrázek 9: Pascalův trojúhelník

První vlastnost plyne triviálně z toho, jak jsou kombinační čísla definovaná, protože pokud ze skupiny o n prvcích vybíráme 0 nebo n prvků, tak máme pouze jednu možnost, jak to udělat.

Druhá vlastnost se samozřejmě dá dokázat z definice, ale existuje i elegantnější způsob, jak ji dokázat. Podívejme se na kombinační číslo $\binom{n+1}{k+1}$. To nám říká, kolika způsoby můžeme ze skupinky $n+1$ prvků (pro názornost lidí) vybrat $k+1$ prvků (lidí). Řekněme, že je ve skupině $n+1$ lidí přítomná Anička. Pokud chceme vybrat skupinku $k+1$ lidí tak buď v té skupince Anička je, nebo není. Pokud Anička ve skupince je, tak k ní ze skupiny n lidí (skupina bez Aničky) musíme vybrat k dalších osob (aby jich dohromady bylo $k+1$, jak chceme), což můžeme udělat $\binom{n}{k}$ způsoby. Dále k tomu přičteme počet variant, kdy Anička ve skupince nebude. Potom z n (opět skupina bez Aničky) musíme vybrat $k+1$ lidí, což je $\binom{n}{k+1}$. Celkový počet možností, jak můžeme vybrat $k+1$ z $n+1$ lidí, je součtem počtu případů, kdy jeden určitý člen (Anička) ve skupině je a kdy tam není: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. Podobný trik nám umožňuje například řešit tento problém: *Kuba má robota a 5 vylepšení, přičemž každé může, nebo nemusí použít. Kolik různých robotů může postavit? (Roboti jsou různí, pokud se liší alespoň v 1 modifikaci.)*

Řešení této úlohy je pouze sečíst všechna kombinační čísla, která mají „nahore“ číslo 5. Pokud se na to podíváme v Pascalově trojúhelníku, tak se jedná o součet 6. řádku. Nemohli bychom si ušetřit práci s počítáním a vyjádřit tento součet obecně? Čemu je roven součet všech $\binom{n}{k}$, kde za k postupně dosazujeme čísla od 0 do n (tedy jaká je hodnota $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ v závislosti na n ?)

Snažíme se spočítat, kolik existuje různých podmnožin množiny o n (v ilustračním případě 5) prvcích, protože vybíráme množiny všech velikostí, každou právě jednou. Na rozdíl od předchozího příkladu se podíváme na všechny prvky (ne pouze na jeden) a pro každý rozhodneme, jestli v podmnožině je, nebo není. Jinými slovy si modifikace seřadíme a pro každou modifikaci robota rozhodneme, jestli ji použijeme, nebo ne. To se dá převést na to, kolik existuje řetězců o n znacích složených pouze z nul a jedniček, přičemž nula odpovídá tomu, že jsme daný prvek nevybrali, a jednička tomu, že ano. Tento problém už jsme ale řešili v minulém díle a víme, že jeho řešení je 2^n a protože Kuba má 5 modifikací, tak počet robotů, které může postavit je $2^5 = 32$.

Binomická věta

Spoustu z vás se již ve škole jistě setkala se vzorcem $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. My si ukážeme, jak tento vzoreček pomocí kombinačních čísel zobecnit pro libovolné n na $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$. Z toho podle definice sumy dostaneme například $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Zkuste si rozmyslet, proč by tento vztah měl platit. Klidně začněte s $n=3$ a pak si tento vzoreček zkuste zobecnit.

Nejprve si $(a+b)^n$ rozepíšeme na $(a+b)(a+b) \dots (a+b)$, kde se $(a+b)$ vyskytuje n -krát. Poté vidíme, že prvek $a^{n-i} b^i$ vznikne právě tehdy, když v i závorkách

násobíme prvek b a ve zbylých prvek a , tedy pokud chceme jejich celkový počet, tak vybíráme i závorek, ve kterých násobíme b , z celkových n závorek. Pokud toto uděláme pro všechna i od 0 do n , dostaneme náš požadovaný vzoreček. Jiné prvky roznásobením nevzniknou, protože a a b dohromady musíme vybrat vždy n -krát. To platí díky tomu, že z každé závorky musí být v každém roznásobeném prvku buď jedno a , nebo jedno b . Zajímavé je, že pokud dosadíme $a = b = 1$, tak dostaneme alternativní důkaz toho, že $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, neboli jak jsme si řekli dříve jak vypočítat součet řádku $n + 1$ v Pascalově trojúhelníku.

Princip inkluze a exkluze

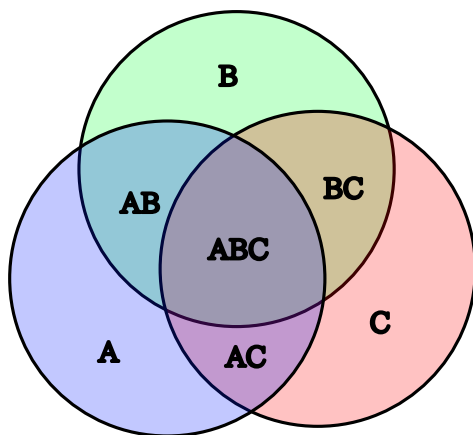
Princip inkluze a exkluze (dále PIE) je jeden z nejčastěji používaných principů v kombinatorice. Umožňuje nám počítat se sjednoceními množin, s nimiž se v kombinatorice počítá poměrně složitě, pomocí jejich průniků, se kterými se počítá mnohem snadněji. Nejprve se podíváme na ilustrační případ: ve městě fungují 2 sportovní kluby. Fotbalový klub má 12 členů, tenisový klub 9. Přitom 3 fotbalisté hrají i tenis. Město poté založilo ještě volejbalový klub. Přihlásilo se do něj 15 lidí, z toho 4 fotbalisté, 3 tenisté. Zároveň víme, že právě 1 člověk chodí do všech tří klubů. *Kolik osob celkem je členem nějakého klubu?*

Nejprve sečteme počty členů sportovních klubů (tedy $12 + 9 + 15$). To ale jistě není odpověď, protože některé lidi jsme očividně započítali víckrát. Konkrétně každého člověka, který je právě ve dvou klubech zároveň jsme započítali dvakrát, každého, který je ve třech třikrát atd. Tak zkusíme odečíst počet lidí, kteří jsou ve dvou klubech zároveň (tedy $3+4+3$). Nyní nám sedí počty lidí, kteří jsou právě v jednom klubu a těch, kteří jsou právě ve dvou. Tedy už musíme opravit pouze počet lidí, kteří jsou členy všech tří. Ty jsme započítali třikrát v prvním součtu a poté jsme je odečetli také třikrát (protože jsou součástí tří dvojic klubů) a tedy už nám stačí pouze jejich počet přičíst a dostaneme výsledek $12 + 9 + 15 - 3 - 4 - 3 + 1 = 27$. U tohoto postupu jsme rovnou přišli na to, jak spočítat velikost sjednocení tří množin – tedy kolik prvků se vyskytuje alespoň v jedné množině (neboli v našem případě kolik lidí chodí do alespoň jednoho ze tří klubů). Toho jsme dosáhli jenom pomocí průniků (neboli pomocí toho, že jsme věděli, kolik lidí chodí zároveň do libovolných z klubů) tak, že jsme nejprve přičetli průniky velikosti **1** (neboli kolik lidí chodí do každého klubu), poté odečetli průniky velikosti **2** (tedy pro každou dvojici klubů jsme odečetli, kolik lidí chodí do obou z nich) a nakonec jsme přičetli průniky velikosti **3** (neboli počet lidí, kteří chodí do všech tří klubů zároveň). Princip inkluze a exkluze nám říká, že tímto přičítáním lichých průniků a odečítáním sudých průniků jsme schopni spočítat sjednocení libovolného počtu množin, ne jen 3. *Můžete si rozmyslet, že toto tvrzení obdobně platí i pro 1 a 2 množiny.*

Na Obrázku 2 níže je situace z příkladu zachycena. Každé písmeno v názvu odpovídá jednomu klubu a mi známe velikosti částí, které jsou obarvené alespoň 1, 2 a 3 barvami. Tedy pro každou kombinaci znaků známe velikost částí, které



obsahují v názvu alespoň tyto znaky (například pro kombinaci A a B známe velikost $AB + ABC$) a nás zajímá velikost obarvené části obrázku.



Obrázek 10: Princip inkluze a exkluze pro tři množiny

Pro důkaz PIE si dokážeme následující pomocné tvrzení, které budeme potřebovat: $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, neboli počet sudých a lichých podmnožin (tzn. podmnožin se sudým a lichým počtem prvků) nějaké množiny o n prvcích je stejný (nesmíme zapomenout na podmnožinu velikosti 0, která je sudá). *Zkuste si toto tvrzení dokázat sami.*

Vezmeme si všechny liché podmnožiny nějaké množiny o n prvcích a nějaký konkrétní prvek a této množiny. Nyní pro každou podmnožinu vezmeme prvek a a pokud v této podmnožině je, tak ho z ní odebereme, a pokud v ní není, tak ho do ní přidáme. Tím pro každou lichou podmnožinu dostaneme unikátní sudou podmnožinu. To platí díky tomu, že pokud se dvě liché podmnožiny liší něčím jiným, než tím, že obsahují/neobsahují a , tak se z nich nemůže stát ta stejná sudá podmnožina a pokud se liší pouze obsahem a , tak jedna z nich není lichá, protože dvě čísla lišící se o 1 nemůžou být obě lichá. Sudých podmnožin tedy musí být alespoň tolik, jako lichých. Stejnou úvahu můžeme provést i pro sudé podmnožiny, z čehož získáme, že počet sudých a lichých podmnožin je stejný.

A tím se konečně dostáváme k PIE. Ten zní následovně: Máme nějaký počet množin m , které se mohou protínat (neboli některé prvky mohou být ve více množinách). Pro něj vezmeme počet prvků ve všech průnicích lichých podmnožin a odečteme počet prvků v průnicích sudých podmnožin a označíme si tuto sumu S . Pak S je počet prvků ve sjednocení těchto množin. *Zkuste si rozmyslet důkaz PIE (nápopověď: podívejte se na jeden konkrétní prvek).*

Jak jsme vám napověděli, podíváme se na jeden konkrétní prvek p . Řekněme, že je součástí n z m množin. Zajímá nás, kolikrát se p vyskytuje v průniku $k \geq 1$

množin. Aby byl p v průniku k množin, tak se musí vyskytovat v každé z nich a tedy každá z nich je jedna z n množin, kterých je p součástí. Z toho počet jeho výskytů v průnicích velikosti k dostaneme jednoduše jako $\binom{n}{k}$. Z toho si můžeme vyjádřit S jako $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k}$. Abychom dokázali PIE, tak toto musí být rovno 1, protože každý prvek je v průniku množin započítán právě jednou. Pokud si vezmeme naše pomocné tvrzení a vše v sumě, kromě $i = 0$, přesuneme na druhou stranu rovnice, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= 0 \\ \binom{n}{0} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \\ 1 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Protože bylo p zvoleno libovolně, tak to platí pro všechny prvky těchto množin, čímž jsme dokázali PIE.

Dirichletův princip

Jako takovou třesničku na dortu si ukážeme ještě relativně jednoduchý, ale velice užitečný princip – Dirichletův princip neboli princip holubníku. Ten nám říká, kolik musíme mít holubů, aby se v alespoň jednom z m holubníků nacházelo alespoň n holubů. Nejprve se podíváme na to kolik holubů je potřeba, aby v alespoň jednom z 8 holubníků bylo alespoň 7 holubů a pak si tento příklad vyřešíme obecně. *Zkuste si rozmyslet, kolik nejméně holubů potřebujeme. Začněte s konkrétními čísly a pak odvoďte obecnou závislost.*

Vidíme, že pokud máme 8 · 6 holubů, tak to těsně nevyjde, protože do každého holubníku dáme 6 holubů, ale zároveň pokud jednoho přidáme, tak už ho nemáme kam dát tak, aby jsme nesplnili podmínku. Tedy celkově nám stačí 8 · 6 + 1 = 49 holubů. Obecně odpověď pro m holubníků a n holubů je $m(n - 1) + 1$. Vidíme, že $m(n - 1)$ jistě nestačí, protože v každém holubníku může být $n - 1$ holubů a naše podmínka není splněná. Teď ještě dokázat, že $m(n - 1) + 1$ stačí. Pro spor předpokládáme, že v žádném holubníku není alespoň n holubů. Potom však v každém holubníku je maximálně $n - 1$ holubů, a tedy celkový počet je maximálně $m(n - 1)$, což je spor. Tedy $m(n - 1) + 1$ holubů stačí, aby byla podmínka splněna.

Úloha 4.1 [2b]: Máme tabulku 5×5 a dva lidé hrají hru. Pravidelně se střídají v tazích. Hráč na tahu vždy obarví jedno políčko tabulky svojí barvou. Pokud hráč svojí barvou zvládne obarvit 4 vrcholy nějakého obdélníku, tak vyhrál a hra končí. *Dokažte, že hra nemůže skončit remízou, čili jeden hráč jistě vyhraje.*





Úloha 4.2 [2b]: Mějme 2 červené kuličky, 3 modré a 3 zelené. Kuličky stejné barvy jsou navzájem nerozlišitelné. Spočítejte, kolika způsoby je lze seřadit tak, aby vedle sebe nikdy nebyly všechny kuličky od jedné barvy (tudíž mezi první a poslední kuličkou jedné barvy v řadě musí být alespoň jedna kulička jiné barvy).

Úloha 4.3 [3b]: Z čísel $1, 2, \dots, 1000$ vyškrtáme všechny násobky 3, 5, 7 a 42. Kolik čísel nám zůstane?

Úloha 4.4 [3b]: Určete počet cest délky $a + b$ z levého dolního rohu do pravého horního v mřížce $a \times b$.

Úloha 4.5 [3b]: Rozkladem čísla n délky $k \geq 1$ rozumíme konečnou nerostoucí posloupnost přirozených čísel $a_1, \dots, a_k$ splňující $a_1 + \dots + a_k = n$. Dokažte, že počet všech rozkladů čísla n je roven počtu rozkladů čísla $2n$ délky n .

Lukáš, Terka; troj.lukas@gmail.com
odevzdávejte do odevzdávátka

Řešení 3. dílu

Úloha 3.1

Zadání:

Kolik existuje pěticiferných hesel, která obsahují právě 3 jedničky? (Hesla obsahují pouze cifry a můžou začínat na 0.)

Řešení:

Nejprve vybereme 3 cifry, které budou jedničky a poté u ostatních čísel vybereme jedno ze zbylých 9 cifer a tím dostaneme výsledek $\binom{5}{3} \cdot 9^2$.

Úloha 3.2

Zadání:

Kolik let v minulém tisíciletí mělo rostoucí posloupnost cifer? (Tedy kolik let tvaru $1xyz$ splňuje $1 < x < y < z$.)

Řešení:

Stačí nám pouze vybrat 3 z čísel od 2 do 9 a jejich pořadí je jednoznačně určené, takže výsledek je $\binom{8}{3}$.

Úloha 3.3

Zadání:

Máme 10 speciálních znaků, 10 číslic a 26 písmen. Kolik různých hesel délky 8 můžeme vytvořit tak, aby obsahovala právě 1 speciální znak a právě 2 číslice?

Řešení:

Nejprve vybereme místo, kam umístíme speciální znak, vynásobíme počtem možných speciálních znaků na tomto místě, poté ze zbylých míst vybereme, kam umístíme dvě číslice, pak opět vynásobíme počtem možných číslic pro obě tato místa a nakonec vynásobíme pro každé zbylé místo počtem možných písmen. Tedy dostaneme $\binom{8}{1} \cdot 10 \cdot \binom{7}{2} \cdot 10^2 \cdot 26^5 = \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot 10^3 \cdot 26^5$.

Úloha 3.4

Zadání:

Máme 5 modrých, 10 zelených a 10 oranžových míček a vybereme si 10 z nich. Kolik máme možností, jak bude výsledná skupina vypadat?

Řešení:

Spočítáme, jako kdybychom měli všech barev neomezeně, a poté odečteme počet všech případů, kdy jsme vybrali víc než 5 modrých (tedy předpokládáme, že 6 modrých již máme vybraných a poté vybíráme ze 3 barev pro zbylé 4 míčky). V obou případech se jedná o kombinace s opakováním a ty z minulého dílu víme, že spočítáme takto: $\binom{12}{2} - \binom{6}{2}$.

Úloha 3.5

Zadání:

Kolika způsoby jde rozdělit 20 různých knih do 5 regálů? (V každém regálu nám záleží na pořadí knih.)

Řešení:

Nejprve si knihy rozdělíme do regálů pomocí metody přepážek, kterou jsme používali na počítání kombinací s opakováním, čímž knihy rozdělíme do regálů tak, že každá přepážka symbolizuje přechod do nižšího regálu. Poté když knihy čteme „jako písmena v knize“ tedy zprava zvrchu, tak rozdělení do přepážek nemění jejich pořadí. Poté už je jenom musíme v tomto pořadí uspořádat a tím dostaneme výsledek. Tedy výsledek je $20! \cdot \binom{24}{4}$.



Téma 6 – LISP

Díl 2: Lambdy a makra

Posledně jsme se seznámili s základními konstrukty jazyka Lisp. V tomto díle si vysvětlíme, jak funguje volání funkcí, a napíšeme si vlastní makro. Nejprve ale musíme napravit křivdu z minula.

Pro úplnost nejprve uvedeme chybný příklad a pak ho opravíme.

```
(defun square-only-small (n)
  (if (< n 100) (* n n) (
    (print "wow, you are already pretty big!")
    n
  ))
)
```

Problém je v s-expression `((print "wow, you are already pretty big!") n)`. Kdybychom chtěli vypsat text a vrátit hodnotu, potřebujeme použít `progn`.

```
(defun square-only-small (n)
  (if (< n 100) (* n n) (progn
    (print "wow, you are already pretty big!")
    n
  ))
)
```

Speciální funkce `progn` vyhodnotí všechny své argumenty a vrátí hodnotu posledního.

Case sensitivity Jistě jste si všimli, že ať už napíšete `(print 'a)` či `(print 'A)`, Lisp vypíše v obou případech `A`. To je proto, že Lisp automaticky převádí všechny jména atomů na uppercase. Přesto je technicky vzato case sensitive, a dokáže rozeznat velká a malá písmena. V praxi se však chová jako case insensitive jazyk. Budeme se držet konvence, že důležité konstanty, jako jsou `T` a `NIL` budeme psát velkými písmeny. Navíc budeme proměnné a funkce, které definujeme my, pojmenovávat českými názvy.

Funkce jako parametr

Kdybychom psali něco jako kalkulačku, mohli bychom napsat následující funkci:

```
(defun vyhodnot-operator (operator leva prava)
  (cond
    ((string= operator "+") (+ leva prava))
    ((string= operator "-") (- leva prava))
    ((string= operator "*") (* leva prava))
    ((string= operator "/" ) (/ leva prava))
  )
)
```

Funkce **cond** (zkratka z *conditional*) je zobecněním **if**. Umožňuje zapsat více podmínek za sebou přehledněji než vnořené **if**. Bere libovolný počet seznamů (větví). V každé větvi se vyhodnotí první prvek jako podmínka. Pokud je pravdivá (není NIL), vyhodnotí se zbytek výrazů v dané větvi a vrátí se hodnota toho posledního. Pokud podmínka neplatí, jde se na další větev. Pokud neplatí žádná z podmínek, vrátí se hodnota NIL.

Všimněte si také, že pro porovnání operátoru používáme **string=** a ne **=**. V Lispu (konkrétně v Common Lispu) operátor **=** slouží výhradně k porovnávání čísel. Pro porovnávání řetězců musíme použít **string=**. Kdybychom použili **=**, dostali bychom chybu, že operand není číslo.

Snadno si všimnete, že na každém řádku se v podstatě všechny kód opakuje – jediná věc, která se mění, je operátor. Zkusíme napsat „chytřejší“ verzi:

```
(defun operator-to-funkce (operator)
  (let ((retezec (list "+" "-" "*" "/"))
        (funkce (list #' + #' - #' * #' /)))
    (loop for i from 0 to 3 do
      (if (string= (nth i retezec) operator)
          (return-from operator-to-funkce (nth i funkce))
        )
      )
    )
  )
)

(defun vyhodnot-operator (operator leva prava)
  ((operator-to-funkce operator) leva prava)
)
```

Funkce **operator-to-funkce** nám převede řetězec **+** na funkci **+**, obdobně i pro ostatní operátory. Z minula známe **quote**, neboli apostrof **'**, který vytvoří objekt typu **symbol**. Zde jsme použili operátor **function**, tedy **#'**, který vytvoří objekt typu **function**, o čemž se můžete přesvědčit pomocí **type-of**.

Bohužel ani to, že **operator-to-funkce** vrací objekt typu **function**, nepomůže. Když se Lisp pokusí vyhodnotit výraz v těle **vyhodnot-operator**, pokusí se vyložit si s-expression **(operator-to-funkce operator)** jako funkci. Kdyby ji vyhodnotil, dostal by funkci; to však neudělá, a místo toho nám hodí error. Abychom funkci zavolali, musíme použít funkci **funcall**.

```
(defun vyhodnot-operator (operator leva prava)
  (funcall (operator-to-funkce operator) leva prava)
)
```

Nejprve se vyhodnotí všechny parametry **funcall**, **operator-to-funkce** nám vrátí funkci a ta se zavolá s parametry **leva** a **prava**.

Poznámka: Funkci **funcall** můžeme v prvním parametru zadat i symbol, který pojmenovává funkci. Operátor **#'** používáme zejména proto, že to tak je tradiční, o něco rychlejší a upozorňuje na to, že se jedná o funkci. Upravená verze funkce



`operator-to-funkce` by obsahovala ' místo #' a vracela by symbol místo funkce. `vyhodnot-operator` by se chovala stejně, jen by do `funcall` předávala symbol.

Lisp-1 vs. Lisp-2 Jak víme, Lisp má mnoho variant. Common Lisp, který používáme, je takzvaný Lisp-2, což znamená, že používá (minimálně) dva oddělené jmenné prostory: jeden pro funkce a druhý pro „běžné“ hodnoty (například proměnné). Jinak řečeno, symbol může ve stejnou dobu reprezentovat jak proměnnou, tak funkci – například můžete mít proměnnou s názvem `foo` a zároveň funkci `foo`, které spolu nijak nekolidují. Tomu se říká dvouprostorová architektura (Lisp-2).

Existují také Lispy takzvaného typu Lisp-1 (například Scheme), které mají jen jeden společný jmenný prostor: jméno `foo` může reprezentovat buď funkci, nebo hodnotu, ale ne obojí najednou. Jednoduše řečeno, v Lisp-1 má každý symbol právě jednu hodnotu, ať už je to funkce, číslo nebo něco jiného; v Lisp-2 má symbol „slot“ pro hodnotu a „slot“ pro funkci zvlášť. Uvedeme příklad kódu demonstrující oddělený jmenný prostor funkcí a hodnot Common Lispu:

```
(let ((foo 42)) ; a variable FOO
  (flet ((foo (n) (+ n 107))) ; a function FOO
    (foo foo))) ; calling function FOO with the value of the variable FOO
```

Lambda funkce Občas se stane, že potřebujeme funkci jen na jednom místě, typicky jako parametr pro jinou funkci. Vymýšlet pro ni unikátní jméno pomocí `defun` je zdlouhavé a znepřehledňuje to kód. Pro tyto účely existují tzv. *anonymní funkce*, v Lispu nazývané **lambda funkce**.

Syntaxe je stejná jako u pojmenovaných funkcí, pouze bez jména:

```
(lambda (x) (- 1 (* x x)))
(lambda (x y) (* x y))
```

Následný výraz vrátí funkci, která umocňuje svůj argument na druhou. Protože jde o objekt typu `function`, můžeme ho (stejně jako pojmenované funkce) předat funkci `funcall`:

```
(funcall (lambda (x) (* x x)) 5) ; 25
```

Lambda funkce nejčastěji uvidíte ve spojení s funkcemi pro zpracování seznamů, jako je `mapcar` (aplikuje funkci na každý prvek seznamu) nebo `remove-if-not` (odstraní prvky seznamu, které nevyhovují dané podmínce):

```
(mapcar (lambda (x) (+ x 10)) '(1 2 3)) ; (11 12 13)
(remove-if-not (lambda (x) (evenp x)) '(1 2 3 4 5)) ; (2 4)
```

Proč lambda? Název pochází z *lambda kalkulu*, který ve 30. letech 20. století zavedl Alonzo Church. Traduje se, že Church původně používal stříšku nad proměnnou (např. $\hat{x}$). Tu přesunul před proměnnou ($\wedge x$), aby se jeho nová notace nepletla s předchozími použití stříšky. Symbol lambda, λ , si Church nakonec vybral proto, že se snáze tiskne.

Pokročilé předávání argumentů

Zatím umíme definovat pouze funkce, které vyžadují přesný počet argumentů. Pokud definujeme funkci (`(defun f (a b) ...)`), musíme ji volat se dvěma argumenty. Lisp našťěstí nabízí bohatou syntaxi pro flexibilnější definice parametrů pomocí speciálních klíčových slov začínajících znakem `&` (takzvaná lambda list keywords, pro více informací viz Lisp Docs¹⁰).

&optional Umožňuje definovat nepovinné parametry. Ty se uvádějí v seznamu za klíčovým slovem `&optional`. Pokud při volání funkce nejsou zadány, mají hodnotu NIL, případně můžeme specifikovat vlastní výchozí hodnotu.

```
(defun pozdrav (jmeno &optional (uvodni-slovo "Ahoj"))
  (format T "~a, ~a!~%" uvodni-slovo jmeno))

(pozdrav "Petr")           ; => Ahoj, Petr!
(pozdrav "Pavel" "Cau")   ; => Cau, Pavel!
```

&rest Slouží pro funkce s proměnným počtem argumentů. Všechny „zbylé“ argumenty, které se nevešly do povinných ani volitelných, se zabalí do seznamu.

```
(defun scitani (&rest cisla)
  (apply #'+ cisla)) ; apply zavola funkci na seznam argumentu

(scitani 1 2 3 4) ; => 10
```

&key Klíčové argumenty (keyword arguments) umožňují předávat parametry podle jména, nikoliv podle pozice. To je velmi užitečné u funkcí s mnoha nastaveními. Voláme je pomocí symbolů začínajících dvojtečkou (tzv. keywords).

```
(defun upec-dort (&key (velikost "maly") (napln "cokolada"))
  (list velikost napln))

(upec-dort :napln "jahody")           ; => ("maly" "jahody")
(upec-dort :velikost "velky" :napln "vanilka")
```

Existují i další klíčová slova, například `&aux` pro pomocné lokální proměnné, ale ta se používají méně často.

¹⁰<https://lisp-docs.github.io/cl-language-reference/chap-3/d-e-lambda-lists>

Makra

Ačkoli jsme o nich zatím moc nemluvili, makra jsou klíčovou součástí Lispu. Makra nám umožňují definovat si vlastní syntaktické konstrukce, které vypadají, jako by byly součástí jazyka. Oproti makrům v jiných jazycích, která typicky mají vlastní syntaxi, makra v Lispu jsou vlastně jen funkce, které pracují se *s-expressions*.

Představte si, že bychom chtěli napsat vlastní **if**. Zkusíme použít **cond** pro implementaci:

```
(defun pokud (podminka pravda nepravda)
  (cond (podminka pravda)
        (T nepravda)))
```

Vzpomeneme si, že symbol **T** reprezentuje pravdivou hodnotu. Pokud je tedy podmínka pravdivá, vyhodnotí se první větev, jinak se vyhodnotí druhá větev.

Problém je v tom, že funkce v Lispu (stejně jako ve většině jazyků) nejdříve (než se zavolají) vyhodnotí své argumenty. Pokud bychom zavolali (**pokud** (= 1 1) (**print** "ano") (**print** "ne")), vypsaloby se „ano“ i „ne“, protože se oba **printy** vyhodnotí ještě před zavoláním funkce. Makra tento problém řeší tím, že se vyhodnocují v době překladu (makroexpanze) a jejich argumenty jsou nevyhodnocené kusy kódu.

Quoting a Backquoting Abychom mohli v makrech snadno generovat kód (což jsou v Lispu seznamy), používáme speciální notaci. Obyčejný **quote** (**'**) už známe – bere vše doslovně.

```
(defparameter *jmeno* "Pepa")
'(ahoj *jmeno*)           ; => (AHOJ *JMENO*)
```

Často ale chceme vytvořit seznam, který je zčásti konstantní, ale na některá místa chceme vložit hodnotu proměnné. K tomu slouží **backquote** (**`**, backtick) spolu s operátory **unquote** (**,**) a **unquote-splicing** (**,@**).

- **`** (backtick/backquote): Začíná „šablonu“ seznamu. Chová se jako **quote**, dokud nenarazí na čárku.
- **,** (comma/unquote): Říká „tady přestaň citovat a vyhodnot tento výraz“. Výsledek vloží do seznamu.
- **,@** (comma-at/splice): Vyhodnotí výraz (který musí vrátit seznam) a jeho prvky „vyleje“ do okolního seznamu (odstraní vnější závorky).

Na české QWERTZ klávesnici lze backtick napsat pomocí klávesové zkratky **AltGr+ý** (ekvivalentně zapsáno **AltGr+7**), která dá backtick nad další znak, který napíšeme. Když hned po zmíněné klávesové zkratce stiskneme mezerník, napíše se samotný backtick. Na anglické klávesnici se nachází na samostatné klávese vlevo nahoře pod klávesou **Esc**.

Příklady:

```
(defparameter *a* 10)
(defparameter *l* '(1 2 3))

`(seznam s a je ,*a*)      ; => (SEZNAM S A JE 10)
`(seznam s l je ,*l*)      ; => (SEZNAM S L JE (1 2 3))
`(seznam spojeny s l ,@*l*) ; => (SEZNAM SPOJENY S L 1 2 3)
```

Nyní můžeme napsat funkční makro pro **pokud**. Všimněte si použití **defmacro**:

```
(defmacro pokud (podminka pravda nepravda)
  `(cond (,podminka ,pravda)
        (T ,nepravda)))
```

Když Lisp narazí na `(pokud (= 1 1) (print "ano") (print "ne"))`, nejprve zavolá naše makro. To vrátí seznam: `(cond ((= 1 1) (print "ano")) (T (print "ne")))`. Tento seznam pak Lisp spustí. Díky tomu se **cond** postará o to, že se provede jen ta správná větev.

Další příklady maker Kdybychom si přáli vědět, která z větví se skutečně vyhodnotila, můžeme si napsat makro **hlasite-pokud**:

```
(defmacro hlasite-pokud (podminka pravda nepravda)
  `(cond
    (,podminka (progn
      (format T "Podminka ~a byla pravdiva~%" ',podminka
        ,pravda)
    )
    (T (progn
      (format T "Podminka ~a byla nepravdiva~%" ',podminka
        ,nepravda)
    )
  )
)
```

Kombinace `quote` a `unquote` (`'`, `,`) může znít absurdně – proč místo `',podminka` prostě nenapišeme `podminka`? Problém by byl, že jsme pořád v prostředí `backquote`, a Lisp by do `podminka` nedosadil naší podmínku, ale nechal by tam symbol `podminka`. Ten ale existuje jen v době překladu (jako argument makra), takže by program spadl na chybě „`variable PODMINKA is unbound`“. Pokud bychom použili jen `unquote` (`,podminka`), vložil by se sice kód podmínky, ale ten by se při běhu vyhodnotil a my bychom vypsali výsledek (např. `T`) místo původního výrazu.

Dále si zkusme napsat makro **repeat**, které n -krát zopakuje zadaný kód.

```
(defmacro repeat (n &body telo)
  `(loop for i from 1 to ,n do
    ,@telo))
```

Všimněte si klíčového slova `&body`. Dělá to samé, co `&rest`, se kterým jsme se setkali u funkcí, a je to taky lambda list keyword. V obou případech dostaneme seznam argumentů. Díky `unquote-splicing` (`,@`) pak tento seznam vložíme do těla smyčky. Použití:

```
(repeat 4
  (print "ahoj")
  (print "svete"))
; =>
; (loop for i from 1 to 4 do
;   (print "ahoj")
;   (print "svete"))
```

Nakonec uvedeme `debug-print`, které vypíše výraz a jeho hodnotu. Zamyslete se, jak by se dalo zkombinovat s makrem `hlasite-pokud`.

```
(defmacro debug-print (promenna)
  `(format T "Hodnota ~a je ~a%" ',promenna ,promenna))
; (debug-print (+ 1 2))
; => (format T "Hodnota ~a je ~a%" '(+ 1 2) (+ 1 2))
```

Pokročilá práce se vstupem makra Zatím jsme všechny vstupy makra pouze opatrně předávali do `unquote` a `unquote-splicing`. To ale není všechno, co se s nimi dá dělat – vstupy makra jsou normální s-expressions, což jsou seznamy, a s těmi umíme pracovat.

V makru `hlasite-vyhodnot` postupně zkonstruujeme tělo `progn`, které bude vypisovat, kolik výrazů se spustí a jakou mají délku. Použité funkce jsou vysvětleny na další stránce.

```
(defun delka (vyraz) (if (atom vyraz) 1 (length vyraz)))
(defun ceska-koncovka (n) (cond
  ((= n 0) "u") ((= n 1) "") ((< n 5) "y") (T "u"))
))
(defmacro hlasite-vyhodnot(&body telo)
  (let ((pocet (length telo))
        (nove-telo '()))
    (progn
      (dolist (vyraz telo)
        (push `(format T "Vyzraz delky ~a%" ,(delka vyraz)) nove-telo)
        (push vyraz nove-telo)
      )
      `(progn
        (format T "Spoustim ~a vyzraz~a%" ,pocet ,(ceska-koncovka pocet))
        ,@reverse nove-telo
      )
    )
  )
)
```

```
)
; Zkuste:
; (macroexpand '(hlasite-vyhodnot
;   (print "ahoj")
;   (format T "svete, 1+2= ~a" (+ 1 2))
; ))
```

Funkce **atom** je predikát, který vrací pravdu, pokud daná s-expression není složená (je to číslo, symbol, řetězec nebo NIL). Umožňuje nám rozlišit atomy od seznamů s-expressions. Makro **dolist** iteruje přes prvky seznamu. V každém průchodu nastaví první argument (zde **vyras**) na aktuální prvek seznamu (zde **body**) a provede tělo cyklu. Makro **push** vloží nový prvek na začátek seznamu uloženého v proměnné (zde **nove-telo**). Jde o destruktivní operaci, která změní hodnotu dané proměnné. Funkce **macroexpand** slouží k ladění maker. Přijímá výraz (zde volání makra) a vrátí jeho expandovanou podobu.

K procvičení můžete makro zkusit upravit tak, aby řetězce, které vypisuje, zformátovalo při kompilaci. V jeho výstupu by pak nebylo format, ale pouze print.

Úlohy

Ve veřejném Github repozitáři <https://github.com/koskja/mam-lisp> najdete soubor **zadani2.lisp** s vyplnitelnými šablonami, do kterých můžete vepsat váš kód. Na konci souboru jsou testy, které ověří, že se kód chová správně na některých základních vstupech.

Pokud budete mít problémy se souborem (třeba vám bude připadat, že testy netestují, co by měly testovat, nebo jsou nějak jinak rozbité), napište na M&M Discord do channelu **lisp** nebo na email jan.koska@email.cz.

Do odevzdávátka odevzdejte soubor **zadani2.lisp** vyplněný vašim kódem.

Úloha 4.1 [1b]: *Implementujte funkci **range** podobně jako v Pythonu.*



Úloha 4.2 [1b]: *Vygenerujte seznam třetích mocnin všech lichých čísel od 1 do 100. Použijte funkce **mapcar**, **remove-if-not** a **range**.*



Úloha 4.3 [2b]: *Implementujte vlastní varianty funkcí **length**, **map**, **filter**, **left-fold**, **right-fold**¹¹ pro seznamy.*



Úloha 4.4 [2b]: *Implementujte makro **while**.*



Úloha 4.5 [3b]: *Implementujte makro **replace-atom**, které ve svém těle nahradí všechny výskyty daného atomu za jiný atom.*



Problém 4.6: *Vymyslete nějaké makro a vysvětlete, v jaké situaci byste ho použili.*



Jan Koška; jan.koska@email.cz
odevzdávejte do odevzdávátka

¹¹[https://en.wikipedia.org/wiki/Fold_\(higher-order_function\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Fold_(higher-order_function))

Téma 26 – Šifrování

Šifry od řešitelů

Šifrovací tématko je zpět a opět se radujeme nad spoustou rozmanitých šifer, které nám od vás přišly. Rozhodly jsme se proto o tuto radost podělit a otisknout některé vybrané kousky i vám k luštění i k inspiraci pro další tvorbu (problém na vymýšlení šifer už ale uzavíráme). Opět připomínáme, aby autoři šifer řešení svých šifer znovu neposílali. A teď hurá do šifrování!



Úloha 4.1 [12b]: Vyřešte následující šifry. Zajímá nás nejen heslo, ale i princip řešení, a jak jste na něj přišli.

(a) Šifra od Mgr.^{MM} Petra Bartáka:

Daniela odbouraly blbosti.

Ryj!

Emil spí.

I. sepsaná práce

Obr cupuje inauguraci.

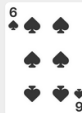
Tolerance elipsy je sedmiprocentní.

abstraktní mat

O hloupém Lobotomovi

Adiabaticky stlačil kost yetti.

(b) Šifra Karty od Mgr.^{MM} Alexandry Gauchet:



(c) Šifra od Mgr.^{MM} Natálie Jochové:

PeS Péta se nějakým způsobem vyskytl v Indii. Moc se mu tam nelíbilo, a tak se vydal jinam. Nejprve šel dva dny na sever a pak tři dny na východ – a heleme se, skončil v Japonsku. Tam se mu moooc líbilo a udělal si tu fotečku s horou Fudži.

V Japonsku se mu líbilo tak moc, že se vydal ještě na ostrov Hokkaidó, který je jeden den cesty na sever od jeho hotelu. Jakmile tam dorazil, ochutnal místní dýňovou polévku a nezapomněl se tímto kulinářským zážitkem pochlu-bit na instagramu.

Když pak večer seděl na pláži, dumal nad tím, co se asi skrývá na druhé straně téhle velké louže. A tak se tam druhý den vydal na výlet. Během tříhodinové cesty lodí na západ si užíval mořského vzdoušku kolem. Když dorazil, zjistil, že je v Rusku. To ho velmi vylekalo, a pro jistotu poslal kamarádům svoji fotku, kdyby ho už náhodou nikdy neuviděli.

Z Ruska rychle odjel zpátky lodí tam, odkud ráno přijel – na ostrov Hokkaidó. Tam si mohl oddychnout a poslat kamarádům fotku jako důkaz, že se ve zdraví vrátil do civilizace. Ze všeho toho cestování začal být už Péta unavený, a tak se vydal zpátky domů. Cesta na letiště na jihu mu zabrala čtyři hodiny. Pak už se jen proletěl nějakých jedenáct hodin na západ a byl zpátky doma. Jako první si zašel do svojí oblíbené hospody na jedno správně vychlazený. Na jeho instagramu se večer objevila fotečka s popiskem #jedineplzen.

(d) Šifra Projížďka autem od Dr.^{MM} Barbory Salajové:

Stalo se vám někdy, že jste si od někoho půjčili auto, on vám předal klíčky a vy jste nastoupili v domnění, že hned odjedete, ale vzápětí jste zjistili, že nevíte, jak zařadit zpátečku? Vyzkoušeli jste všechny možnosti, dopředu, dolů, dozadu... ale ani jedna z nich nechtěla fungovat? Po několika minutách tedy zvedáte telefon a voláte kamarádovi: „Promiň, že tě ruším, ale jak že se řadí zpátečka?“ Ten vám konečně poradí správný způsob: doleva a dozadu, zařadíte, a konečně jedete do vysněné destinace.

Přesně toto se mi nedávno stalo. Auto jsem si sice nepůjčovala, ale nevěděla jsem si rady, jak začít couvat. Způsob řazení mě lehce překvapil, ale což, ne všechny manuály to mají stejně. Po úspěšném zařazení zpátečky vyjízďím na silnici do vysněné destinace. Nejrychlejší cesta vede přes dálnici, na tu je to kousek, ale snad nepřejezu nájezd. V připojovacím pruhu se rozjíždím už na čtyřku a zrychluju pomalu až na nejvyšší rychlostní stupeň, pětku. Stále se na to řazení musím hrozně soustředit.

Jedu si to hezky 130 po dálnici, na předjíždění se občas hodí podřadit třeba na čtyřku, ale jinak pokračuju stálou rychlostí. Jak se kochám výhledy na hrádek v okolí, tak se pomalu blížím k malé koloně aut. Docela nečekaně zpomaluji, takže se spojkou řadím rovnou trojku, protože nic vyššího již nedává smysl. Kolona jede pomaličku vpřed a zanedlouho zjišťuje, že je způsobena silniční prací, opět. V jednu chvíli dokonce zastavíme úplně. Rozjíždět se je potřeba samozřejmě na jedničku, ale vypadá to, že dál už to pojede, takže můžu i dvojku.

Tak, to bylo příliš naivní. Kolona zase zastavila a já se musím zase rozjíždět, zase jednička. Pomalu se ploužím společně s ostatními, ale aspoň mi hrají fajn písničky. Vypadá to nadějně a myslím, že teď už to pojede. Už mám dvojku. Super. Vypadá to, že se vše rozjíždí a už zase jedou všichni stovkou.

No nic, dostávám trochu hlad, a tak asi zastavím na nejbližší benzínové pumpě. Sjíždím, zastavuji na parkovišti a jdu si něco koupit. Nastupuju zpět a zase to rozjíždění, ach jo, doufám, že se rozjede bez problému, protože v tomhle autě motor občas trochu zlobí. Zpátečka, tak, a teď jednička a jedem!

Ale ne, tak ještě nejedem, musím si ještě trochu couvnout, protože jinak dojedu maximálně do auta před sebou. Takže, zase zpátečka a povedlo se. Zpátky na dálnici, hezky se rozjet se čtyřkou stejně rychle jako ostatní a můžeme frčet.

Už se blížím ke svému sjezdu a vypadá to na prudkou zatáčku. Raději podřídíme až na trojku, abych neskončila ve svodidlech. Tak, pohoda, dále pokračuju po větší rovné silnici, kde se dá jet rychle, takže zase čtyřka. I z této velké silnice zanedlouho sjíždím a blížím se k chatě. Tak, jsem tu, už jen zacouvat na místo, zpátečka, a je to. Nakonec to jelo hezky.

(e) Šifra od Mgr.^{MM} Svatavy Šimečkové:

Mám nápad na šifru.

On mě napadl celkem nedávno.

Rým určitě používat nebudu.

Soud šifer by z toho nebyl nadšený.

Ér, kde byl rým populární, už mají řešitelé plné zuby.

Ód bych na rým mnoho nedostala.

Vím, že důležitá budou naopak první slova.

Au, jasně že si zrovna nakopnu palec.

Já mám fakt zatracenou smůlu.

Ta šifra mi ale přijde docela dobrá.

Jen doufám, že se bude líbit i řešitelům.

Jsou fakt moc šikovní.

*Ti tu šifru určitě vyluští.
Kéž by se jim i líbila.
Jo, taky doufám, že v tom nebudou hledat nic složitého.
Vždyť většina toho textu vůbec k ničemu není.
Čtou ho vůbec?
I když bych jim tam vlastně mohla dát nějakou nápovědu.
No, ale nebude to pak až moc zřejmé?
Tou nápovědou bych to taky mohla celé zkazit.
Tak udělám to?
No, asi jo.
Co když si ale té nápovědy vůbec nevšimnou?
Dvou nápověd by si všimnout mohli.
Tři určitě.
A já bych tu šifru měla co nejdříve dodělat.
Jé, ono už je tolik hodin!
Lžou ty hodiny?
Ne, jasně že nelžou.
Áá, to je textu!
Hou, mám dopsáno!*

(f) Šifra od Johany Štěchové:

71, 13, 39, 46,, 17, 39, 46,, 17, 79, 93, 31,, 13, 39, 97, 74,,

Následuje i pokračování slibované čtveřice s metašifrou od Doc.^{MM} Julie Klementové.

Úloha 4.2 [6b]:

Šifra 1

Jednoho dne seděl Tomáš u svého počítače, když náhle dostal skvělou slevu na knihu o magii.

Na pdě svého domu se naučil levitovat nad zemí pomocí starého kouzla.

Koupil si levný taliman na trhu s kuriozitami.

Najednou přišla zpráva od jeho starého přítele Vinenta, Tomáš rychle vytukal na klávesnici odpověď, že přijede.

Rozhodl se cestovat městskou hromadnou dopravou až do daleké Ameriky, do města ashingtonu.

Tm se zúčastnil rozpravy o tajemných silách v dějinách lidstva.

Během ní rozumně řekl pravdu o svých izarních schopnostech.

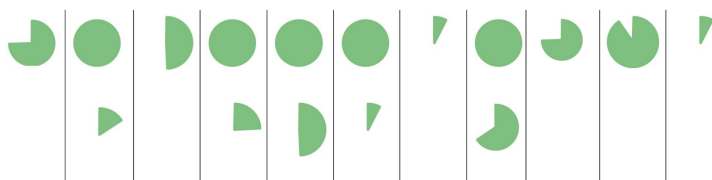
Později se učil pravopis v nové škole magie, aby nedělal tak často hrbé chyby, a dokonce se naučil i psát všemi deseti.

V jeho zahradě rostla kouzelná levandule, která svou úní uměla léčit.

Nakonec tak dodržel nejdůležitější pravidlo z ikipedie, tedy že má pomáhat ostatním.



Šifra 3



Závěrečná metašifra (šifry 2 a 4 najdete v předchozím čísle)

Šifra 1 + Šifra 2 + Šifra 3 + Šifra 4

*Olga a Pája; Olga.dvorakova17@gmail.com
odevzdávejte do odevzdávátka*



Řešení 3. dílu

Zadaní barevně najdete na <https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/32/32-3.pdf>.

Úloha 3.1

Zadání:

Vyřešte následující šifry. Zajímá nás nejen heslo, ale i princip řešení a jak jste na něj přišli. Pro potřeby tisku byla do dvou šifer doplněna velká písmena označující barvu (Č – červená, F – fialová, H – hnědá, M – modrá, R – růžová, Z – zelená, Ž – žlutá).

Stromeček**Řešení:**

K řešení je zapotřebí semaforová abeceda¹², jedna z klasických součástí šifrovacích pomůcek. Pro určení jednotlivých znaků potřebujeme tři body. Jedním je vždy černá baňka uprostřed stromečku, která určuje střed, a zbylé dva jsou vždycky dvě baňky stejné barvy. Takto dostaneme 6 písmen (protože na stromečku máme celkem 6 barev). Jak je správně seřadit za sebe nám napoví barevná světýlka na stromečku, která mají náhodou stejných šest barev jako baňky. No a pořadí se čte po drátě a normálně česky z levého horního rohu. Vyjde nám heslo VÁNOCE.

¹²[https://cs.wikipedia.org/wiki/Semafor_\(abeceda\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Semafor_(abeceda))



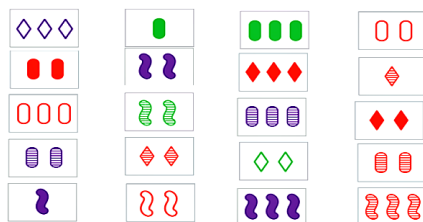
Morseovka *Chystáme je, protože on dítkem dobře míní. Vybírání hry. Smí vyprávět jiným, časoměrné verše říkat musí.*

Řešení:

K vyřešení této šifry je potřeba převést každé slovo na písmeno v morseově abecedě podle dlouhých a krátkých slabik. Každá věta tvoří jedno slovo tajenky.

.-./.../..-/..-//.-./-./-./...-/..-/..- → RESENIM JE TRAVINA.

Set



Řešení:

Tajenka této šifry se skrývá v jednotlivých sloupcích. V každém musíte najít set, to znamená trojici obrázků, které se v každé vlastnosti (barva, tvar, počet, výplň) buďto všechny liší, nebo všechny shodují. Následně si karty převedete do binárního kódu: tam, kde byl set, dáme číslo jedna, a kde nebyl, dáme 0. Tímto obdržíme písmena. Řešením je SMYK. (10011→S; 01101→M; 11001→Y; 01011→K)

Znaky

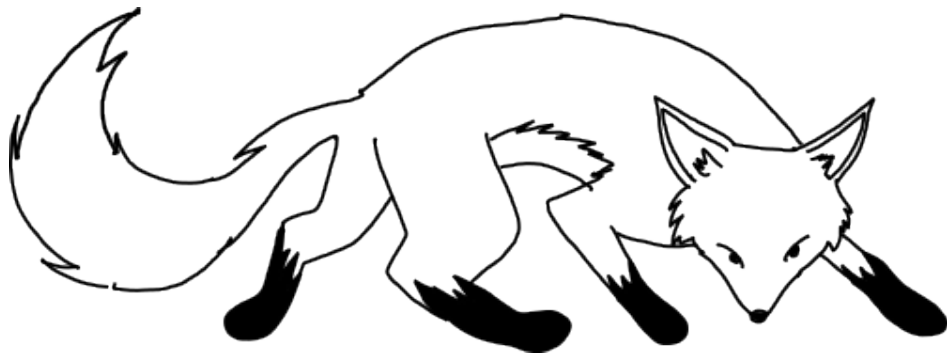
—ŠIFRY JSOU ZAJÍMAVÉ A NE—TRADIČNÍ TÉMA—

Řešení:

Po zakrytí horní poloviny šifry lze přečíst text ŠIFRY JSOU ZAJÍMAVÉ A NE—TRADIČNÍ TÉMA.

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata							$\sum_0$	$\sum_1$
				1	2	26	5	6	7			
37.	J. Kaplický	4	10,7									6,0
38.	M. Pavlas	2	4,0			4,0					4,0	4,0
39.	J. Štěchová	4	3,8			3,8					3,8	3,8
40.	K. Kučerová	1	3,0									3,0
41.–43.	L. Šemberová	Z9	1,2	1,2							1,2	1,2
	O. Plíšek	1	1,2	1,2							1,2	1,2
	M. Vojtěch	Z8	1,2	1,2							1,2	1,2
44.	J. Dingová	4	1,0									1,0
45.	J. Vospálek	3	0,6			0,6					0,6	0,6

Sloupec $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v těchto deadlinech a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 4.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy. Pokud si časopis nepřejete dále dostávat v tištěné podobě, zrušte si prosím jeho odběr v nastavení svého účtu na webu.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: mam@matfyz.cz
Web: mam.matfyz.cz
FB: [casopis.MaM](https://www.facebook.com/casopis.MaM)

