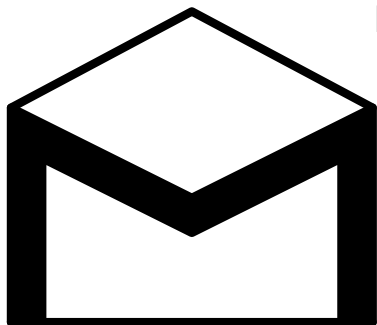


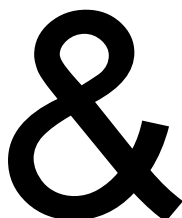
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXXI

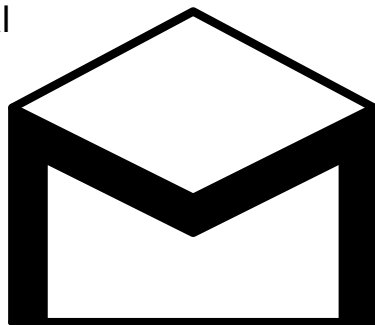
Číslo 5



MATEMATIKA



FYZIKA



INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milá čtenářko, milý čtenáři,

přišlo jaro a spolu s ním přichází i páté letošní číslo tvého oblíbeného časopisu M&M. I tentokrát na tebe čeká spousta zajímavých informací, úloh k řešení, problémů k zamyšlení i článků od tvých spoluřešitelů. Ať už jsi zkušený mazák, nebo jen náhodný kolemjdoucí, věz, že se zde můžeš dozvědět spoustu zajímavého.

Na co konkrétně se můžeš těšit? Pokračuje většina témat z minulého čísla. Ve **Vektorech a maticích** nakoukneš pod pokličku skalárnímu součinu a dozvíš se, že kolmost někdy není měřitelná úhломěrem. Pro ty, co by rádi odhalili pravdu, je tu kategorické tématko **Strojíme matiku puntíky a šípkami** – pokud tě zajímá, jaká složitější matematika se skrývá za negací, konjunkcí či disjunkcí, tak jsi na správném místě! Zkrátka nepřijdou ani informatici, na které (ale nejen na ně!) čeká **Programování v TeXu a LaTeXu**. Protože každý správný matematik, informatik, fyzik, ale třeba i biolog nebo geograf občas přijde do styku s matematikou, určitě oceniš informace, jak správně a hezky vysázet matematický text. Se znalostmi z tohoto čísla budeš tvořit úkoly do školy jako král! S tím ti pomůže i **Typografie a pravopis**, která se tentokrát také zaměřuje na matematické zápisy. Součástí tohoto tématka je také spousta článků od tvých spoluřešitelů, které rozhodně stojí za přečtení! Pro fanoušky **Speciální teorie relativity** máme bohužel špatnou zprávu, dalších úloh k řešení se již v tomto čísle nedočkájí. Připomenout a osvěžit si nabyté znalosti je však možné třeba při čtení vzorových řešení. A byla by škoda přeskóčit dva povedené články na volná témata: spolu s Doc.^{MM} Pavlou Šimovou můžeš v jejím článku **Bonbony** zavzpomínat na přednášku hosta na podzimním soustředění. A následně se v článku **Matematika a volby** od Mgr.^{MM} Alexandry Gauchet zamyslíš nad různými volebními systémy a jejich (ne)výhodami.

Nejen časopisem živ je M&Mí člověk. Nejlepší řešitelé se na začátku dubna setkají v Krkonoších, aby zde strávili nezapomenutelný týden na soustředění. Pokud se tentokrát z jakýchkoliv důvodů nemůžeš zúčastnit, nesmutni! Další soustředění nás čeká už na podzim. Ještě před prázdninami se navíc sejdeme na tradiční jarně-letní víkendovce, o jejímž termínu tě budeme včas informovat.

Přejeme ti krásně prožité první jarní dny!

Tví organizátoři

Obsah

Téma 2 – Vektory a matice	4
Téma 3 – Programování v $\text{T}_\text{E}\text{X}$ u a $\text{L}^\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X}$ u	19
Téma 4 – Typografie (a pravopis)	23
Řešitelský článek – Středník: kdy a jak ho psát	26
Řešitelský článek – Spojovník a pomlčky	27
Řešitelský článek – Apostrof	28
Řešitelský článek – Výpustka	30
Řešitelský článek – Dvojtečka	31
Řešitelský článek – Zajímavý pravopisný jev	32
Řešitelský článek – Psaní velkých písmen	33
Téma 5 – Strojíme matiku puntíky a šípkami	36
Téma 6 – Speciální teorie relativity	49
Řešitelský článek – Bonbony	52
Řešitelský článek – Matematika a volby	54



Zadání a řešení témat

1. deadline: 29. dubna 2025 | 2. deadline: 27. května 2025

Nepropáskněte poslední možnost odevzdat svá řešení a články v tomto ročníku!

Téma 2 – Vektory a matice

Díl 5: Skalární součin a kolmost

Již jsme se s vektory naučili dělat mnoho triků, ale jednu věc ještě neumíme: měřit je a porovnávat, jak moc stejným směrem vedou. V tomto díle to napravíme, a jak z nadpisu dílu plyne, pomůže nám k tomu skalární součin.

Co vlastně chceme

Tentokrát na to půjdeme z opačné strany: nejdřív si budeme klást otázku, co po takovém skalárním součinu chceme a až potom si nějaký součin ukážeme.

Z názvu „součin“ a z toho, že chceme umět porovnávat víc než jeden vektor, plyne, že skalární součin bude funkce dvou vektorů, a protože porovnávat umíme jen čísla, tak budeme chtít reálný¹ výsledek. A ať se nám snadno popisuje, tak skalární součin vektorů \vec{u} a \vec{v} rovnou budeme značit² $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$.

Protože budeme chtít pomocí skalárních součinů přiřazovat vektorům jejich velikost, bylo by dobré, aby skalární součin vektoru samého se sebou byl kladný, resp. pro nulový vektor nulový. Formálně: $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$, přičemž rovnost nastává, právě když $\vec{v} = \vec{0}$.

Při porovnávání směrů vektorů by nemělo záležet na pořadí, tedy $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle$.

Taky chceme nějak zohlednit, že pokud sečteme vektory, podobnost výsledného směru bude vyplývat z původních směrů: $\langle \vec{u} + \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$.

A protože můžeme přičíst vektor sám k sobě, tak to rovnou zobecníme na násobky vektorů: $\langle \alpha \vec{u} | \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$, což je podle symetrie výš také rovno $\langle \vec{u} | \alpha \vec{v} \rangle$.

Jak si pořídít skalární součin?

Ukazuje se, že pro reálné vektory jde každý skalární součin popsat maticí, konkrétně tzv. *positivně definitní* maticí. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je positivně definitní, pokud je symetrická a pro každý nenulový vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ platí $\vec{v}^T \mathbf{A} \vec{v} > 0$. Příslušný skalární součin $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ je pak prostě hodnota výrazu $\vec{u}^T \mathbf{A} \vec{v}$.

Můžeme si všimnout, že jsme přesně splnili naše požadavky na skalární součin, protože to přesně vynucuje definice positivně definitní matice (nezápornost, symetrie³), nebo díky distributivitě sčítání a násobení matic, příp. vlastnostem násobení matice skalárem.

A positivně definitní matice jsou, skoro až očekávatelně, strašně zajímavé. Jedná se v jistém smyslu o maticovou obdobu kladných čísel, což se používá třeba

¹Běžně se zavádí komplexní, ale toho v tématku nevyužijeme.

²Značení skalárního součinu existuje mnoho, lze se též setkat kupř. s $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, ...

³Možná jsme v tématku ještě explicitně nezmínili, jak se chová transpozice vůči násobení matic. Platí, že $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

v matematické analýze vícerozměrných funkcí. Navíc platí, že všechna vlastní čísla pozitivně definitní matice jsou kladná. Další využití najdeme ve statistice (korelační a kovarianční matice jsou vždy pozitivně semidefinitní⁴). Pro skalární součiny nás nicméně bude zajímat tvrzení o Choleského rozkladu.

Choleského rozklad: Matice \mathbf{A} je pozitivně definitní právě tehdy, když existuje dolní trojúhelníková matice $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$.

Úloha 5.1 [3b]: *Dokažte, že pro každou dolní trojúhelníkovou matici \mathbf{L} s kladnou diagonálou platí, že matice $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ je pozitivně definitní (tedy implikaci „zprava doleva“ v tvrzení o Choleského rozkladu výš).*

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 7 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{L}^T \right.$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 49 & -35 & -42 \\ -35 & 26 & 34 \\ -42 & 34 & 77 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \right.$$

Obrázek 1: příklad Choleského rozkladu

A takový Choleského rozklad se počítá „prostě tak, aby to vyšlo“: prvek a_{11} se zřejmě musí spočítat jako l_{11}^2 , protože ostatní prvky prvního řádku \mathbf{L} jsou nuly, první sloupec \mathbf{A} pak musí vyjít jako první sloupec \mathbf{L} krát l_{11} , tím dostáváme první řádek \mathbf{L}^T . Nyní můžeme podobným způsobem začít dopočítávat druhý sloupec, a pak každý další, než najdeme celou matici \mathbf{L} . Příklad rozkladu je na obrázku 1.

Úloha 5.2 [3b]: *Spočítejte Choleského rozklad následujících matic:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -6 \\ 6 & 10 & -1 & -13 \\ 2 & -1 & 21 & 7 \\ -6 & -13 & 7 & 70 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 & 9 \\ -6 & 20 & -18 & -6 \\ 3 & -18 & 21 & 9 \\ 9 & -6 & 9 & 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & -3 & -1 \\ 7 & 50 & 19 & -24 & -7 \\ 3 & 19 & 14 & -5 & -6 \\ -3 & -24 & -5 & 23 & 7 \\ -1 & -7 & -6 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

Napište aspoň prvních pár kroků, jak jste postupovali.

Poznámka spíš na okraj: Choleského rozklad se dá popsat i přímo algoritmem, jen to není tak zábavné, o to praktičtější použití má: řešíme-li soustavu rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ a víme-li, že \mathbf{A} je pozitivně definitní, můžeme soustavu vyřešit alternativně pomocí rozkladu:

⁴Positivně semidefinitní matice smí rovnosti $\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} = 0$ nabývat i pro nenulové vektory, výraz ale vždy musí být nezáporný. Positivně semidefinitní matice mají mnoho vlastností společných s pozitivně definitními v nějaké slabší verzi, neboť každá pozitivně definitní matice je současně i pozitivně semidefinitní.

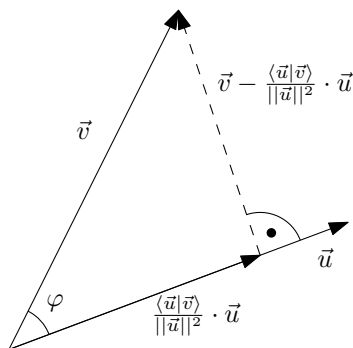
1. Najdeme matici \mathbf{L} , tedy víme, že soustava je $\mathbf{L}\mathbf{L}^T \vec{x} = \vec{b}$.
2. Označíme $\vec{y} = \mathbf{L}^T \vec{x}$ a vyřešíme soustavu $\mathbf{L}\vec{y} = \vec{b}$, což jde snadno dopředným dosazováním (první řádek přímo dává hodnotu první složky \vec{y} , ...).
3. Vyřešíme $\mathbf{L}^T \vec{x} = \vec{y}$, což jde naopak zpětným dosazováním (od prvního řádku).

Standardní a nestandardní skalární součin

Mezi skalárními součiny najdeme jeden velmi užitečný, tzv. *standardní skalární součin* $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \vec{u}^T \vec{v}$. S tímto součinem se setkáváme už od prvního dílu, neboť při násobení matic $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ je prvek c_{ij} prostě součin i -tého řádku matice \mathbf{A} a j -tého sloupce matice \mathbf{B} . Za chvíli si navíc ukážeme jeho geometrický význam.

Jsou ale ostatní skalární součiny jiné? Nejsou. Z Choleského rozkladu můžeme každý součin rozložit na $\vec{u}^T \mathbf{L}\mathbf{L}^T \vec{v} = (\mathbf{L}^T \vec{u})^T (\mathbf{L}^T \vec{v})$, kde \mathbf{L} můžeme chápat jako matici přechodu k nějaké jiné bázi, vůči které pak můžeme počítat standardní skalární součin.

A jakýže je tedy geometrický význam standardního skalárního součinu? V běžném eukleidovském prostoru \mathbb{R}^n dostaneme hodnotu $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \varphi$, kde φ je úhel svíraný⁵ vektory \vec{u} a \vec{v} a $\|\cdot\|$ značí velikost (normu) vektorů, již si zadefinujeme za okamžik.



Obrázek 2: Znázornění kolmé projekce vektoru na druhý

Důležitým prvkem tohoto vyjádření je onen kosinus krát velikost jednoho z vektorů, neboť to přímo odpovídá velikosti *kolmého průmětu* tohoto vektoru na druhý (jen to pro symetrii ještě vynásobíme velikostí druhého vektoru⁶).

Pro definici normy vyjdeme z $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2$. Pro tuto hodnotu tedy platí, že kupř. dvojnásobně dlouhý vektor bude mít čtyřnásobný skalární součin sám se

⁵Můžete si všimnout, že dva vektory vždy budou svírat úhel v rámci jedné roviny, určené počátkem soustavy souřadnic a koncovými body obou vektorů.

⁶Na obrázku 2 dělíme normou $\|\vec{u}\|$ dvakrát, protože poprvé navíc vystupuje ve skalárním součinu a podruhé potřebujeme z vektoru \vec{u} „vzít jen směr bez ohledu na velikost“, pročež vektor *znormujeme* na jednotkovou velikost.

sebou. Proto tzv. *normu indukovanou skalárním součinem* definujeme prostě jako $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$. (Tato definice je opět obecná a různé skalární součiny indukují různé normy.)

Normu jde zadefinovat také obecněji, než jen pomocí skalárních součinů, opět výčtem axiomů. Po normě $\|\cdot\|$ chceme, aby

1. $\|\vec{v}\|$ byla nezáporná a nulová byla jen pro nulový vektor,
2. α -násobky vektoru měly α -krát větší normu: $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$, a
3. Platila trojúhelníková nerovnost: součet vektorů nesmí být delší než oba vektory, tedy $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Úloha 5.3 [0,5b + 0,5b + 3b]: *Zkuste ukázat, že norma indukovaná standardním skalárním součinem je skutečně norma podle tří axiomů výš.* 🔔

Problém 5.4: *Vymyslete nebo najděte nějaké další zajímavé normy. Kde se používají? Jaké zajímavé vlastnosti mají?* 🔔

Pro nás je samozřejmě nejzajímavější klasická *eukleidovská norma*, která je rovna odmocnině součtu druhých mocnin jednotlivých souřadnic, snáz zapsáno jako

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}^T \vec{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

Když už máme normu, můžeme i zadefinovat *metriku*⁷, tedy funkci udávající vzdálenost dvou vektorů. My použijeme prostě normu rozdílu: $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Dále můžeme zadefinovat *kolmost*: vektory \vec{u} a \vec{v} jsou kolmé, pokud $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0$. Kolmost buď opět definujeme vzhledem ke konkrétnímu skalárnímu součinu, nebo (častěji) prostě uvažujeme kolmost vůči standardnímu skalárnímu součinu. A samozřejmě, v klasickém eukleidovském prostoru a pro standardní skalární součin to přesně odpovídá tomu, že vektory svírají pravý úhel (nebo je aspoň jeden z nich nulový), neboť se kolmý vektor promítne do jednoho bodu, totiž počátku soustavy souřadnic (vizte obrázek 2).

Metoda nejmenších čtverců

Poslední trik, který si ukážeme, se týká statistiky, konkrétně fitování funkcí.⁸ Mějme soustavu lineárních rovnic, kterých je „příliš mnoho“ – při řešení Gaussovou–Jordanovou eliminací sice mají v každém sloupci pívota, nakonec ale vyjdou řádky typu „ $0 \cdot x = \text{něco}$ “, které nelze splnit. Chceme proto najít nějaké řešení, které bude „co nejbliž“ správnému řešení.

⁷I metriku jde zadefinovat obecně, axiomy jsou podobné jako pro normu: vzdálenost dvou různých vektorů je kladná, na pořadí nezáleží, vzdálenost vektoru od sebe samého je nulová a platí trojúhelníková nerovnost.

⁸*Fitováním dat* nějakou funkcí (tzv. *fitovací funkcí*) myslíme snahu najít vhodné parametry té funkce takové, že daná funkce bude co nejlépe odpovídat datům.

Ukažme si na (ne moc dobrém) příkladu, co se odstavcem výš myslí: Představme si, že máme nějakou skupinu lidí a snažíme se najít lineární závislost mezi jejich věkem v a výškou h , tedy předpokládáme předpis $h = a \cdot v + b$ a hledáme koeficienty a a b , které naši vytoženou závislost nejlépe aproximují. Soustavu rovnic pak tvoří řádky s doplněnou výškou a věkem pro každého člověka:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \\ 16 & 1 \\ 22 & 1 \\ \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 110 \\ 150 \\ 168 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Výše vidíme opět rovnici tvaru $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ (rozměrově: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$), přičemž tentokrát ale chceme, aby si levá a pravá strana rovnosti byly co nejbliž, tedy $\|\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}\|$ bylo co nejmíň.⁹ Abychom se vyhnuli odmocňování, budeme se zabývat druhou mocninou normy, tedy

$$\|\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}\|^2 = (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b})^T(\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}) = (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b})_1^2 + (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b})_2^2 + \dots + (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b})_m^2.$$

Hledáme co nejllepší vektor $(\mathbf{A}\vec{x}^* - \vec{b})$ kolmý na každý vektor tvaru $\mathbf{A}\vec{x}$. Vektory $\mathbf{A}\vec{x}$ totiž tvoří podprostor \mathbb{R}^m a nejkratší vzdálenosti mezi nějakým podprostorem (přímkou, rovinou, ...) a bodem je kolmá úsečka na tento podprostor.

Umně teď využijeme transpozice. Nejprve připomeňme, že když dáme vektory \vec{v}_i nějakého prostoru do sloupců matice \mathbf{M} , pak výraz $\mathbf{M}\vec{x}$ dává přes všechna \vec{x} všechny vektory generované sloupci \mathbf{M} . Tentokrát ale hledáme vektor, jehož součin s každým z těchto vektorů bude nulový, tedy $\vec{v}_i^T \vec{x} = 0$ pro všechna i , a protože při násobení matic spolu řádky levé matice neinteragují, je to ekvivalentní s řešením rovnice $\mathbf{M}^T \vec{x} = \vec{0}$.

V řeči našich původních vektorů tedy řešíme rovnici $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\vec{x}^* - \vec{b}) = \vec{0}$, tedy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\vec{x}^* = \mathbf{A}^T\vec{b}$. Vektor \vec{x}^* je pak hledaným nejlepším přibližným řešením soustavy rovnic. (Pro zajímavost podotkněme, že matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je vždy pozitivně semidefinitní, a pokud má matice \mathbf{A} pivota v každém sloupci při Gaussově–Jordanově eliminaci, pak dokonce pozitivně definitní.)

Úloha 5.5 [2b + 1b]: *Najděte metodou nejmenších čtverců nejlepší lineární závislost výšky na věku z příkladu výš a diskutujte, proč je to špatný příklad. Bonusový bod za to, když rovnici vyřešíte pomocí Choleského rozkladu.*

Problém 5.6: *Najděte si vhodná data a vhodný tvar fitovací funkce a pomocí metody nejmenších čtverců spočítejte nějakou zajímavou závislost. (Fitovat lze kupř. libovolným polynomem)*

Zkuste zdůvodnit, proč by ve vašich datech taková závislost měla být a ideálně i volbu fitovací funkce.

⁹Pro úplnou formálnost doplníme, že uvažujeme vzdálenost danou eukleidovskou normou, tedy indukovanou standardním skalárním součinem $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^T \vec{u}}$.

Vzorová řešení úloh 3. dílu

Úloha 3.1

Zadání:

Rozhodněte, zda vektory $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ generují celý prostor \mathbb{R}^3 , a pokud ne, určete rovinu nebo přímku, kterou generují. Rovinu/přímku určete rovnicí/rovnice-mi tvaru¹⁰ $ax + by + cz = 0$, které splní všechny body prostoru (hledejte tedy správné parametry a, b, c). Pokud vám takových rovnic vyjde víc, dejte si pozor, aby jedna nebyla násobkem druhé (slibujeme, že na popis stačí nejvýš dvě takové rovnice).

Řešení:

V tuhle chvíli umíme jen řešit rovnice, takže zkusíme vyřešit soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 0 & x \\ -3 & 5 & -9 & y \\ 2 & -5 & 11 & z \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{5x+4y}{18} \\ 0 & 1 & -3 & \frac{5x+10y}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5x+22y+18z}{3} \end{array} \right).$$

Z posledního řádku je vidět, že nejde vyjádřit vektory, pro které $5x + 22y + 18z \neq 0$, kupř. vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vidíme tedy, že tyto vektory negenerují celý prostor \mathbb{R}^3 . A současně tedy dostáváme kýženou rovnici – všechny ostatní vektory vyjádřit lze, protože pro ně budou existovat parametry α, β, γ , kterými budeme násobit sloupce. Nenulové řádky tedy dávají rovnosti $\alpha - 2\gamma = \frac{5x-4y}{18}$ a $\beta - 3\gamma = \frac{5x+10y}{3}$, jež lze splnit třeba volbou $\gamma = 0$ a přímým dosazením za α, β pro libovolné x, y, z . A protože máme jen jednu rovnici, jedná se o rovinu. Naše rovnice tedy skutečně vyjadřuje podprostor generovaný zadanými vektory.

Nabízíme ještě další alternativní možnost řešení – můžeme řešit rovnice tvaru $ax + by + cz = 0$, jak naznačuje zadání. Naše body dosadíme za x, y, z , čímž dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 6a - 3b + 2c &= 0 \\ -4a + 5b - 5c &= 0 \\ 0a - 9b + 11c &= 0. \end{aligned}$$

Opět vyřešíme Gaussovou–Jordanovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & 11 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-5}{18} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-11}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{5}{18} \cdot c \\ b &= \frac{11}{9} \cdot c. \end{aligned}$$

¹⁰Tady využíváme faktu, že se jedná o lineární prostor, který nutně obsahuje i nulový vektor (přímka či rovina tedy prochází počátkem soustavy souřadnic), jinak by na pravé straně rovnosti byl další parametr.

Dosazením nám zbyde jeden volný parametr¹¹, který odpovídá tomu, že rovnici roviny můžeme vynásobit libovolným číslem a stále popisuje stejnou rovinu. Dosadíme tedy $c = 18$, čímž dostaneme rovnici $5x + 22y + 18z = 0$.

Úloha 3.2

Zadání:

Dokažte obměnu opačné implikace: pokud je množina G generátorů nějakého prostoru lineárně závislá, pak lze každý vektor $\text{span}(G)$ vyjádřit více různými kombinacemi.

Řešení:

Označme si generátory jako $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = G$. Víme, že jsou lineárně závislé, takže některý generátor \vec{v}_k můžeme vyjádřit jako kombinaci ostatních generátorů, tedy

$$\vec{v}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i \vec{v}_i.$$

Teď přijde šikovný trik: $\vec{v}_k - \sum_{i=0, i \neq k}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$ a toto vyjádření nulového vektoru zjevně nemá všechny koeficienty nulové (u \vec{v}_k je jednička). Tím pádem každý vektor $\vec{u} \in \text{span}(\{G\})$ můžeme vyjádřit různými způsoby tím, že naši kombinaci nulového vektoru přičteme různě-krát. Všechny se budou lišit minimálně v koeficientu u \vec{v}_k , jedná se tedy o různé kombinace.

Úloha 3.3

Zadání:

Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V :

$$1. M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^3 \text{ (tj. chcete do } M \text{ přidat další vektory tak, aby } \text{span}(M) = \mathbb{R}^3 \text{ a } M \text{ byla lineárně nezávislá)}$$

$$2. M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^4$$

Řešení:

Asi nejsnazší je prostě danou množinu doplňovat lineárně nezávislými vektory, dokud nějaké existují. Trochu chyták (záměrně) byl v tom, že v první podúloze je vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineárně závislý na ostatních $(2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix})$, ale třeba $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ už je správné řešení úlohy. Pro druhou podúlohu můžeme přidat třeba $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nabízí se otázka, kdy přestat přidávat vektory. Buď bylo možné předbíhat a v následující části třetího dílu si přečíst, že báze jsou všechny stejně velké, tedy

¹¹Pokud by žádný volný parametr nezbyl, byl by popsán celý prostor a rovnice by byla $0=0$. Pokud by jich bylo víc, jedná se o přímku (či dokonce bod), který popíšeme dvěma (resp. třemi) rovnicemi.

do první množiny se má přidat jeden vektor a do druhé dva, nebo bylo možné mechanicky spočítat soustavu rovnic. V takovém případě se ptáme, pro jaké pravé strany soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ nemá řešení (takový vektor je pak lineárně nezávislý), podobně jako v prvním řešení úlohy 3.1 výše.

Úloha 3.4

Zadání:

Dokažte lemma o výměně.

Řešení:

Opět si vektor \vec{w} vyjádříme jako kombinaci generátorů $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$. A všimneme si, že aspoň jeden koeficient α_k je nenulový (jinak by \vec{w} byl nulový vektor). A teď už jen rovnicovými úpravami prohodíme \vec{w} a \vec{v}_k :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i && | - \alpha_k \vec{v}_k \\ \vec{w} - \alpha_k \vec{v}_k &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} \alpha_i \vec{v}_i && | - \vec{w} \\ -\alpha_k \vec{v}_k &= -\vec{w} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} \alpha_i \vec{v}_i && | \div (-\alpha_k) \\ \vec{v}_k &= \frac{1}{\alpha_k} \vec{w} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \vec{v}_i. \end{aligned}$$

Tím je vyjádřen vektor \vec{v}_k pomocí $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}$, zbývá odargumentovat, že se nezměnil generovaný prostor P . Určitě se nezmenšil, protože v původním vyjádření vektoru $\vec{u} \in P$ můžeme rozepsat \vec{v}_k pomocí poslední rovnice, tedy všechny vektory původního prostoru jsou i v novém prostoru. A zvětšit se taky nemohl, protože teď můžeme opět vyměnit vektory \vec{w} a \vec{v}_k , čímž zjevně dostaneme původní prostor P , který ale podle předchozí věty obsahuje všechny vektory nového prostoru. Prostor jsme tedy zachovali.

Úloha 3.5

Zadání:

Dokažte Steinitzovu větu o výměně. (Smíte použít lemma o výměně, i pokud ho nemáte dokázané.)

Řešení:

Myšlenka řešení je přímočará: chceme prostě oněch m lineárně nezávislých vektorů (u -ček) postupně vyměnit za generátory P (v -čka) pomocí lemmatu o výměně. Lemma nám slibuje, že každý takový vektor půjde vyměnit, jen musíme ověřit, že při žádné výměně nevyměníme u -čkový vektor za jiný u -čkový vektor. Ale při každé výměně bude mít nenulový koeficient i nějaký v -čkový vektor, za který aktuální u -čko vyměníme. (Kdyby takový neexistoval, znamenalo by to, že aktuální u -čko

umíme vyjádřit jen z ostatních u -ček, což je spor s tím, že u -čka byla lineárně nezávislá.)

A teď už jen ověříme, že jsme splnili všechno, co věta chtěla: máme množinu generátorů poskládanou ze všech u -ček a zbylých v -ček (a ony indexy k_i jsou pak prostě čísla těch v -ček, jež zbyla). Ještě zdůvodníme, že skutečně $m \leq n$: Kdyby $m > n$, pak jsme v postupu v nějakém kroku vygenerovali P jen pomocí vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, ale tím pádem vektor \vec{u}_m buď šel vyjádřit z ostatních u -ček, nebo neleží v prostoru P , obojí je spor s předpokladem.

Znění věty bylo nezáměrně napsané v opačném pořadí, než jej dokazujeme, a několik z vás to zmátlo. Za to se omlouváme.

Úloha 3.6

Zadání:

Popište, jak zkonstruovat matici přechodu mezi libovolnými dvěma bázemi. Hint: uvědomte si, které matice přechodu už známe a jaké musí mít matice přechodu vlastnosti.

Řešení:

Určitě známe matici ${}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_B$: vektory báze B použijeme jako sloupce matice ${}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_B$, čímž vektor $[v]_B$ rozepíšeme v kanonické bázi (jedná se o nám známé rozepsání lineární kombinace). Současně víme, že ${}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_B$ je regulární matice, neboť báze je tvořena lineárně nezávislými vektory.

Odsud už jen využijeme známých faktů o násobení matic a o inverzní matici: ${}_C[\mathbf{id}]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_C^{-1}$, ${}_C[\mathbf{id}]_B = {}_C[\mathbf{id}]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[\mathbf{id}]_B$.

Zmíňme, že manipulaci se symboly se můžeme vyhnout: kanonická báze není výjimečná, tedy matici ${}_C[\mathbf{id}]_B$ můžeme konstruovat i rovnou tak, že jako její sloupce použijeme vektory báze B vyjádřené vzhledem k bázi C (což je jen zobecnění prvního odstavce tohoto řešení).

Úloha 3.7

Zadání:

Popište všechny podprostory \mathbb{R}^3 obsahující vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Popište podprostory buď pomocí rovnic, nebo jako obal lineárně nezávislých vektorů.

Řešení:

Rozeberme si problém podle dimenzí: Existuje nutně jen jeden podprostor dimenze 1: přímka $\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ a jen jeden prostor dimenze 3: celé \mathbb{R}^3 , jako obal třeba $\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$. Podprostory dimenze 2 jsou roviny obsahující onu jednorozměrnou přímku, tedy zbývá najít, které vektory jsou lineárně nezávislé. Lineárně závislé vektory jsou vektory tvaru $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$. Tedy každý vektor s nenulovou druhou složkou nebo jehož třetí složka není opačná hodnota k polovině první složky je nezávislý, a potom $\text{span}\left(\left\{v, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ tvoří podprostor dimenze 2.

Pokud chceme vyjádřit podprostory pomocí rovnic, můžeme postupovat stejně jako v úloze 3.1. Pro $\text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$ vyjdou rovnice dvě, pro celý prostor \mathbb{R}^3 žádná.

Úloha 3.8

Zadání:

Už víme, že \mathbb{R}^n , tedy n -tice reálných čísel (pro fixní n) spolu se sčítáním vektorů a násobením skalárem z prvního dílu (nad tělesem reálných čísel, tj. skalárně násobíme také reálnými čísly), tvoří lineární prostor. Rozhodněte, zda lineární prostor tvoří i následující množiny: \mathbb{Q}^n nad \mathbb{Q} , \mathbb{Z}^n nad \mathbb{Z} , \mathbb{R}^n nad \mathbb{Q} (tj. jako vektory bereme n -tice reálných čísel, ale násobit skalárem (\odot) je smějí jen racionálními čísly), \mathbb{Q}^n nad \mathbb{R} (naopak násobíme n -tice racionálních čísel reálnými skaláry).

Všechny prostory v minulém odstavci uvažujeme s klasickým vektorovým sčítáním „po složkách“ a tělesa s klasickými operacemi. (Nezaručujeme, že zmíněná tělesa jsou skutečně tělesa – pokud některé není, dokažte to o něm.)

Řešení:

Tohle byla jen mechanická úloha, jejíž striktně formálním řešením by byla spousta výroků typu „Vektory sčítáme po složkách, sčítání celých/racionálních/reálných čísel je operace komutativní/asociativní/uzavřená, tedy součet takových vektorů je též komutativní/asociativní/uzavřený“ a „vektor samých nul je celý/racionální/reálný vektor, jehož přičtením se druhý vektor nezmění, a tedy zůstane v původním lineárním prostoru“.

Proto tu uvedeme jen případy, kdy definici porušujeme: \mathbb{Q}^n nad \mathbb{R} není lineární prostor, protože pokud vektor vynásobíme π , dostaneme vektor, který není racionální, takže není v daném prostoru. A dále \mathbb{Z} ani není těleso, neboť v něm neexistují převrácená čísla (dvojku nemůžeme ničím vynásobit tak, aby vyšla jednička).

Pro úplnost uvedme, že \mathbb{Q}^n nad \mathbb{Q} i \mathbb{R}^n nad \mathbb{Q} lineární prostory tvoří, byť druhý zmíněný nemá konečnou množinu generátorů (vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou v takovém prostoru lineárně nezávislé).

Problém 3.9

Zadání:

Najděte na internetu nebo vymyslete příklady lineárních prostorů (a příp. odpovídajících těles), jež nepracují s čísly (ani jejich n -ticemi).

Řešení:

Typicky jste navrhovali prostor reálných funkcí se sčítáním funkčních hodnot v každém bodě a násobením reálnými čísly. Bc.^{MM} Filip Dvořák k tomu dodává, že v takovém prostoru je derivace lineární transformací. Mgr.^{MM} Alexandra Gauthet a Mgr.^{MM} Petr Starý dále zmiňují prostor polynomů, který je podprostorem prostoru reálných funkcí. Naopak Doc.^{MM} Julie Klementová zobecňuje, že funkce do libovolného tělesa a z libovolné množiny budou tvořit lineární prostor.

Kromě toho Mgr.^{MM} Alexandra Gauchet a Doc.^{MM} Julie Klementová zmiňují ještě prostor matic jako takových a prostor posloupností (jež lze chápat buď jako nekonečné vektory, nebo jako funkce z přirozených čísel do nějakého tělesa).

Vzorová řešení úloh 4. dílu

Úloha 4.1

Zadání:

Jak z determinantu inverzní matice vypočítáme determinant původní matice?

Řešení:

Řešení na dvě slova: „převrácenou hodnotou“ – pokud inverzní matice vyrobí α -násobný rovnoběžnostěn, pak původní matice musí vyrobít $\frac{1}{\alpha}$ -násobný rovnoběžnostěn, aby jejich kombinací vznikla původní hyperkrychle o jednotkovém objemu.

Úloha 4.2

Zadání:

Odvodte z toho, co je napsáno výš a v předchozích dílech (hlavně ve druhém), že determinant singulární matice je nula.

Řešení:

Vyjdeme z faktu, že singulární matice (označme ji \mathbf{M}) má lineárně závislé sloupce – necht' konkrétně sloupec \vec{m}_{*k} jde vyjádřit jako $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \alpha_i \vec{m}_{*i}$. Pokud tedy vynalezeme sloupcové úpravy, bude možné tento sloupec buď vynulovat, nebo dokonce některý z předchozích sloupců zduplikovat. A specificky k tomu budeme používat matice přičtení α -násobku jednoho sloupce ke druhému.

Inspirujeme se proto v řešení problému 2.6 a zamysleme se, co se stane, když maticí pro přičtení α -násobku i -tého řádku k j -tému budeme matici \mathbf{M} násobit zprava. Ve vzorovém řešení tohoto problému ve třetím čísle píšeme, že taková matice je prostě jednotková matice s hodnotou α na pozici (j, i) . A vida, tahle matice při násobení zprava přičítá α -násobek j -tého sloupce k i -tému. Víme tedy, že se jedná o regulární matici s determinantem 1.

Nyní tedy stačí poodčítat příslušné α_i -násobky sloupců od sloupce \vec{m}_{*k} , čímž se z k -tého sloupce stane nulový. Celou dobu násobíme matici maticemi s jedničkovým determinantem, takže tato nová matice \mathbf{M}' má stejný determinant jako původní \mathbf{M} .

Teď si vezmeme na pomoc úpravu násobení k -tého sloupce hodnotou¹² $\beta > 1$. Asi nepřekvapivě se jedná o matici násobení k -tého řádku β -krát, když ji použijeme zprava. Tato matice má tedy determinant β .

A teď si všimneme, že se původní matice nezměnila, tedy $\det(\mathbf{M}') = \beta \det(\mathbf{M}')$. A protože jsme volili $\beta > 1$, jediné řešení je $\det(\mathbf{M}') = \det(\mathbf{M}) = 0$.

¹²Je úplně jedno, čím budeme násobit, pokud to nebude jednička a nula, tohle bylo nejsnazší zapsat ☺

Další možnost byla zduplikovat řádky a pak je zkusit prohodit, což vedlo na $\det(\mathbf{M}) = -\det(\mathbf{M})$. V čísle to nepíšeme, ale pro singulární matice dokonce platí, že při Gaussově–Jordanově eliminaci se v nich některý řádek vynuluje, takže by ve skutečnosti stačilo používat řádkové úpravy a pak provést stejný trik.

Úloha 4.3

Zadání:

Jak můžeme snadno spočítat determinant

- *diagonálních matic (1b) a*
- *horních trojúhelníkových matic (2b)?*

Poznámka: pro dolní trojúhelníkové matice vyjde řešení analogicky, jen se to hůř představuje.

Řešení:

V obou případech se jedná prostě o součin diagonály, neboť při Gaussově–Jordanově eliminaci potřebujeme jednak tuto diagonálu přenásobit na jedničky a jednak vynulovat prvky nad diagonálou v případě horní trojúhelníkové matice. Prvek a_{ii} na diagonále se převede na jedničku pomocí matice s determinanem $1/a_{ii}$, prvky nad diagonálou následně přičtením násobku tohoto řádku výš, matice čehož mají determinant 1. A jak víme z úlohy 4.1, potřebujeme vzít převrácenou hodnotu součinu matic řádkových úprav. Výsledný determinant je tedy $\left(\frac{1}{a_{11}} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1\right) \cdot$

$$\left(1 \cdot \frac{1}{a_{22}} \cdot \dots \cdot 1\right) \cdot \dots \cdot \left(1 \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_{nn}}\right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Úloha 4.4

Zadání:

Uřčete determinant následujících matic \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Pomineme fakt, že se ve skutečnosti jedná o matice elementárních řádkových úprav a odvodíme výsledky přímo z definice. Pro matice \mathbf{A} a \mathbf{B} je jediná permutace sloupců, která nedá nulový součin diagonály, ta „základní“ (pokud čtvrtý sloupec kamkoliv přesuneme, na diagonále bude nula, tedy ani druhý sloupec matice \mathbf{B} přesunout nemůžeme), takže $\det(\mathbf{A}) = 7$, $\det(\mathbf{B}) = 1$. U matice \mathbf{C} naopak musíme třetí a pátý sloupec prohodit, což je jedno prohození a součin diagonály je pak 1, tedy $\det(\mathbf{C}) = -1$.

Úloha 4.5

Zadání:

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li $\det(\mathbf{A}) = d$, jaký je $\det(\mathbf{A}^T)$?

Řešení:

Nejprve si všimněme, že zpřeházení sloupců \mathbf{A}^T je vlastně zpřeházení řádků \mathbf{A} . A teď si všimněme, čím se liší matice \mathbf{A} se zpřeházenými sloupci podle libovolné permutace π (označme ji \mathbf{A}_s) od matice se zpřeházenými řádky podle téže permutace \mathbf{A}_r . Specificky o diagonálách takových matic.

Když přehazujeme řádky, prvky matice zachovávají svůj sloupec, a obráceně, permutace na sloupcích zachovává řádky prvků. A teď uvažujme, že na diagonále matice \mathbf{A}_s je prvek, který byl původně na pozici i, j . Protože jsme zachovali řádek, tak nově je tento prvek na pozici i, i , tedy výsledná permutace prohodila sloupce i a j . To ale znamená, že v matici \mathbf{A}_r byly prohozeny řádky i a j , prvek a_{ij} se tedy nachází na pozici j, j , tedy také na diagonále. To tedy znamená, že pro každou permutaci proházení řádků a sloupců vede k diagonálám lišícím se jen v pořadí prvků, a to neovlivní součin diagonály. Tedy $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Úloha 4.6

Zadání:

Odvodte explicitní vzoreček pro i -té Fibonacciho číslo. Tady je zhruba návod:

1. Najděte matici, která bude dávat vždycky další Fibonacciho číslo, tj. $\mathbf{A} \begin{pmatrix} F_{i-1} \\ F_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i \\ F_{i+1} \end{pmatrix}$ (1,5b).
2. Najděte vlastní čísla této matice (1,5b).
3. Najděte vlastní vektory příslušné těmto číslům (1,5b).
4. Poskládejte správnou diagonální matici (\mathbf{D} výše), matici podobnosti (\mathbf{S}) a její inverzi (1b).
5. Vynásobte obecně $\mathbf{A}^i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{D}^i \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1,5b).
6. Tadá! První složka tohoto vektoru je přesně i -té Fibonacciho číslo.

(Postup si případně upravte podle vlastní chutě, nevyžadujeme konkrétní mezikroky, pokud bude jasné, co zrovna počítáte. Ale zkuste se držet nějakého lineárně-algebraického přístupu (s maticemi))

Řešení:

Postupně podle návodu v zadání: Hledaná matice je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (prostě rozepsáním definice, že druhý vektor je $\begin{pmatrix} F_i \\ F_{i+F_{i-1}} \end{pmatrix}$ a vykroukáním).

Vlastní čísla jsou řešením rovnosti $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, tedy $(-\lambda) \cdot (1 - \lambda) - 1 \cdot 1 = 0$. Roznásobením vede na kvadratickou rovnici $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, jejímž řešením jsou dva kořeny $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vlastní vektory jsou pak netriviální řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\vec{x} = \vec{0}$, pro obě i . Pro $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ tedy¹³:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array} \right)$$

Z toho máme podmínky na složky vlastního vektoru $x_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}x_2$, jeden z vlastních vektorů příslušný k číslu λ_1 je $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$. Obdobným způsobem pro $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dostáváme vlastní vektor $(-\frac{1-\sqrt{5}}{2})$. Podotkněme, že na konkrétní volbě vlastního vektoru nezáleží, protože volba velkého vektoru v matici podobnosti se vyruší s příslušnou hodnotou v její inverzi. My jsme v řešení zvolili vektor bez zlomku.

Matice podobnosti je tedy

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & -1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

diagonální matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Zbývá spočítat¹⁴ inverzní matici \mathbf{S}^{-1} :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & -1-\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} & \frac{1}{\sqrt{5}-1} & 0 \\ 0 & 2-2 \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} & \frac{-2}{\sqrt{5}-1} & 1 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-3-\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{5}+1}{4} & 0 \\ 0 & 5+\sqrt{5} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \frac{-1-\sqrt{5}}{2(5+\sqrt{5})} & -\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \frac{1}{5+\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2(5+\sqrt{5})} & \frac{1}{5+\sqrt{5}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5+\sqrt{5}}{20} \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Juch. Teď už jen obecně vyjádříme součin. Pro jednoduchost nejprve vyjádříme pomocí jmen prvků matic, pak až doplníme konkrétní hodnoty. Navíc pro odlišení budeme prvky matice \mathbf{S}^{-1} značit písmenkem r :

$$\mathbf{SD}^i \left(\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbf{SD}^i \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} d_{11}^i r_{12} \\ d_{22}^i r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}d_{11}^i r_{12} + s_{12}d_{22}^i r_{22} \\ s_{21}d_{11}^i r_{12} + s_{22}d_{22}^i r_{22} \end{pmatrix}.$$

¹³Úprava rovnice spočívá v přičtení $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ -násobku druhého řádku k prvnímu

¹⁴V našem postupu rovnítko odpovídají hlavně sečtení a usměrnění zlomků. Připomeňme proto, jak se usměrňují zlomky: máme-li zlomek se jmenovatelem tvaru $a + b\sqrt{x}$, rozšířením zlomku výrazem $a - b\sqrt{x}$ dostaneme jmenovatel $a^2 - b^2x$, který už neobsahuje odmocninu.



Dosadíme a budeme chvíli upravovat:

$$\begin{aligned} & \left((\sqrt{5} - 1) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^i \left(\frac{5+\sqrt{5}}{20} \right) + (-1 - \sqrt{5}) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^i \left(\frac{5-\sqrt{5}}{20} \right) \right) = \\ & \left(2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^i \left(\frac{5+\sqrt{5}}{20} \right) + 2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^i \left(\frac{5-\sqrt{5}}{20} \right) \right) = \\ & = \left(\frac{(1+\sqrt{5})^i 4\sqrt{5} - (1-\sqrt{5})^i 4\sqrt{5}}{2^i \cdot 20} \right) = \left(\frac{\sqrt{5} \left((1+\sqrt{5})^i - (1-\sqrt{5})^i \right)}{5 \cdot 2^i} \right) \\ & = \left(\frac{(1+\sqrt{5})^i (5+\sqrt{5}) + (1-\sqrt{5})^i (5-\sqrt{5})}{2^i \cdot 10} \right) = \left(\frac{\sqrt{5} \left((1+\sqrt{5})^{i+1} - (1-\sqrt{5})^{i+1} \right)}{5 \cdot 2^{i+1}} \right). \end{aligned}$$

V poslední úpravě druhého řádku jsme využili toho, že z prvního řádku už víme, co chceme, aby vyšlo, takže jsme sčítance ve jmenovateli rozšířili $(1 + \sqrt{5})$ resp. $(1 - \sqrt{5})$ a usměrnili. Úpravy jsou samozřejmě jen „pro krásu“, nicméně teď je vidět, že jsme dostali známý vzorec

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^i \right).$$

LEdo, Marian, Fany; lingebr@leodoian.cz
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 3 – Programování v \TeX u a \LaTeX u

V tomto díle si rozebereme, jak se v \LaTeX u (a trochu v \TeX u) sází matematika. To je nejužitečnější část \TeX u, takže ji často můžeme nalézt i na webových stránkách, které umí nějakou podmnožinu např. díky KaTeXu nebo MathJaxu. Zase se podíváme spíše na zajímavé detaily a částečně na to, jak sazba matematiky v \TeX u funguje. Pokud chcete získat jen nějaké „uživatelské“ základy, pak vám více pomůže příslušná kapitola *Ne úplně nejkratšího úvodu do formátu $\LaTeX 2_{\epsilon}$* ¹⁵, který je sice trochu zastaralý, ale na základy rozhodně stačí. Několik užitečných maker (souvisejících hlavně s typografií) je v následujícím témátku (strana 23).¹⁶

Díl pátý: Matematika

V \LaTeX u je důležitým základem matematiky balíček `amsmath` (vytvořený *American Mathematical Society*, dnes již pod správou samotného projektu \LaTeX), tedy některé věci v tomto díle tiše předpokládají `\usepackage{amsmath}`. Drobná zlepšení přidává balíček `mathtools`, tedy můžete místo `\usepackage{amsmath}` psát `\usepackage{mathtools}`. Ještě se může hodit `amsthm` (věty, definice, důkazy) a `amssymb`¹⁷ (další matematické symboly, navíc načítá balíček `amfonts`, který také potřebujeme, např. pro `\mathbb`).

Matematické módy¹⁸ (tj. stav, kdy \TeX sází matematiku) zahajuje a ukončuje `$` (v případě textového módu, tedy sázení matematiky na stejném řádku jako další text) nebo `$$` (v případě tzv. display módu, tedy matematiky na samostatném řádku). Pokud používáte \LaTeX , tak na `$$` hned zapomeňte. \LaTeX , aby mohl např. lépe hýbat s vertikálními mezerami kolem matematiky, zavádí makra `\[` a `\]` pro display matematiku.¹⁹

Balíček `amsmath` jde ještě dál a na matematiku na samostatných řádcích zavádí vlastní prostředí. Například `\[` je `\begin{equation*}` a `\]` je `\end{equation*}`. Všimněte si hvězdičky, ta vypíná číslování rovnic. Užitečným prostředím jsou také `align` a `alignat` (první dělá velkou mezeru na lichých `&`, druhé má parametr počet „dvojsloupečků“), v těch se oddělují řádky pomocí `\\` a zarovnávají věci následovně: vše do prvního `&` je zarovnané doprava, vše po další doleva, pak do třetího `&` zase doprava a po něm zase doleva...

Tedy liché `&` patří např. před rovnítko, sudá tam, kde nám nevadí, že bude mezeru (např. pokud máme dva sloupečky rovností, tak sudá `&` patří mezi ně, naopak pokud chceme pod sebe zarovnat jen sčítance, pak použijeme `alignat` a sudá `&` umístíme vhodně např. následovně).

¹⁵<https://mirrors.nic.cz/tex-archive/info/lshort/czech/lshort-cs.pdf>, kapitola *Sazba matematických vzorců*

¹⁶Časem se něco objeví i na mé wiki: <https://wiki.moznabude.cz>.

¹⁷Vřele doporučujeme <https://detexify.kirelabs.org/classify.html>, které vám kromě toho, jaké makro pro daný symbol použít, řekne, který balíček potřebujete.

¹⁸Ať už je matematický mód cokoliv, koho to víc zajímá, může si vzpomenout na horizontální a vertikální módy.

¹⁹Obdobně `\(a \)` sází inline matematiku. Tam by však neměl být rozdíl oproti dolarům.

```
\begin{alignat}{5}
f(x) & \{=\} \sin(x) & \{+\} & x^2 & \{+\} & 5x & \{+\} & 42 & \label{eq:f} \tag{f} \\
g(x) & \{=\} e^x & & & \{+\} & 4x & \{-\} & 6 & \notag \\
h(x) & \{=\} & & 3x^2 & & & & & \{+\} & 73 & \label{eq:h}
\end{alignat}
```

Rovnice `\eqref{eq:f}` a `\eqref{eq:h}` mají tagy (ať už pomocí `\verb|tag|` nebo tím, že environment nemá hvězdičku), kdežto prostřední rovnice nemá (obsahuje `\verb|notag|`).

$$f(x) = \sin(x) + x^2 + 5x + 42 \quad (f)$$

$$g(x) = e^x + 4x - 6$$

$$h(x) = 3x^2 + 73 \quad (1)$$

Rovnice (f) a (1) mají tagy (ať už pomocí `\tag` nebo tím, že environment nemá hvězdičku), kdežto prostřední rovnice nemá (obsahuje `\notag`).

Kategorie v T_EXu podruhé

Možná vás překvapuje, proč jsou v předchozím kódu ty `{}`. Kdo si vzpomíná na první díl tohoto tématka, ví, že v T_EXu má každý znak svoji kategorii, a podle ní se chová. V T_EXu v matematice však existují ještě typy. Ty se přiřazují nejen znakům, ale i celým skupinám znaků, a určují především to, jaké se mezi takové skupiny vloží mezery. Samozřejmě si můžeme mezery vytvořit sami, ať už pomocí `\hspace{délka}` nebo pomocí `\,`, `\:`, `\;`, `\quad`, `\qquad` (předdefinované mezery od nejmenší po největší) a `\!` (záporná mezera); ale je daleko pohodlnější zdefinovat si správně typy tak, aby se T_EX o zbytek postaral sám:

Ord: Obyčejný prvek matematické sazby, je výsledkem běžného materiálu jako písmen (i řeckých) nebo čísel, makra `\mathord{něco}`, nebo `{něco}`. Ord mezi sebou nemají mezery, což je důvod, proč vám „zmizí“ mezery, pokud se snažíte do matematiky psát obyčejný text.

Do tohoto typu se při výpočtu mezer konvertují i další typy jako Over/Under/Radical (vznikají `\overline{něco}`/`\underline{něco}`/`\sqrt{něco}`) a vykreslí čáru nad / čáru pod / odmocninu) nebo Acc (akcenty²⁰).

Bin/Rel: Binární operátor/relace, je výsledkem symbolů jako `+/=`, skupin symbolů²¹ nebo maker `\mathbin{něco}`/`\mathrel{něco}`. Bohužel pouze tehdy, když jsou kolem kompatibilní typy, tedy pokud zjistíme, že kolem binárního operátoru/relace chybí mezera, často se to dá opravit přidáním `{}` (typ Ord neobsahující nic) před/za.

Liší se v tom, že kolem relací jsou mírně větší mezery.

²⁰T_EX neumožňuje v matematice sázet diakritiku, naopak má nepřeberné množství akcentů, ty v L^AT_EXu si můžete najít např. na <https://tex.stackexchange.com/questions/177000/math-mode-accents> (většina z nich má i variantu začínající `\wide`, která se umí roztáhnout přes více znaků, např. `\widehat{xyz}`: \widehat{xyz}). A pokud nejste spokojeni s vzhledem čepičky (`\hat`), použijte balíček `realhats`.

²¹Například `:=`, místo toho je často lepší použít již připravené makro, v tomto případě `\coloneqq` z `mathtools`, protože to k sobě umí symboly umístit lépe.

Punct: Interpunkce (žádná mezera před, mezera za). Vzniká například znakem ,²² či příslušnými makry jako `\colon`²³ nebo makrem `\mathpunct{něco}` (např. `\mathpunct{.}`).

Op: Operátor (v display matematice se horní/dolní index vysází nad/pod něj). Oblíbenými jsou `\lim`, `\intop`, `\sum`, `\prod`, `\coprod`, `\bigcup` a `\bigcap`, můžeme se však setkat třeba i s `\bigoplus` nebo `\bigtimes`. Dále můžeme použít `\mathop`, ale pravděpodobně chceme spíše definovat operátor pomocí `\DeclareMathOperator*{nazevmakra}{materiál k vysázení}` (hvězdička z `nazevmakra` právě udělá typ Op).

Případně, pokud chceme jen vysázet něco nad něco jiného (např. název věty nad rovnítko), pak se hodí `\overset{\text{Lebesgue}}{=}`, případně `\underset{n}{\rightarrow}`, tj. $\overset{\text{Lebesgue}}{=} , \underset{n}{\rightarrow}$. Cool variantou je pak `n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{-krát}}` (obdobně `\overbrace`):

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-krát}}$$

Pokud nechceme, aby se indexy usadily nad/pod, ale chceme je normálně, tak za daným Op použijeme makro `\nolimits`. (V případě integrálu je to dokonce explicitně rozlišeno na `\intop` a `\int`.) Naopak v inline matematice můžeme toto chování zapnout pomocí `\limits`.

Open/Close: Otevírací/zavírací „závorka“ variabilní velikosti. Vzniká jako výsledek makra `\left/\right` následovaného podporovaným „symbolem“, tzv. delimiterm (nejčastěji `(`, `[`, `\{`, `|`, `\|`, `\lfloor/\rfloor/lceil`).

`\left` a `\right` musí být dobře spárovány (lze použít `\left./\right.`, které nevysází nic, ale chovají se jako „druhý do páru“) a vysází delimetr tak, aby obklopoval vysázené věci uvnitř. V \LaTeX u existuje ještě makro `\middle`, které vysází následující delimetr stejné velikosti jako `\left` a `\right` mezi kterými se nachází, například následující množina.

`\left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^+ \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}`

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^+ \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

Inner: Vzniká spárováním `\left` a `\right` (nebo pomocí `\mathinner`) a má kolem sebe mezery až na případ, kdy předchází Open nebo následuje Close.

²²V \TeX u je , typu Punct (a . typu ord). Proto se, bez balíčku `icomma`, desetinná čárka musí psát jako `{,}`, aby byla typu Ord a nebyla za ní mezera

²³Pozor, : je binární operátor značící poměr, srovnej `a:b` a `g\colon X \rightarrow Y`, tj. `a : b` a `g : X → Y`.

Tipy na závěr


Na správné mezery/zarovnání se může hodit makro `` (resp. `\hphantom` nebo `\vphantom`), které vytvoří „mezeru“, jako by se vysázel `neviditelný obsah`. Například matici lze zarovnat následovně.²⁴

```
\[ \begin{pmatrix} -1 & 42 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \]
```


$$\begin{pmatrix} -1 & 42 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud definujete makro, které má napsat nějakou matematiku, například makro vypisující reálná čísla, pak se může hodit makro `\ensuremath{kód}`, které v případě, že je použito mimo matematiku „obalí kód \$“, tedy pokud definujeme `\NewDocumentCommand\R}{\ensuremath{\mathbb{R}}}`, můžeme psát `\R` i v textu, nejen přímo v matematice.

Poslední tip se týká symbolů, velmi mnoho symbolů je v \LaTeX u definováno, ať už různá rovnítka (`\neq`, `\doteq`, `\simeq`), před spoustu symbolů stačí přidat `n` a dostanete přeškrtnutou verzi (`\nexists`), existují různé tečky (`\ldots`, `\cdots`, `\ddots`, `\vdots`) nebo nepřeborné množství šipek (`\rightarrow`, `\longleftarrow`, `\leftrightarrow`, `\Leftrightarrow`, `\Implies`, `\Impliedby`, `\hookrightarrow`, `\mapsto`).

 **Úloha 5.1** [1b]: *Napište makro, které vysází „XOR“ (`\mathrm{XOR}`) jako binární operátor:*

$$(a \text{ XOR } b) \text{ XOR } b = a \text{ XOR } (b \text{ XOR } b) = a.$$

 **Úloha 5.2** [2b]: *Nasimulujte environment cases pomocí environmentu `matrix` (stejně jako `pmatrix`, jen bez závorek) a pomocí `\left` a `\right`. Tj. vysázejte následující (nemusíte vytvářet obecné makro) bez použití `cases`.²⁵*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kdýž } x \geq 0, \\ -x, & \text{kdýž } x \leq 0. \end{cases}$$

Jidáš; jonas.havelka@volny.cz
odevzdávejte do odevzdávátka
(PDF) i soubory `.tex`, `.sty` a `.cls`

²⁴Zde je ale lepší použít environment `pmatrix*` z `mathtools`, který dovoluje určit si zarovnání sloupečků: `\begin{pmatrix*}[r]-1&42\2&1\end{pmatrix*}` je $\begin{pmatrix} -1 & 42 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

²⁵Všimněte si, že dostanete menší závorku a menší mezery mezi řádky. Environment `cases` (a obdobné `rcases`) nejspíše vkládá navíc nějaké podpěry.

Téma 4 – Typografie a pravopis

Minule jsme mluvili o velkých písmenech, a to hlavně z pohledu matematiky (nebo jiných věd). Matematikou se budeme zabývat i v tomto díle, jelikož většina věd využívá nějakou formu matematického zápisu (výrazů, vzorečků, rovnic, ...), tedy se snadno stane, že potřebujete vysázet nějakou matematiku.

Pravopisně na tom není nic moc zajímavého, tedy tento díl je zase více o typografii (tj. o radách, jak dospět k hezkému výsledku, spíše než o jasných pravidlech).

Díl pátý: Matematika

Matematiku lze do textu zakomponovat jak přímo „mezi slova“, tak na samostatný řádek, což je preferované u jakéhokoliv složitějšího výrazu (navíc na samostatném řádku ho lze jednodušeji označit, abychom se na něj mohli později odkázat). V obou případech je lepší, když je matematika součástí věty, tudíž často za ní následuje interpunkce. Například: Platí

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{P}$$

kde a a b jsou odvěsny a c je přepona pravoúhlého trojúhelníka. Rovnost (P) se nazývá Pýthagorova věta.

V případě samostatného řádku je otázka, jestli zarovnávat doleva nebo na střed. My, zhyčkaní \TeX em, jsme zvyklí (a přijde nám hezčí) zarovnaní na střed. Naopak někteří požadují, aby rovnice začínaly u kraje řádku.

Zarovnaní vertikální (nahoru/dolů) je pak třeba dělat s citem, příliš malé mezery před rovnicí a po ní ji „nalepí“ k textu a zhorší čitelnost, naopak velké mezery mohou způsobit, že se text okolo „rozpadne“ do vizuálně separovaných částí. Naštěstí se o toto většinou dobře postará textový procesor (nebo sázecí program), ve kterém pracujete.

Tím jsme vyřešili mezery okolo. Protože je matematické značení opravdu rozsáhlé, nastavit mezery uvnitř, aby značení hezky vycházelo, je velmi obtížné. Za základ můžeme brát, že kolem (tj. před i za) binárních operátorů a binárních relací,²⁶ se píšou mezery. Naopak za unární operátorem (pracuje pouze s tím, co je vpravo, například minus určující záporné číslo) se mezera nepíše.

V případě interpunkce (čárky oddělující prvky, nebo dvojtečka v $f: A \rightarrow B$) se mezera píše pouze za ní, stejně jako ve větě. Výjimkou jsou samozřejmě otevírací závorky (mezera pouze před) a desetinná čárka (případně desetinná tečka a odělovače tisíců). Konkrétně desetinná čárka je v matematice relativně problém, protože pokud používáte nečeský sázecí program, pak se může stát, že všechny čárky považuje za interpunkci (v \LaTeX u buď desetinnou čárku uzavřeme do závorek: {,}, nebo použijeme balíček `icomma`).

²⁶Binární („= dva vstupy“) operátory/relace jsou symboly, které dělají něco s tím, co je od nich vlevo i vpravo (např. plus nebo rovnítko). Operátory něco vrací, kdežto relace jen udávají vztah.


Důležité připomenutí je, že před fyzikálními jednotkami se píše mezera (ideálně úzká, v \LaTeXu `\,`), tedy správně je $I = 5 \text{ A}$, ne $I = 5\text{A}$.

Matematika (zejména proměnné a „nepojmenované“ funkce jako f) se většinou sází kurzivou.²⁷ Na to je třeba dávat si pozor, protože pokud chceme přímo do matematiky připsat doprovodný text (třeba nějakou spojku jako $x = y$, tedy $y = x$), pak tento text nechceme sázet kurzivou (v \LaTeXu lze v matematice použít makro `\text`). Co hůř, fyzikální jednotky (a také chemické prvky, písmeno d v derivaci a ideálně i matematické konstanty jako e nebo i) a obecně známé funkce (například: $\sin x$) se sázejí zásadně neskloněným písmem, což je hezky odliší od ostatní matematiky.²⁸

Různé fonty se používají i pro odlišení dalších věcí:

- tučné písmo (`\mathbf` v \LaTeXu) pro vektory (místo šipky) nebo matice;
- blackboard bold (`\mathbb` v \LaTeXu) pro množiny čísel (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}), matice, střední hodnotu (v pravděpodobnosti);
- kaligrafické písmo (`\mathcal` v \LaTeXu) pro kategorie, množiny množin (např. množina všech podmnožin A je $\mathcal{P}(A)$) nebo „óčkovou notaci“ v informatické složitosti (\mathcal{O}).

Samozřejmě (jako ve zbytku typografie) platí, že hlavní je být konzistentní sám se sebou (stejně každý obor/matematik používá jiné značení).

 **Problém 5.1:** *Sázeli jste někdy nějakou složitější matematiku? Pošlete nám výsledek (ideálně se zdrojovým kódem) a napište článek, s jakými problémy jste bojovali a jak jste je vyřešili.*

Řešení 3. dílu

Problém 3.3

Zadání:

Máte nějaké své oblíbené interpunkční znaménko? K čemu se používá a na jaké pravopisné/typografické chyby se při jeho použití můžeme nachytat?

Můžete si vybrat například: dvojtečku (:), středník (;), dlouhou pomlčku (—), výpusťku (...) nebo apostrof (').

Řešení:

K tomuto problému nám přišlo mnoho řešení, otiskujeme ta nejlepší:

- článek o středníku od Mgr.^{MM} Alexandry Gauchet na straně 26;

²⁷Proč? To nevím sám, myslel jsem, že hlavně kvůli \TeXu , ale očividně to má daleko delší a složitější historii.

²⁸V \LaTeXu se neskloněné písmo v matematice zapne pomocí `\mathrm`. Pro fyzikální jednotky se však může hodit spíše balíček `siunitx` a pro jména funkcí, pokud už neexistují (jako třeba `\sin`), je určitě lepší zadefinovat `\DeclareMathOperator{\nazevmakra}{vypsanytext}` a použít `\nazevmakra`, neboť tyto možnosti vloží i správné mezery okolo.

- článek o spojovníku a pomlčkách od Dr.^{MM} Michaela Ambrose a Doc.^{MM} Pavly Šimové na straně 27;
- článek o apostrofu (neboli odsuvníku) od Doc.^{MM} Dominika Kaňky na straně 28;
- články o apostrofu a dvojtečce od Mgr.^{MM} Barbory Salajové na stranách 30 a 31.

Řešení 4. dílu

Úloha 4.1

Zadání:

Jak už se píše výše, Univerzita Karlova se píše s velkým U, i když je to obecné označení. Obdobně se píše mnoho gymnázií. Najděte alespoň dva další takové názvy.

Řešení:

- **Doc.^{MM} Julie Klementová:** Městský úřad Písek, Městská knihovna Písek.
- **Mgr.^{MM} Alexandra Gauchet:** Velvyslanectví Francouzské republiky, Království České, Sdružení obcí Vrbenka, Farní úřad Jeseník.
- **Doc.^{MM} Jana Uglickich:**

Z organizací, které nesouvisejí se vzděláváním, jsem našla Hotel Týnec (podle jejich obchodních podmínek na webu jde opravdu o jejich oficiální název) nebo turistickou základnu Pastouška, kde oficiální název je podle smlouvy na webu nejspíš buď „Pastouška“, nebo „Pastouška, Sadová 304“ (a proběhlo tam JŠMF 2024). Pastouška je každopádně obecné označení pro typ budovy.

Problém 4.2

Zadání:

Více se tu o velkých písmenech rozepisovat nebudeme, ale pokud máte nějaký oblíbený jev, nebojte se o něm napsat článek. (Nezapomeňte však, že článek má něco přinést ostatním řešitelům, tedy jen vyjmenovat své oblíbené jevy stačit nebude.)

Řešení:

K tomuto problému přišla dvě řešení, a to krátký článek o psaní názvů institucí a firem od Mgr.^{MM} Alexandry Gauchet (strana 32) a jeden delší o psaní velkých písmen v historii (a němčině) od Doc.^{MM} Julie Klementové (strana 33).

*Jidáš; jonas.havelka@volny.cz
odevzdávejte do odevzdávátka*



Středník: kdy a jak ho psát

3b

Mgr.^{MM} Alexandra Gauchet

Středník se užívá pro naznačení středního stupně obsahové souvislosti ve výpovědním celku. To znamená, že text rozděluje více jak čárka, ale méně jak tečka. Středník se vždy připojuje hned za slovo a za něj se píše mezera. Na počítači se dá napsat buď stisknutím klávesy nalevo od čísla 1, nebo klávesou levý Alt stisknutou zároveň s číslem 59. Můžeme ho použít v následujících příkladech:

- ve složitějších souvětích mezi souřadnými hlavními větami;

Právní vědomí je pojem teoretický; jako každá teoretická kategorie má ovšem také hluboký a mnohostranný význam praktický, jehož hranice si sotva hned běžně uvědomujeme.

- když potřebujeme rozdělit výčet do více úrovní;

Dechové nástroje dělíme na dřevěné, mezi které patří například klarinet a zobcová flétna; žesťové, kam se řadí trubka a pozoun; vícehlasé.

- kvůli přehlednosti výčtu desetinných čísel;

Výsledky jsou 2,3; 4,2; 4,5.

- ve slovnících odděluje jednotlivé výklady slova;
- k zakončení jednotlivých položek výčtu na samostatných řádcích;
- citování zdrojů.

Zdroje:

- Internetová jazyková příručka, *Středník* [online] (2008–2025). Praha: Ústav pro jazyk český AV ČR, v. v. i. [citováno 19. 1. 2025] <<https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=173>>. ²⁹
- Krcmic.cz, *Jak napsat středník na klávesnici* [online] (2021). Michal Krčmář, c2013, [citováno 19. 1. 2025] <<https://www.krcmic.cz/jak-napsat-strednik-na-klavesnici/>>.

²⁹Práce používá data, která poskytuje výzkumná infrastruktura LINDAT/CLARIAH-CZ (<https://lindat.cz>) podporovaná Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky (projekt č. LM2023062).

Spojovník a pomlčky

4b

Dr.^{MM} Michael Ambros & Doc.^{MM} Pavla Šimová

Znaménka spojovník (-), pomlčka (–) a dlouhá pomlčka (—) vypadají na první pohled velmi podobně a ač se všechna tři používají ke spojování, každé v trochu jiné situaci.

Z jejich vzhledu můžeme odhadovat, že čím kratší „čárku“ použijeme, tím těsněji spolu spojované výrazy souvisejí. Tato intuice je správná, každé ze znamének má však svá konkrétní specifika použití, v některých případech je naopak možné použít více různých znamének.

K čemu se používají?

Označujeme-li jednu věc či osobu dvěma jmény, spojujeme tato jména spojovníkem, například *červeno-hnědá kniha* (ve významu dvou barev!) nebo *Marie Curie-Sklodowska*. Stejně tak pro těsné spojení v místních jménech používáme spojovník, například *Praha-Libeň* z úlohy 3.2. V tomto užití však může převzít funkci spojovníku pomlčka, která na rozdíl od něj může mít z obou stran mezeru, například ve spojení *Brno – Královo Pole* pak zbytečně nevznikne nesmyslná dvojice Brno-Královo. Spojovník použijeme také pro připojení spojky *-li* nebo na označování neúplných slov, například *šesti- až sedmileté děti*.

Dvě různá jména nebo časové údaje spojíme krátkou pomlčkou, například *Gaussova–Jordanova metoda*, nebo *5.–13. dubna*. Stejně jako v případě místních názvů je lepší pro oddělování víceslovných výrazů oddělit pomlčku z obou stran mezerami, například *23. 12. – 3. 1.*

Pomlčky můžeme vidět v textu i ve funkci čárek ohraničovat celé větné celky, nejčastěji jsou to vsuvky nebo přístavky (Moje matka – která vždy dbala na pořádek – nám domluvila.). Označit pomlčkou můžeme i přímou řeč nebo odmlku v projevu. K těmto účelům se běžně používá krátká pomlčka, v textu se však pro větší přehlednost můžeme rozhodnout používat krátkou pomlčku jen pro účely popsané v odstavci výše a zbytek svěřit pomlčce dlouhé.

Psaní spojovníku a pomlčky na konci řádku

Často si lidé při psaní nejsou jistí, co dělat, vyjde-li spojovník či pomlčka na konec řádku. Při psaní na počítači tato situace příliš nenastává a o to více nás může zaskočit, když píšeme rukou třeba školní slohovku a nechceme zbytečně kazit její estetiku škrtnáním. Pokud spojovník na konci řádku spojuje dvě slova, opakujeme ho i na začátku následujícího řádku, abychom dali najevo, že pouze nerozdělujeme jediné slovo, které se nám nevešlo na řádek. Spojovník uvnitř e-mailové adresy by se na konci řádku nikdy vyskytnout neměl (můžete jej napsat na začátek dalšího řádku). Pomlčku, která je od okolního textu oddělená mezerami, vždy píšeme na konec řádku, řádek pomlčkou nezačínáme (pokud neoznačuje přímou řeč nebo odrážku ve výčtu)! Slova spojená pomlčkou bez mezer nikdy koncem řádku nerozdělujeme, pokud není zbytí, nahradíme raději pomlčku slovy (například „a“, „od ... do“).

Apostrof

4b

Doc.^{MM} Dominik Kaňka

Apostrof (neboli odsuvník) nemá v češtině určitě tak časté užití jako například v angličtině, i přes to se ale uplatnění tohoto interpunkčního znaménka v našem jazyce najde.

Odsuvník se podobá horní jednoduché uvozovce, nelze s ní ovšem zaměnit. Je totiž rozdíl mezi apostrofem (' nebo ') a již zmíněnou uvozovkou (').³⁰

První případ, kdy je možné najít apostrof v českém textu, je vypuštění koncové hlásky. Uplatnění nalezne hlavně v poezii. Odsuvník se v tomto užití napíše místo poslední hlásky, většinou přičestí činného (například z „řekl“ dostaneme „řek“, z „mohl“ máme „moh“ atd.). Následuje příklad z básně *Vzpurník* (sbírka *Květy zla*, autor Charles Baudelaire):

*Slét' hrozný Anděl s hůr jak orel znenadání,
a jav ho za vlasý, lál přísně nevěrci.*

Dříve se používal odsuvník i při vypouštění hlásek u spojení slov, takže „ty jsi“ se spojilo v „ty's“, z „viděl jsi“ vzniklo „viděl's“ atd. Dnes se tento způsob zápisu již nepoužívá. Správné jsou tedy pouze varianty: tys, byls apod.

Dále se může apostrof napsat místo prvních dvou číslic v letopočtu. Například: Okupace proběhla v srpnu '68. Ve slovnících (etymologických a dialektologických) můžeme najít slovo napsané mezi dvěma apostrofy, naznačující význam předcházejícího výrazu (např. Hund 'pes').

U přejatých slov, kde naznačuje vypuštění poslední hlásky nebo hlásek prvního slova u spojení dvou slov, ponecháváme původní zápis – např. d'Artagnan, commedia dell'arte, Ballon d'Or atd.

V cizích jazycích má apostrof mnohem častější využití.

V angličtině je několik případů, kdy se odsuvník využívá. Prvním je, stejně jako ve starších českých textech, již zmíněné spojování slov, při kterém vynecháme jednu hlásku (nebo i více). Je to obdobné jako u nás: z „do not“ dostaneme „don't“, z „you have“ vznikne „you've“ atd. Dalším případem je přivlastňování. Jednoduše k podstatnému jménu připojíme písmeno „s“ pomocí apostrofu, např. John's, Frank's, plumber's atd. Pokud je základové podstatné jméno v množném čísle, tj. již má na svém konci „s“, píše se pouze apostrof, nikoliv další „s“, např. teachers', plumbers' atd. Posledním užitím apostrofu v angličtině je určení trvání jistého děje. Je vlastně zcela identické jako při přivlastňování, takže dostaneme spojení typu: hour's work, minutes' walk atd.

³⁰Pozn. redakce: Jelikož elektronické symboly jsou definované z pohledu angličtiny, znak ' reprezentuje anglickou pravou horní uvozovku (která se i v anglické typografii používá jako apostrof). Pozor, v češtině se jako pravá jednoduchá uvozovka používá anglická levá horní uvozovka (levá jednoduchá uvozovka v češtině je vždy dolní:). Symbol ' („opravdu apostrof“) je z historie počítačů (z dob ASCII) nadužíván pro uvozovky, tedy se pro apostrof spíše nepoužívá. Všimněte si, že i dvojitě uvozovky má čeština vůči angličtině opačně: „ (české) “ (anglické).

V němčině je pravidel ještě méně. Apostrof se používá v genitivu, tedy druhém pádě, u jmen končících na: -s, -ss, -ß, -ce, -tz, -ce a -x. V těchto případech se místo klasického připojení -s připojí ke slovu apostrof, např. Max', Lukas' atd. Dále se musí použít odsuvník, pokud vypustíme některá písmena ve slově nebo u spojení slov, např. Ku'damm (místo Kurfürstendamm), geht's (místo geht es) apod.

Na konec jsem si nechal italštinu, v té je totiž apostrof snad na každém kroku. Základním využitím je princip tzv. elize, což je spojení dvou slov s tím, že na konci prvního nahradíme jednu hlásku nebo více hlásek apostrofem. Děje se tak u slov „napojujících se“ samohláskou. Existuje mnoho případů, zmíním jich proto jen pár: l'apostrofo (lo apostrofo), quest'uomo (questo uomo), sant'Alfonso (santo Alfonso) atd. U těchto výrazů ovšem není dlouhá forma přípustná. Jako ve všem, i zde jsou výjimky a celkově se gramatika vyvíjí a zjednodušuje, takže v hovorové řeči můžeme najít napsána slova zvlášť, bez apostrofu.

Doufám, že se mi povedlo ukázat, že apostrof má své využití. Přesto, že není zase tak široké, je jistě zajímavé a může se někdy hodit.

Zdroje:

- Internetová jazyková příručka, *Apostrof* [online] (2008–2025). Praha: Ústav pro jazyk český AV ČR, v. v. i. [citováno 4. 2. 2025] <<https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=168>>. ³¹
- Příspěvatelé Wikipedie, *Apostrof* [online]. Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2022, Datum poslední revize 21. 10. 2022, 07:19 UTC, [citováno 4. 2. 2025] <<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Apostrof&oldid=21786631>>.
- Příspěvatelé Wikipedie, *Elize* [online]. Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2022, Datum poslední revize 16. 11. 2022, 10:37 UTC, [citováno 4. 2. 2025] <<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Elize&oldid=21888119>>.
- Cambridge Dictionary, *Apostrophe* [online]. Cambridge University Press, c2025, [citováno 4. 2. 2025] <<https://dictionary.cambridge.org/grammar/british-grammar/apostrophe>>.
- Mentorium, *Der Apostroph: Wann und wie verwendet man ihn?* [online] (2022–2024). Mentorium GmbH. c2025, [citováno 4. 2. 2025] <<https://www.mentorium.de/apostroph/>>.
- Illibrario.it, *L'elisione (con l'apostrofo)* [online] (2021). GRUPPO EDITORIALE MAURI SPAGNOL SPA, c2025, [citováno 4. 2. 2025] <<https://www.illibraio.it/news/storie/apostrofo-guida-1395753/>>.

³¹Práce používá data, která poskytuje výzkumná infrastruktura LINDAT/CLARIAH-CZ (<https://lindat.cz>) podporovaná Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky (projekt č. LM2023062).

Výpustka

 $\Sigma = 8b$

Mgr.^{MM} Barbora Salajová

Tři tečky (...) neboli „výpustka“ či „trojtečka“ označují vynechání určité části textu nebo nedokončenou či přerušovanou řeč. Za výpustkou může následovat další interpunkční znaménko, ale bez mezery. Pokud by následovala tečka, tak ji nepíšeme.

Je dobré připojovat tři tečky před slovo s mezerou a za slovo bez mezery (... je součástí...). Pokud je ale umísťujeme na začátek věty, odstavce nebo řádku, tak lze mezeru vynechat, aby celkový dojem textu vypadal lépe.

Při psaní výčtů používáme výpustku k naznačení vynechaných položek. Po čárce před třemi tečkami píšeme mezeru, stejně jako před vynechanou položku. Výpustku lze použít jak v průběhu výčtu (1, 2, 3, ..., 9, 10), tak na jeho konci (chleba, rohlík, jogurt, ...)

Další možností využití je nahrazení několika vět souvislého textu. V tomto případě je potřeba výpustku oddělit z obou stran mezerou a případně umístit i do kulatých závorek (...).

Kromě vypuštění části citace nevede výpustka k jednoznačnému vyjádření textu, a proto by se neměla využívat v odborném textu.

Využití:

- přerývaná řeč;

„Víte... já bych... mohl bych... si tady u vás sednout... na chvíli...“

- nedokončená řeč;

Jestli nepřestaneš zlobit, tak...

- neúplnost výčtu.

Pořád jsme opakovali: jedna, dva, tři, ..., deset, ..., až do dvaceti.

Právě výpustka patří mezi má oblíbená interpunkční znaménka. Využívám ji velmi často jako prostor na domýšlení, kdy se mi nechce psát dlouhá SMS a doufám, že příjemce pochopí, co tím myslím. Občas se ale stane, že se navzájem nepochopíme, protože dalším mým nekorektním využitím je náhrada emoji, protože se mi nepodaří najít to vhodné, nebo se rozhodnu ho nehledat.

Dvojtečka

 $\Sigma = 8b$

Mgr.^{MM} Barbora Salajová

Dvojtečka (:) se používá pro uvozování výčtu a přímé řeči (citace), pro označení vysvětlení, pro označení poměru a dělení, pro zápis měřítka map, k vyjádření sportovního skóre, pro zápis časových údajů nebo ve formulářích.

Dvojtečku připojujeme hned za výraz, který jí předchází, a od následujícího výrazu ji obvykle oddělujeme mezerou. Existují však dvě výjimky. Při vyznačení poměru (vyhrál volby v poměru 5 : 3), dělení ($4 : 2 = 2$) a zápisu měřítka dvojtečku (měřítko 1 : 50000) oddělujeme mezerou z obou stran. Vyjadřujeme-li čas (13:41) či skóre (výhra 2:0), nepíšeme žádnou mezeru.

Využití:

- uvození výčtu;

Nákup: rohlíky, paštika, cukr, sůl, ...

- uvození přímé řeči;

František volal: „Oni mě tu ruší!“

- vysvětlení;

Není už o čem uvažovat: všechno je logické a jasné.

- označení poměru;

Poměr stran je 2 : 3.

- matematické dělení;

$$16 : 4 = 4$$

- měřítko;

Použijte mapu v měřítku 1 : 100000.

- vyjádření skóre;

Slavia porazila Spartu 4:2.

- zápis časových údajů;

Je přesně 7:15.

- mezi popiskem údaje a vlastním údajem.

Jméno a příjmení: Maxmilián Habsburský.

Zajímavý pravopisný jev při psaní velkých písmen u názvů institucí a firem

2,5b

Mgr.^{MM} Alexandra Gauchet

Při vyhledávání názvů na úlohu 4.1 jsem našla v Internetové jazykové příručce zajímavou informaci: není zákonem dáno, jak se mají psát názvy podniků. Například v devadesátých letech minulého století si lidé zapisovali název firmy do živnostenského rejstříku pouze velkými písmeny. Dnes je trend opačný: do oblíbenosti začínají přicházet názvy psané pouze malými písmeny. Může to být tím, že lidé opisují grafickou podobu loga své nové firmy.

Bohužel zatím neexistuje žádné pravidlo, které by registrování pravopisně nesprávných názvů firem bránilo. Na druhou stranu, není ani zákon, co by nutil média používat název firmy podle rejstříku. V případě názvů psaných majuskulami by mohl text vypadat „ukřičeně“ a názvy psané jen malými písmeny se nedají psát na začátek věty. Tomu se ale dá vyhnout změnou slovosledu.

Naopak veřejnoprávní instituce většinou dodržují pravidla pravopisu. Jména škol a dalších institucí totiž většinou stanovuje zákon.

Zdroje:

- Poradna ASČ, *Velká písmena v názvu firem* [online] (2019). Asociace češtinářů, c2025 [citováno 4. 3. 2025] <<https://www.ascestinaru.cz/velka-pismena-v-nazvu-firem/>>.
- Internetová jazyková příručka, *Velká písmena – organizace* [online] (2008–2025). Praha: Ústav pro jazyk český AV ČR, v. v. i. [citováno 4. 3. 2025] <<https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=188>>.³²
- BusinessINFO.cz, *Firmy porušují pravopis, registrují si názvy odporující pravidlům* [online] (2018). CzechTrade, c1997–2025 [citováno 4. 3. 2025] <<https://www.businessinfo.cz/clanky/firmy-porusuji-pravopis-registruji-si-nazvy-odporujici-pravidlum/>>.

³²Práce používá data, která poskytuje výzkumná infrastruktura LINDAT/CLARIAH-CZ (<https://lindat.cz>) podporovaná Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky (projekt č. LM2023062).

Psaní velkých písmen nejen z historického pohledu 5b

Doc.^{MM} Julie Klementová

Myslím, že pravidla pro psaní velkých písmen jsou často omílaná, a proto poměrně známá, z toho důvodu jsem se rozhodla raději zaměřit na důvody pro psaní velkých písmen a jejich historii, což osobně považuji za mnohem zajímavější, a i samotnou historii některých gramatických pravidel.

Velká písmena v němčině

Z počátku se velká písmena psala jen na začátcích odstavců, slok a veršů, tento jev se později rozšířil i na počátek vět. Tady by se mohlo zdát, že vzniklo pravidlo velmi podobné tomu dnešnímu nejznámějšímu, ovšem v pozdním středověku se psaní velkých písmen na začátku slova ujalo i pro zvýrazňování jakéhokoli důležitého slova, tedy například podstatného či přídavného jména a zájmena, v této skupině začala brzy dominovat hlavně podstatná jména, což je už poměrně podobné dnešní němčině. Velké zásluhy na ustálení těchto pravidel měl Martin Luther, který sice ve svých rukopisech psal podstatná jména na počátku s malým písmenem, ale při tisku vyžadoval, aby byla podstatná jména sázena s velkými počátečními písmeny. Trvalo však několik dalších staletí, než bylo toto pravidlo ustáleno. To se stalo na počátku 18. století díky osvícenci Johannu Christophu Gottschedovi, který usiloval o povznesení německé gramatiky a kultury.

Zajímavostí je, že psát velká písmena na počátku podstatných jmen bylo v této době zvykem i v jiných evropských jazycích, například v angličtině, francouzštině, švédštině či nizozemštině, ale pod vlivem latinské tradice se od tohoto postupně upouštělo. Nejdéle, nepočítáme-li němčinu, se toto pravidlo zachovalo v dánštině, a to až do 40. let 20. století, tedy do doby německé okupace, při níž bylo psaní podstatných jmen s malými písmeny bráno jako symbol protinacistického odporu.

V němčině má mnoho podstatných jmen stejný tvar jako přídavné jméno, sloveso, či příslovce, proto by zde snad více než ve kterémkoli jiném jazyce mohlo docházet k výrazným nedorozuměním.³³ Zde se vrátím na počátek tohoto tématka, kde se řešily úsměvné typografické a gramatické přešlapy, a uvedu několik příkladů, které ukazují, jak je pro němčinu prospěšné, že velká písmena odlišuje od ostatních slovních druhů velkým písmenem.

Er hat liebe Genossen. = Má milé spolence.

- hat = 3. osoba slovesa haben (mít) – jedná se o přísudek
- lieb = přídavné jméno (ve 4. pádě množného čísla má koncovku -e) – jedná se o přívlastek
- die Genossen = podstatné jméno – jedná se o předmět

³³<https://de.quora.com/Warum-schreiben-die-Deutschen-alle-Substantiven-mit-Grossbuchstaben-am-anfang-des-Wortes-K%C3%B6nnte-man-das-nicht-weglassen-Bremst-beim-eintippen-so-h%C3%A4ufig-noch-die-Shift-Taste-zu-dr%C3%BCcken-Deutsch-ist>



Er hat Liebe genossen. = Užíval si lásku.

- hat genossen = perfektum slovesa genießen (užívat si) – jedná se o přísudek,
- die Liebe = podstatné jméno (lásku) – jedná se o předmět

Der gefangene Floh = ulovená blecha

- der Floh = blecha
- gefangen = přídavné jméno znamenající uloven, chycen (v maskulinu, v 1. pádě je po určitém členu koncovka -e)

Der Gefangene floh. = Vězeň utekl.

- der Gefangene = vězeň (podstatné jméno odvozené od slovesa) – podmět
- floh = préteritum slovesa fliehen (prchat)

Helft den armen Vögeln. = Pomozte ubohým ptákům.

- arm = přídavné jméno znamenající chudý (v plurálu, v dativu je koncovka -en)
- die Vögeln = podstatné jméno (ptáci) – jedná se o předmět

Helft den Armen, vögeln. = Pomozte chudákům, ku*va.

- die Armen = podstatné jméno odvozené od přídavného jména, znamená „ti chudí (lidé)“ – jedná se o předmět
- vögeln = nadávka, která se syntaxem věty nemá nic společného

Velká písmena v češtině

Cesta k ustálení pravidel pro psaní velkých písmen v češtině byla též velmi klikatá, i přesto, že se tomuto jevu začala věnovat pozornost až ke konci 19. století. Do té doby byl mezi některými dokonce rozšířen názor českého filologa Františka Vymazala, že jednotná pravidla ani nikdy existovat nebudou, protože je to zkrátka příliš komplikované.

Tomuto problému se hlouběji věnuje příručka „Kdy jest psáti v češtině na počátku slov písmena veliká?“ od Františka Bačkovského vydaná roku 1887, která se mimo jiné pozastavuje nad problematikou psaní složených vlastních jmen. Bačkovský navrhoval, aby se psalo velké písmeno pouze u prvního slova této složeniny s výjimkou těch, kde se postupem času změnil význam. Podle této definice by se tedy mělo psát „Česká Lípa“, protože se jedná o město a nikoli o strom, ovšem Mariánské Lázně by se psaly jako „Mariánské lázně“, protože toto město je stále známo svou lázeňskou činností. Bačkovský nejspíš sám uznal, že takovéto pravidlo by bylo příliš zavádějící a nejednoznačné, a souhlasil s „Mariánskými Lázněmi“.

Podobně nejasné to z počátku bylo i u názvů začínajících předložkou (například U Rybníka/U rybníka). Až do roku 1993 se pravidlo upravující počáteční písmeno slova následujícího po předložce opíralo o místní či historickou znalost. Záleželo opět na tom, zda je zachován původní význam.³⁴

Troufám si tvrdit, že gramatická pravidla jsou v dnešní době mnohem pochopitelnější a jasnější než tomu bývalo dříve (každopádně jsou alespoň existující a dohledatelná). I přesto jsou některá poměrně náročná na pochopení, zapamatování, a nejspíš proto jsou někým hojně opomíjena. Pochopení významu sdělení to samozřejmě (alespoň v češtině) nebrání, ovšem čtenářský komfort tím může být mírně snížen. Myslím tedy, že je důležité, abychom se nejen v českém pravopisu orientovali, ale rozhodně jsou i zásadnější věci.

³⁴<https://cs.wikipedia.org/wiki/Kapitalizace>

Téma 5 – Strojíme matiku puntíky a šipkami

Díl 4: Elementární topos a logika

Předposledním dílem témátka dorážíme do země zaslíbené – země matematické logiky. Minule jsme okázale tvrdili, že *elementární topos* je vlastně kategorie, v níž „lze dělat matematiku“. Co také trojsloví skýtá, není přirozeně vůbec zřejmé; snad nám však, zkoumaví čtenáři, dáte za pravdu, že abychom mohli takřkouce „dělat matematiku“, musíme umět logicky přemýšlet. To na elementárním topu vskutku lze; rozmyslíme sobě jak.

Ve svém tradičním podání jest výroková logika jazyk se slovníkem *výroků* a *logických spojek* majíc předepsanou gramatiku (čili způsob, kterak na sebe slova působí). Sestrojit celou výrokovou logiku na elementárním topu možné je – a s naší současnou úrovní znalostí to není ani příliš obtížné – je to však dílo poněkud vyčerpávající. Ve snaze vystříhat se formálním definicím logických pojmů jako *termy* či *formule*³⁵, soustředíme se výhradně na *logické spojky* \neg („ne“, negaci), \wedge („a“, konjunkci), \vee („nebo“, disjunkci) a \Rightarrow (implikaci). Výroky zameškají na intuitivní rovině v podobě „vět, které jsou buď pravdivé, či lživé“.

Myšlenka kategoriální definice logických spojek je v zásadě jednoduchá. Jako vždy začneme tím, že vyzkoumáme, jak je lze vyjádřit ve tvaru funkcí mezi množinami, jejichž svět je naší intuici bližší. Onen výzkum pak plynule přeneseme do říše elementárních topů.

Pro logickou *pravdu*, resp. logickou *lež*, budeme používat symboly \top , resp. \perp , aby nebylo lze splést je s čísly 0 a 1 značícími *iniciální* a *terminální* objekt kategorie, v níž zrovna pracujeme. Logické spojky můžeme přirozeně vnímat (zatím v kategorii množin) jako funkce, které na vstupu dostanou dvojici prvků (v případě negace jen jeden prvek) z množiny $\{\top, \perp\}$ a na výstupu vrátí zase prvek množiny $\{\top, \perp\}$. Například negaci \neg můžeme vnímat jako funkci

$$\neg: \{\top, \perp\} \rightarrow \{\top, \perp\},$$

danou předpisem $\neg(\top) = \perp$ a $\neg(\perp) = \top$. Implikaci zas jako funkci

$$\Rightarrow: \{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\} \rightarrow \{\top, \perp\},$$

jež zobrazí dvojice (\top, \top) , (\perp, \top) a (\perp, \perp) na \top a dvojici (\top, \perp) na \perp .

Třebas už tušíte, kam popsaný názor na logické spojky směřuje. Tvrdíce, že každá logická spojka je funkcí vedoucí do dvouprvkové množiny $\{\top, \perp\}$, vlastně říkáme, že každá logická spojka je *charakteristickou funkcí* nějaké podmnožiny součinu $\{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\}$ (či opět pouze $\{\top, \perp\}$ pro negaci). Je tomu tak zkrátka pro to, že některé dvojice z $\{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\}$ zobrazuje na \top a některé na \perp . Podmnožina dvojic, pro něž vrací ona logická spojka pravdu, je totožná vzoru prvku \top při zobrazení touto spojkou.

³⁵Dobře sepsaný úvod do výrokové logiky má například anglická Wikipedie: https://en.wikipedia.org/wiki/Propositional_calculus.

Pravda a lež

Než přikročíme k definicím logických spojek, musíme jako funkce vyjádřit i samotné prvky \top a \perp . To je jednoduché: mezi funkcí z jednoprvkové množiny a prvkem cílové množiny, na který tento jediný prvek zobrazuje, vlastně není žádný konceptuální rozdíl. Konkrétně, označme (jako v minulém díle) symbolem $\mathbf{1}$ jakoukoli jednoprvkovou podmnožinu. Pak jsou funkce $\mathbf{1} \rightarrow A$ totéž, co prvky A ; s každým $a \in A$ propojíme přesně jednu funkci $h_a: \mathbf{1} \rightarrow A$ zobrazující (ten jediný) prvek $*$ v $\mathbf{1}$ na a . Jelikož cílovou množinou logických spojek je přesně množina $\{\top, \perp\}$, získáváme takto dvě funkce:

$$\begin{aligned} t: \mathbf{1} &\rightarrow \{\top, \perp\}, \\ f: \mathbf{1} &\rightarrow \{\top, \perp\}, \end{aligned}$$

kde $t(*) = \top$ a $f(*) = \perp$. Ve smyslu popsaném výše jsou funkce t a f v podstatě týmž, co prvky \top a \perp .

Tyto funkce záhy překreslíme do šipek na elementárních topech. Prve však sobě připomeňme, kterými všemi speciálními vlastnostmi elementární topy oplývají.

- (1) Mají všechny *limity* (a tedy i *kolimity*). Nám budou užitečnými především v podobě *terminálního objektu a produktu* (*iniciálního objektu a koproduktu*).
- (2) Mají všechny *exponenty*: objekty b^a , které se „chovají jako“ množiny šipek z a do b .
- (3) Mají *klasifikátor podobjektů*: objekt Ω spolu s monomorfismem $\mathbf{1} \xrightarrow{\eta} \Omega$ takový, že pro každý monomorfismus $a \xrightarrow{\alpha} b$ existuje právě jedna šipka $b \xrightarrow{\chi_\alpha} \Omega$ taková, že diagram na obrázku 3 je pullback. Šipce χ_α říkáme *charakter* monomorfismu α .

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{!} & \mathbf{1} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ b & \xrightarrow{\exists! \chi_\alpha} & \Omega \end{array}$$

Obrázek 3: Definice klasifikátoru podobjektů.

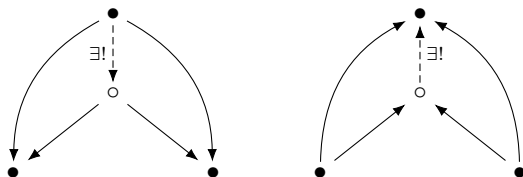
Tušíme, že jisté partie vypsaných bodů dožadují bližšího vysvětlení. V bodě (1) nám bdělí čtenáři jistě budou mít za zlé, že jsme o *kolimitách* hovořili zatím pouze mimoděk. Naštěstí není třeba mnoho dodávat. *Kokužel* nad diagramem je zkratka kužel nad týmž diagramem se všemi šipkami otočenými. *Kolimíta* je pak universální kokužel v tom smyslu, že z něj do každého jiného kokuželu (nad stejným diagramem) vede právě jedna šipka a (jako obvykle) celá vzniklá síť

komutuje. Jelikož nás budou při výrobě logických spojek zajímat pouze specifické limity a kolimity, nemusíme svět obecných kolimit znesvěcovati dále.

Nuže – jak jste dokázali **Úlohou 4.3** – terminální objekt je limitou *prázdného diagramu* (čili diagramu bez objektů i šipek). Přeci, kužel nad prázdným diagramem je zkrátka jen objekt kategorie, a universalita limity tvrdí, že do limity prázdného diagramu musí z každého jiného kuželu nad tímto diagramem (tedy z každého jiného objektu kategorie) vést právě jedna šipka. Předchozí věta je přesně definicí *terminálního* objektu. Stejným argumentem s otočenými šípkami nahlédneme, že kolimitou prázdného diagramu je objekt *iniciální*.

V kategorii množin je terminálním objektem jakákoli jednoprvková množina, jelikož do ní vede z každé množiny jen jediná funkce – ta, která zobrazí vše na její jediný prvek. Naopak, iniciálním objektem je množina *prázdná*, protože z ní do každé množiny vede jen jediná funkce – ta, která nezobrazuje nic na nic (ano, to je vskutku funkce, stejně jako prázdná množina je též množina, ačkoli pozbývá prvkův).

Diagram, jehož limitou je *produkt* a kolimitou *koprodukt*, hostí zkrátka dva objekty a žádné šipky. Odpovídající šipku (tu přerušovanou) z libovolného kužele do produktu, resp. z koproduktu do libovolného kokužele, vizte na obrázku níže (prázdný puntík značí produkt, resp. koprodukt).

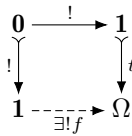


U bodu (3) pomněme, že klasifikátor podobjektů je kategoriální analogií dvouprvkové množiny (v našem případě množiny $\{\top, \perp\}$) a charakter χ_α je obdobou charakteristické funkce množiny v levém horním rohu diagramu na obrázku 3.

Neotálejme již a definujme šipky t a f na svém elementárním topu \mathcal{A} . Uráží nás jen jediný kámen: obě jsou totiž šípkami $\mathbf{1} \rightarrow \Omega$. Jak je od sebe rozeznat, nesmíme-li je definovat na prvcích? Naštěstí, součástí definice klasifikátoru podobjektů je existence monomorfismu $\mathbf{1} \hookrightarrow \Omega$, jenž (jak jsme si v minulém díle rozmysleli) je přesnou analogií inkluze $\{\top\} \hookrightarrow \{\top, \perp\}$. Množina $\{\top\}$ je jednoprvková, takže na tuto inkluzi se můžeme dívat jako na šipku $\mathbf{1} \hookrightarrow \{\top, \perp\}$. Našli jsme pročež vhodného kandidáta na šipku pravdy t : je jím přesně monomorfismus $\mathbf{1} \xrightarrow{t} \Omega$ v definici klasifikátoru podobjektů.


Co však s šípkou f ? Hravě si s ní poradíme. Vždyť ta je charakteristickou funkcí *prázdné množiny*! Vskutku, f je přeci ta funkce, která pro jediný prvek množiny $\mathbf{1}$ odpoví „ne“. Charakteristické funkce na elementárních topech tvořit umíme – prostřednictvím diagramů na obrázku 3. Stačí za objekty a, b a šipku α správně dosadit. Právě jsme si rozmysleli, že a má být „prázdná množina“, tj. iniciální objekt $\mathbf{0}$. Protože $f = \chi_\alpha$ musí být šipka $\mathbf{1} \rightarrow \Omega$, nutně $b = \mathbf{1}$. Pak je ale

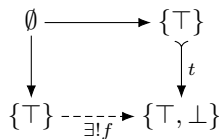
α ta **jediná** šipka z $\mathbf{0}$ do $\mathbf{1}$, již jsme v minulém díle označili jako $!$. Shrnuto, f je jedinečná šipka $\mathbf{1} \rightarrow \Omega$ taková, že diagram



je pullback. Jinak řečeno, šipka f je *charakterem* monomorfismu $\mathbf{0} \xrightarrow{!} \mathbf{1}$.

Nepronikla-li vám přednesená konstrukce takříkajíc „pod kůží“, zkuste v první úloze dílu dokázat, že v kategorii množin odpovídá takto definovaná funkce f té původní představené.

Úloha 5.1 [2b]: *Dokažte, že funkce $f: \{\top\} \rightarrow \{\top, \perp\}$ definovaná přes $f(\top) = \perp$ je jediná funkce, pro kterou je diagram* 




pullback. Funkce $t: \{\top\} \rightarrow \{\top, \perp\}$ splňuje $t(\top) = \perp$.

Negace

V závěsu předchozí sekce se, doufáme, jeví přirozeným, že všechny ostatní logické spojky budou rovněž charakterem vhodných monomorfismů. V kategorii množin smíme tuto větu zúžit na tvrzení, že jsou charakteristickými funkcemi podmnožin právě těch dvojic prvků \top a \perp , pro něž jsou pravdivé. Například, spojku \wedge budeme záhy definovat jako charakteristickou funkci množiny $\{(\top, \top)\}$. Výzvou je však tyto podmnožiny popsat na elementárním topu těmi správnými monomorfismy.

Nalézt vhodnou podmnožinu i přívuzný monomorfismus pro *negaci* je však jistě nejjednodušší. Jsme toho názoru, že to zvládnete sami.

Úloha 5.2 [1b + 2b]: 

1. Najděte podmnožinu množiny $\{\top, \perp\}$, jejíž charakteristickou funkcí je právě negace $\neg: \{\top, \perp\} \rightarrow \{\top, \perp\}$.
2. Převeďte tuto množinovou definici negace do světa elementárního topu, tj. dosadte za a, b a α do diagramu na obrázku 3 takové objekty a šipku, aby charakterem χ_α byla právě šipka negace $\Omega \xrightarrow{\neg} \Omega$. Soudíme, že vám pomůže přemýšlet o terminálním objektu $\mathbf{1}$ jako o množině $\{\top\}$ a o klasifikátoru podobně Ω jako o množině $\{\top, \perp\}$.

Nezapomeňte ověřit, že vzniklý diagram je opravdu pullback!

Konjunkce

Jak jsme předestřeli v předchozí sekci, konjunkce je jako množinová funkce právě charakteristická funkce množiny $\{(\top, \top)\} \subseteq \{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\}$. To znamená, že je tou jedinou funkcí $\wedge: \{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\} \rightarrow \{\top, \perp\}$ takovou, že

$$\begin{array}{ccc} \{(\top, \top)\} & \xrightarrow{!} & \{\top\} \\ \downarrow i & & \downarrow t \\ \{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\} & \xrightarrow{\exists! \wedge} & \{\top, \perp\} \end{array}$$

je pullback. Funkce $i: \{(\top, \top)\} \hookrightarrow \{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\}$ je pouhá inkluze.

Najít obdobu množiny $\{(\top, \top)\}$ na elementárním topu je triviální – vždyť je jednoprvková! Dobře tedy poslouží terminální objekt $\mathbf{1}$. Taktéž, množina $\{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\}$ si rozumí s produktem $\Omega \times \Omega$. Kde ale hledat šipku $\mathbf{1} \rightarrow \Omega \times \Omega$? V definici produktu přeci. Ta dí, že pro objekt $\mathbf{1}$ a šipku $\mathbf{1} \xrightarrow{t} \Omega$ existuje právě jedna šipka $\mathbf{1} \xrightarrow{\pi} \Omega \times \Omega$ taková, že

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & & \\ \downarrow \exists! \pi & & \\ \Omega \times \Omega & & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Omega & & \Omega \end{array}$$

(The diagram also includes curved arrows labeled t from $\mathbf{1}$ to each Ω .)

komutuje. Tentýž diagram vypadá v teorii množin takto:

$$\begin{array}{ccc} \{\top\} & & \\ \downarrow \exists! \pi & & \\ \{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\} & & \\ \swarrow & & \searrow \\ \{\top, \perp\} & & \{\top, \perp\} \end{array}$$

(The diagram also includes curved arrows labeled t from $\{\top\}$ to each $\{\top, \perp\}$.)


Protože dolní dvě funkce jsou zkrátka projekce, plyne z jeho komutativity, že funkce π musí zobrazit prvek \top na dvojici (\top, \top) ; má tedy smysl značit ji $t \times t$.

V důsledku, šipka $\mathbf{1} \xrightarrow{t \times t} \Omega \times \Omega$ je tím správným (a vlastně jediným) kandidátem na šipku α v diagramu na obrázku 3. Celý diagram vzezírá po dosazení takto:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{!} & \mathbf{1} \\ \downarrow t \times t & & \downarrow t \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\exists! \wedge} & \Omega \end{array}$$

a v podstatě vyjadřuje, že konjunkce je charakterem „součinu dvou pravd“. Pěkné, že?

Je tu jen jedna malá potíž. Aby byl totiž diagram výše opravdu pullback, musí být šipka $\mathbf{1} \xrightarrow{t \times t} \Omega \times \Omega$ *monomorfismus*. Ona ale je, jako vlastně každá šipka vedoucí z terminálního objektu. Zvládnete to dokázat?

Úloha 5.3 [1b]: *Dokažte, že každá šipka vedoucí z terminálního objektu je nutně monomorfismus.* 

Implikace

Implikaci vyrobíme jako charakteristickou funkci množiny $\{(\top, \top), (\perp, \top), (\perp, \perp)\}$. Hmm, to nezní snadně. Kde takovou tříprvkovou množinu na elementárním topu seženeme? Potřebujeme si všimnout jedné její netriviální vlastnosti: pro každou její dvojici vrací logická spojka \wedge a projekce na první souřadnici π_1 stejnou hodnotu. Připomínáme, že projekci na první souřadnici myslíme funkci $\pi_1(a, b) = a$ a na elementárních topech tato šipka přichází v balíčku definice produktu. Konkrétně,

$$\begin{aligned} \wedge(\top, \top) &= \top = \pi_1(\top, \top), \\ \wedge(\perp, \top) &= \perp = \pi_1(\perp, \top), \\ \wedge(\perp, \perp) &= \perp = \pi_1(\perp, \perp). \end{aligned}$$

Navíc, na dvojici (\top, \perp) jako jediné se funkce π_1 a \wedge neshodují. Čili, množina $\{(\top, \top), (\perp, \top), (\perp, \perp)\}$ je právě množinou všech řešení rovnice

$$\wedge(x) = \pi_1(x) \text{ pro } x \in \{\top, \perp\} \times \{\top, \perp\}.$$

Kterak rozkryli jsme v díle vterém³⁶, kategoriálním ekvivalentem množiny řešení rovnic je tak zvaný *ekvalizér*: limita diagramu

$$\bullet \rightrightarrows \bullet.$$

Ať značí tedy $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\pi_1} \Omega$ první z projekcí v definici produktu $\Omega \times \Omega$ a $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$ šipku konjunkce definovanou dříve. Definujme objekt $\mathbf{3} \triangleleft \mathcal{A}$ jako ekvalizér šipek π_1 a \wedge , čili jako objekt s šipkou $\mathbf{3} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega \times \Omega$ takový, že

$$\mathbf{3} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega \times \Omega \xrightarrow[\pi_1]{\wedge} \Omega$$

je rozdvojka (tj. $\varepsilon \wedge = \varepsilon \pi_1$) a $\mathbf{3}$ je jako kužel universální.

Implikaci postavíme jako charakter šipky ε ; dosazením objektu $\mathbf{3}$ za a , produktu $\Omega \times \Omega$ za b a ε za α do diagramu na obrázku 3 dostaneme pullback definující šipku implikace $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega$:

³⁶Slovo „vterý“ je synonymem slovu „druhý“. Je s ním spjatý třeba název dne „úterý“, jako „druhý den“.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{3} & \xrightarrow{!} & \mathbf{1} \\
 \varepsilon \downarrow & & \downarrow t \\
 \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\exists!} & \Omega
 \end{array}$$

Zbývá si rozmyslet, že $\mathbf{3} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega \times \Omega$ je monomorfismus. Vezměme pročež nějaký objekt $c \triangleleft \mathcal{A}$ a ať γ_1, γ_2 jsou dvě šipky $c \rightarrow \mathbf{3}$ splňující $\gamma_1 \varepsilon = \gamma_2 \varepsilon$. Dokážeme, že $\gamma_1 = \gamma_2$. Protože $\varepsilon \wedge = \varepsilon \pi_1$, taky $\gamma_1 \varepsilon \wedge = \gamma_1 \varepsilon \pi_1$ a $\gamma_2 \varepsilon \wedge = \gamma_2 \varepsilon \pi_1$, pročež

$$c \xrightarrow{\gamma_1 \varepsilon = \gamma_2 \varepsilon} \Omega \times \Omega \xrightarrow[\pi_1]{\wedge} \Omega$$

je rozdvojka. Z definice ekvalizéru existuje právě jedna šipka $c \xrightarrow{\gamma} \mathbf{3}$, která zařizuje, že diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{3} & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega \times \Omega \xrightarrow[\pi_1]{\wedge} \Omega \\
 \exists! \gamma \uparrow & \nearrow & \\
 c & & \gamma_1 \varepsilon = \gamma_2 \varepsilon
 \end{array}$$

komutuje. Jelikož tento diagram ale zřejmě komutuje jak pro γ_1 , tak pro γ_2 , nutně platí $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$. Šipka $\mathbf{3} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega \times \Omega$ je tedy opravdu monomorfismus a konstrukce šipky implikace budiž završena.

Disjunkce

Ach, to nebohé „nebo“! Jak se v kategoriální kleci svíjí a smýká! Snad překvapivě, logická spojka \vee se veskrze brání jednoduché kategoriální interpretaci. K jejímu sestrojení musíme učinit několik kroků.

Pochopitelně, \vee je charakteristická funkce množiny $U = \{(\top, \top), (\top, \perp), (\perp, \top)\}$. Danou množinu však není na elementárním topu jednoduché najít. Je tříprvková a není limitou žádného diagramu – jíž je třeba množina příslušná implikaci.

Množinu U sestrojíme jako sjednocení **dvouprvkových** množin $\{(\top, \perp), (\perp, \top)\}$ a $\{(\perp, \top), (\top, \top)\}$. Totiž, obě množiny můžeme na elementárním topu nahradit objektem Ω a navíc jsme je zvolili tak, že množina $\{(\top, \perp), (\perp, \top)\}$ je obrazem množiny $\{\top, \perp\}$ při funkci $t \times 1$ (kde 1 značí identickou funkci) a $\{(\perp, \top), (\top, \top)\}$ zas obrazem téže množiny při funkci $1 \times t$. Vskutku, pro funkci $t \times 1$ spočítáme

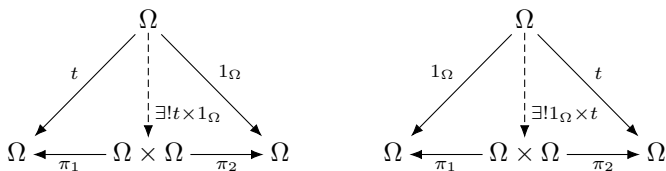
$$\begin{aligned}
 (t \times 1)(\perp) &= (t(\perp), 1(\perp)) = (\top, \perp), \\
 (t \times 1)(\top) &= (t(\top), 1(\top)) = (\top, \top),
 \end{aligned}$$

čili

$$(t \times 1)(\{\top, \perp\}) = \{(\top, \perp), (\top, \top)\}.$$

Stejný výpočet můžeme provést i pro funkci $1 \times t$.

Šipky odpovídající funkcím $t \times 1$ a $1 \times t$ najdeme na elementárním topu z definice produktu. Díky ní víme, že jsou to ty jediné šipky, pro něž oba diagramy níže komutují.



V dalším se již neobejdeme bez *koproduktu* dvou množin. V **úloze 3.6** jste mohli dokázat, že jím je tak tradičně přezdívané *disjunktní sjednocení* – vlastně sjednocení, kde každý prvek má svoji „nálepku“ odpovídající množině, z níž pochází. Díky tomu je disjunktní sjednocení vlastně typické sjednocení s tím, že se v něm každý prvek nachází tolikrát, kolik je množin, v nichž leží. Jeho formální definici ukážeme na příkladě³⁷: mějme množiny $X = \{5, 6, 7\}$ a $Y = \{5, 6\}$. Prvkům X přiřadíme identifikátor 0 a prvkům Y zas 1. Z množin X a Y pročež vyrobíme množiny $X^* = \{(5,0), (6,0), (7,0)\}$ a $Y^* = \{(5,1), (6,1)\}$. Jejich disjunktním sjednocením je pak z definice

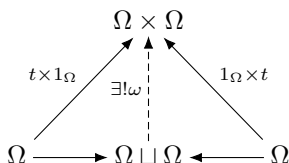
$$X \sqcup Y = X^* \cup Y^* = \{(5,0), (6,0), (7,0), (5,1), (6,1)\}.$$

Všimněme si, že z $X \sqcup Y$ vede do běžného sjednocení $X \cup Y$ jedna přirozená *surjektivní* funkce – ta, která „zapomene“ identifikátory, čili posílá dvojici $(z,i) \in X \sqcup Y$ na prvek $z \in X \cup Y$. Tím získáváme funkci j z koproduktu, či disjunktního sjednocení, $\{(T, \perp), (T, T)\} \sqcup \{(\perp, T), (T, T)\}$ do množiny

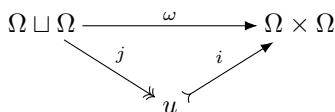
$$U = \{(T, \perp), (T, T)\} \cup \{(\perp, T), (T, T)\}.$$

Pochopitelně, U je podmnožinou produktu $\{T, \perp\} \times \{T, \perp\}$, takže do něj z U vede funkce inkluze, i .

Již bez důkazu tvrdíme, že tato situace nastává (dokonce pro libovolné objekty) i na elementárním topu. Konkrétně, z definice koproduktu existuje právě jedna šipka $\Omega \sqcup \Omega \xrightarrow{\omega} \Omega \times \Omega$ taková, že diagram



komutuje (čili $\omega = ji$). Tuto šipku ω pak umíme (prosíme, věřte nám to) „rozložit“, tedy najít objekt $u \triangleleft \mathcal{A}$, epimorfismus $\Omega \sqcup \Omega \xrightarrow{j} u$ a monomorfismus $u \xrightarrow{i} \Omega \times \Omega$ takové, že



³⁷Obecné definice se dočtete třeba na https://en.wikipedia.org/wiki/Disjoint_union.

komutuje. Konečně, dosazením objektu u za a , produktu $\Omega \times \Omega$ za b a monomorfismu $u \xrightarrow{i} \Omega \times \Omega$ za α v diagramu na obrázku 3 dostaneme šipku *konjunkce* na elementárním topu jakožto charakter monomorfismu i :

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{!} & \mathbf{1} \\ \downarrow i & & \downarrow t \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\exists! \wedge} & \Omega; \end{array}$$

tímž úspěšně přivedeme plavbu vodami kategoriální logiky k jejímu konci.

Posoudili-li jste, právem tak, stavbu disjunkce jako příliš složitou, doporučujeme ji projít znovu v množinovém prostředí. Tomuž účelu slouží následující úloha, poslední úloha kategoričtějšího tématka.

Úloha 5.4 [1b + 2b]:

1. *Popište disjunkttní sjednocení*

$$\{(\top, \perp), (\top, \top)\} \sqcup \{(\perp, \top), (\top, \top)\}.$$

2. *Najděte funkce $j: \{(\top, \perp), (\top, \top)\} \sqcup \{(\perp, \top), (\top, \top)\} \rightarrow U$ a $i: U \rightarrow \{(\top, \perp) \times \{(\top, \perp)\}\}$. Ukažte, že j je surjektivní a i injektivní. Jak vypadá jejich složení $\omega = ji$?*

Vzorová řešení úloh 3. dílu

Úloha 4.1

Zadání:

Dokažte, že funkce $f: A \rightarrow B$ je prostá právě tehdy, když pro každou množinu C a funkce $h_1, h_2: C \rightarrow A$ platí, že pokud $h_1 \neq h_2$, pak $h_1 f \neq h_2 f$.

Podotýkáme, že slovy „právě tehdy, když“ vyjadřujeme ekvivalenci vyřčených tvrzení. Možná vám pomůže použít poslední implikaci v obměně, čili jako: $h_1 f = h_2 f \Rightarrow h_1 = h_2$.

Řešení od Mgr.^{MM} Jáchyma Löwenhöffera:

Chceme dokázat, že

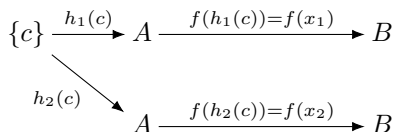
$$\begin{array}{c} \forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \Updownarrow \\ \forall h_1, h_2 : C \rightarrow A : h_1 \neq h_2 \Rightarrow h_1 f \neq h_2 f. \end{array}$$

(\Downarrow) Funkce f nemůže slepit žádné prvky, takže pro jiné vstupy (obrazy h_1, h_2) dá jiné výstupy. Specificky, ať $c \in C$ je takové, že $h_1(c) \neq h_2(c)$. Pak

$$h_1 f(c) = f(h_1(c)) \neq f(h_2(c)) = h_2 f(c),$$

protože f je prostá.

- (↑) Funkce $h_1 \neq h_2$ se liší aspoň v jednom prvku a ten nemůže f slepit, protože jinak $h_1 f = h_2 f$. Pro každé dva různé prvky $x_1, x_2 \in A$ a jakékoli $c \in C$ umím najít funkce $h_1, h_2: C \rightarrow A$ takové, že $h_1(c) = x_1$ a $h_2(c) = x_2$, takže je f nutně prostá.



Úloha 4.2

Zadání:

Definujte epimorfismus v libovolné kategorii \mathcal{A} a dokažte, že v kategorii množin jsou epimorfismy rovny surjektivním funkcím. Řečeno úplně: dokažte, že funkce $f: A \rightarrow B$ je epimorfismus právě tehdy, když je surjektivní.

Řešení:

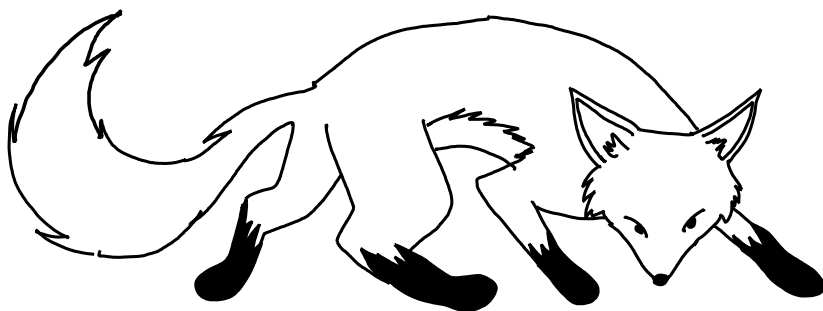
Epimorfismus definujeme *duálně* monomorfismu, tedy jako monomorfismus se všemi šipkami otočenými. Protože monomorfismu odpovídá diagram

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\gamma_1} & \bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \\ & \searrow^{\gamma_2} & \end{array}$$

v případě epimorfismu jím bude

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{\gamma_1} & \bullet \xleftarrow{\alpha} \bullet \\ & \swarrow_{\gamma_2} & \end{array}$$

Čili, šipka $a \xrightarrow{\alpha} b$ je *epimorfismus*, když pro jakýkoli objekt c a šipky $b \xrightarrow{\gamma_1} c$, $b \xrightarrow{\gamma_2} c$ platí, že když $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2$, pak $\gamma_1 = \gamma_2$.



Nyní k druhé části úlohy. Ať je nejprve funkce $f: A \rightarrow B$ epimorfismus. Dokážeme, že je surjektivní. Kdyby nebyla, tak bychom našli $b \in B$, na které f žádné $a \in A$ nezobrazí. Definujme si funkce $g_1, g_2: B \rightarrow C$ tak, že $g_1(b) \neq g_2(b)$

(za C stačí vzít jakoukoli množinu s aspoň dvěma prvky), ale na všech ostatních prvcích B se rovnají. Pak ale pro každé $a \in A$ dostaneme $g_1 f(a) = f(g_1(a)) = f(g_2(a)) = g_2 f(a)$, avšak $g_1 \neq g_2$. To je spor s definicí epimorfismu, a tedy musí být f surjektivní.

Naopak, ať je f surjektivní a $g_1, g_2: B \rightarrow C$ jsou dvě libovolné funkce. Předpokládejme, že $g_1(f(a)) = g_2(f(a))$ pro každé $a \in A$. Vyberme si libovolné $b \in B$. Jelikož je f surjektivní, najdeme $a \in A$, pro které $f(a) = b$. Pak ale máme $g_1(b) = g_1(f(a)) = g_2(f(a)) = g_2(b)$, čili $g_1(b) = g_2(b)$ pro všechny prvky $b \in B$.

Úloha 4.3

Zadání:

Najděte diagram v kategorii \mathcal{A} , jehož limitou je terminální objekt.

Řešení:

Terminální objekt je limitou prázdného diagramu, čili diagramu bez objektů i šipek. Rozmyslíme si proč.

Zprvé, kužel nad prázdným diagramem je prostě objekt kategorie, jelikož žádné šipky ani ostatní objekty v diagramu nejsou. Limita prázdného diagramu je pak kužel nad prázdným diagramem (tedy objekt), do kterého vede **přesně jedna** šipka z každého kužele nad prázdným diagramem (tedy z každého objektu). Právě jsme vyřkli, že limita prázdného diagramu je objekt, do kterého vede z každého objektu přesně jedna šipka – to je definice terminálního objektu.

Úloha 4.4

Zadání:

Existuje elegantnější definice klasifikátoru podobněků, přes pomocnou kategorii monomorfismů. Z kategorie \mathcal{A} můžeme vyrobit kategorii monomorfismů v \mathcal{A} , značenou $\text{Mono}(\mathcal{A})$, jejímiž objekty jsou monomorfismy $a \xrightarrow{\alpha} b$ a šipkou mezi monomorfismy $a \xrightarrow{\alpha} b$ a $c \xrightarrow{\gamma} d$ je dvojice šipek $a \xrightarrow{\varepsilon_1} c$, $b \xrightarrow{\varepsilon_2} d$ taková, že diagram

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\varepsilon_1} & c \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \\ b & \xrightarrow{\varepsilon_2} & d \end{array}$$

je **pullback**.

1. Dokažte, že $\text{Mono}(\mathcal{A})$ je opravdu kategorie. K tomu je potřeba ověřit, že pullback monomorfismu je monomorfismus. Tím neformálně vyjadřujeme, že je-li diagram

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

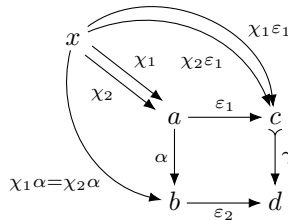
pullback a γ je monomorfismus, pak i α je monomorfismus. Opravdu?

2. Dokažte, že šipka $\mathbf{1} \xrightarrow{\eta} \Omega$, kde $\mathbf{1}$ je terminální objekt, Ω klasifikátor podobjektů a η libovolný monomorfismus, je terminálním objektem kategorie $\text{Mono}(\mathcal{A})$.

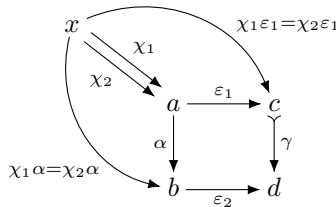
Větu v části 2 lze se špetkou nepřesnosti přeformulovat na „Klasifikátor podobjektů je terminální objekt v $\text{Mono}(\mathcal{A})$.“

Řešení:

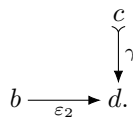
Začneme bodem 1. Ať je x jakýkoli objekt kategorie \mathcal{A} a $x \xrightarrow{\chi_1} a, x \xrightarrow{\chi_2} a$ dvě šipky takové, že $\chi_1\alpha = \chi_2\alpha$. Chceme ukázat, že $\chi_1 = \chi_2$. Pojďme si celou situaci zakreslit diagramem.



Nejprve použijeme fakt, že γ je monomorfismus, abychom ukázali, že $\chi_1\epsilon_1 = \chi_2\epsilon_1$. Totiž, celý dolní čtverec je z definice pullbacku komutativní, takže $\alpha\epsilon_2 = \epsilon_1\gamma$. Víme, že $\chi_1\alpha = \chi_2\alpha$, takže rovněž $\chi_1\alpha\epsilon_2 = \chi_2\alpha\epsilon_2$. Když v této rovnosti nahradíme $\alpha\epsilon_2$ za $\epsilon_1\gamma$, dostaneme $\chi_1\epsilon_1\gamma = \chi_2\epsilon_1\gamma$. Ale šipka γ je monomorfismus, z čehož plyne, že $\chi_1\epsilon_1 = \chi_2\epsilon_1$.



Všimněme, si že předchozí diagram přesně vyjadřuje, že x je kužel nad diagramem



Konečně, protože předpokládáme, že a je pullback (tedy limita tohoto diagramu), vede z x do a jen jediná šipka $x \xrightarrow{\chi} a$ taková, že $\chi\alpha = \chi\epsilon_1$. Poněvadž χ_1 i χ_2 tuto rovnost splňují, nutně $\chi = \chi_1 = \chi_2$ a $a \xrightarrow{\alpha} b$ je monomorfismus.

Teď k bodu 2. Přejeme si dokázat, že když je $a \xrightarrow{\alpha} b$ monomorfismus, pak existuje **jenom jediná** dvojice šipek $a \xrightarrow{\epsilon_1} \mathbf{1}, b \xrightarrow{\epsilon_2} \Omega$ taková, že



$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \mathbf{1} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ b & \xrightarrow{\varepsilon_2} & \Omega \end{array}$$

je pullback. Tady ale v podstatě nemáme co dokazovat. Z definice terminálního objektu $\mathbf{1}$ vede z a do $\mathbf{1}$ jen jediná šipka, tedy jí musí být právě ε_1 . Dále, šipka ε_2 je pak – teď zas z definice klasifikátoru podobjektů – právě „charakteristická šipka“ $b \xrightarrow{\chi_\alpha} \Omega$.

*Adam; kategorickematko@gmail.com
odevzdávejte do odevzdávátka*

Téma 6 – Speciální teorie relativity

V tomto čísle nenajdete žádný nový text tématka, ale můžete si přečíst vzorová řešení úloh 3. dílu.

Řešení 3. dílu

Úloha 3.1

Zadání:

Alice pozoruje hvězdu, u které si je naprosto jistá, že by ve spektru jejího světla měla chybět vlnová délka 656 nm. Nejbližší vlnová délka, která chybí, je ale 680 nm. Určete, jestli se hvězda od Alice vzdaluje nebo přibližuje a s jakou rychlostí. Rozpínání vesmíru zanedbejte. Porovnejte výsledek s klasickým Dopplerovským efektem.

Řešení od Františka Nouzy:

Frekvence světla (ne)cestujícího od hvězdy se zvyšuje, Alice se tedy ke hvězdě přibližuje. Původní vzoreček předpokládá, že se pozorovatel od zdroje záření oddaluje, takže si jen zapamatujeme, že výsledek vyjde v záporu. Pak už jen dosadíme do upraveného vzorečku:

$$1 - v^2 = \left(\frac{656(1 - v)}{680} \right)^2. \quad (2)$$

Ten se dá přetvořit na kvadratickou rovnici vypadající takhle:

$$\frac{13949v^2}{7225} - \frac{13448v}{7225} - \frac{501}{7225} = 0. \quad (3)$$

Tato rovnice má dva kořeny:

$$-\frac{501}{13949}, \quad 1. \quad (4)$$

1 je samozřejmě nesmysl ze dvou důvodů: můžeme téměř s jistotou říct, že se Alice a hvězda vůči sobě nepohybují rychlostí světla (nezapomeňme, podle konvence se c rovná jedné) a také jsme si na začátku určili, že výsledek bude rozhodně záporný. Naše odpověď tedy je, že se Alice přibližuje ke hvězdě rychlostí

$$\frac{501}{13949}c, \quad \text{což je přibližně } 10\,767\,512 \text{ m/s}. \quad (5)$$

V porovnání s klasickým Dopplerovým efektem je vzorec pro relativistický Dopplerův efekt dost složitý. Předchozí výpočty mi zabraly několik desítek minut, zatímco následující jsem měl hotové během tří.

$$680 = 656 \cdot \frac{1 + v}{1 - v} \quad (6)$$

$$\frac{1+v}{1-v} = \frac{680}{656} = \frac{85}{82} \quad (7)$$

$$v = \frac{3}{82} \quad (8)$$

Zprvė nám místo kvadratické rovnice vyšla lineární. Zadruhé je vypočítaná rychlost o něco větší, přibližně 10968 017 m/s.

Úloha 3.2

Zadání:

Doporučený denní příjem energie z jídla je pro aktivní muže kolem 10000 kJ. Kolik energie přijmou za 60 let? Kolik gramů jídla by jim stačilo na těchto 60 let, kdyby uměli z jídla získat všechnu energii?

Řešení od Petra Bartáka:

60 let je dohromady 21915 dní. Aktivní muž za 60 let přijme dohromady přibližně 219 GJ energie. Podle vzorce $E = mc^2$ zjistíme, že $m = \frac{219 \cdot 10^9}{(0.3 \cdot 10^9)^2} \approx 2.43 \cdot 10^{-3}$ g.

Úloha 3.3

Zadání:

Když jsme si představovali Wignerovy rotace, uváděli jsme si efekt na ilustračním příkladu. Spočtete pro tento příklad úhel $\theta_B - \theta_A$ pro rychlost v (ve směru osy x) a úhel θ_A .

Řešení od Martina Těšitele:

Úhel, pod kterým vidí hvězdu pozorovatel A , je θ_A . Platí:

$$\tan(\theta_A) = \frac{y_0}{x_0} \Rightarrow \theta_A = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right). \quad (9)$$

Při pohybu podél osy x se mění hodnota x podle vzorce pro kontrakci délek:

$$x_B = \frac{x_0}{\gamma} = x_0 \sqrt{1-v^2}. \quad (10)$$

Úhel pro pozorovatele B :

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{y_0}{x_B}\right) = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0 \sqrt{1-v^2}}\right). \quad (11)$$

Rozdíl úhlů:

$$\theta_A - \theta_B = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{y_0}{x_0 \sqrt{1-v^2}}\right). \quad (12)$$

Úloha 3.4

Zadání:

Najděte matici speciální LT pro vektor rychlosti $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(1, 0, 1)$.

Řešení od Michaela Jarvise:

Chceme najít $B\left(\frac{1}{2}(1, 0, 1)\right)$.

Použijeme rotaci R , která vektor $(1, 0, 1)$ přenese na osu x a zachová všechny úhly a vzdálenosti:

$$B\left(\frac{1}{2}(1, 0, 1)\right) = R^{-1}B(v(1, 0, 0))R.$$

Matice rotace:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Inverzní matice:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Speciální Lorentzova transformace:

$$B(v(1, 0, 0)) = \begin{bmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledná matice:

$$B\left(\frac{1}{2}(1, 0, 1)\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} - 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} - 1 & 0 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Bonbony

3b

Doc.^{MM} Pavla Šimová

Na podzimním soustředění M&M v Hodoňovicích jsme se na přednášce paní Kopfové zabývali hrou s pytlíkem bonbonů. Problém, který zazněl na konci přednášky, mi přišel zajímavý, a tak bych se chtěla podělit o své poznatky o něm.

Nejprve si však připomeňme základní verzi hry s bonbóny, kterou jsme zkoumali na přednášce. Dva lidé hrají hru s pytlíkem, ve kterém je a červených a b modrých bonbonů. Každý z hráčů postupně sáhne do pytlíku a náhodně z něj jeden bonbon vytáhne a nechá si ho. Pokud oba vytažené bonbony mají stejnou barvu, vyhrává první hráč. Pokud mají různou barvu, vyhrává druhý hráč. Snažíme se najít všechny takové počty bonbonů a , b , pro které je hra férová (neboli oba hráči mají stejnou šanci na výhru).

Kdy taková situace nastane, si můžeme snadno spočítat tak, že dáme do rovnosti počet způsobů, jak vybrat dvě stejné barvy $a(a-1) + b(b-1)$, a počet způsobů, jak vybrat dvě různé barvy $ab + ba = 2ab$.

$$2ab = a(a-1) + b(b-1) = a^2 + b^2 - a - b$$

$$a + b = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Vidíme, že aby byla hra se dvěma barvami férová, musí se druhá mocnina rozdílu a , b rovnat jejich součtu. A protože rozdíl čísel je přirozený, tak i jejich součet musí být druhou mocninou přirozeného čísla. To splňují například dvojice $(1, 3)$, $(3, 6)$, $(6, 10)$, $(10, 15)$ atd. To nás vede k podezření, že řešením by mohly být dvojice následujících trojúhelníkových čísel.

To jsou čísla ve tvaru $n(n+1)/2$, $(n+1)(n+2)/2$ pro nějaké přirozené n . Snadno si dosazením můžeme ověřit, že pro tato čísla rovnice vždy platí.

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

$$\frac{(n+1)}{2}(n+(n+2)) = \left(\frac{(n+1)}{2}(n-(n+2)) \right)^2$$

$$2n+2 = \frac{(n+1)}{2} \cdot 4$$

$$n+1 = n+1$$

Ekvivalentními úpravami se dostáváme k pravdivému výroku. A pokud budeme v úpravách postupovat opačným směrem, zjistíme, že jiná čísla naopak rovnost nesplňují, takže jediné dvojice čísel pro férovou hru jsou po sobě jdoucí trojúhelníková čísla.

Toto všechno už jsme ale slyšeli na přednášce. Teď by nás ale zajímalo, jak stejná úloha dopadne, kdyby v pytlíku nebyly barvy bonbonů dvě, ale tři.

Obdobně jako u dvou barev spočítám, kolika způsoby můžu vybrat dvě stejné barvy $a(a-1) + b(b-1) + c(c-1)$ a kolika dvě různé barvy $ab + ba + ac + ca + bc + cb = 2(ab + bc + ca)$. Když je hra férová, počty obou výsledků se rovnají.

$$a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) = 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca) + a + b + c$$

Pokud za jedno z čísel zvolím 1, odpovídají rovnici například dvojice (1, 3, 9), (1, 9, 18), (1, 18, 30), (1, 30, 45). Další dvě čísla se chovají podezřele podobně těm z řešení pro dvě barvy. A není to náhoda! Jde o trojnásobky po sobě jdoucích trojúhelníkových čísel. Vystává tedy domněnka, že řešením jsou všechny trojice ve tvaru

$$\left(1, \frac{3n(n+1)}{2}, \frac{3(n+1)(n+2)}{2}\right)$$

a samozřejmě na pořadí nezáleží. Zda tomu tak opravdu je, ověříme dosazením do rovnice.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 + \frac{9n^2}{4}(n+1)^2 + \frac{9}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(9n^4 + 36n^3 + 63n^2 + 54n + 20), \end{aligned}$$

$$2(ab + bc + ca) + a + b + c =$$

$$\begin{aligned} &= 3n(n+1) + 3(n+1)(n+2) + \frac{9n}{2}(n+1)^2(n+2) + 1 + \frac{3n(n+1)}{2} + \frac{3(n+1)(n+2)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(9n^4 + 36n^3 + 63n^2 + 54n + 20). \end{aligned}$$

Vidíme, že toto řešení opravdu funguje pro všechna přirozená n (a to dokonce i pro $n = 0$, jen budou v pytlíku pouze dvě barvy). Je to však jediné řešení?

Určitě ne, rovnici splňují trojice bez jedničky, třeba (3, 6, 19) nebo (3, 9, 24). Další řešení tedy nechám na mém pozdějším já, případně na čtenáři.

Matematika a volby

5b

Mgr.^{MM} Alexandra Gauchet

Nedílnou součástí demokracie jsou volby, ty ale probíhají v každé zemi jinak. V tomto článku se budeme zabývat americkými volbami prezidenta na příkladech hlavně z roku 2000 a většinovým systémem.

Systém volitelů

Volby ve Spojených státech Amerických používají speciální systém volitelů. Funguje na dvou úrovních. Nejdříve se spočítají hlasy v jednotlivých státech, které mají každý svůj počet volitelů. Strana, která zvítězí ve volbách, dostane všechny volitele, kteří pak hodí hlas svému kandidátovi. Až tyto hlasy se nakonec sečtou a vyhlásí se nový prezident. Znamená to, že americké volby jsou nepřímé – nerozhodují přímo občané, ale jimi zvolení zástupci.

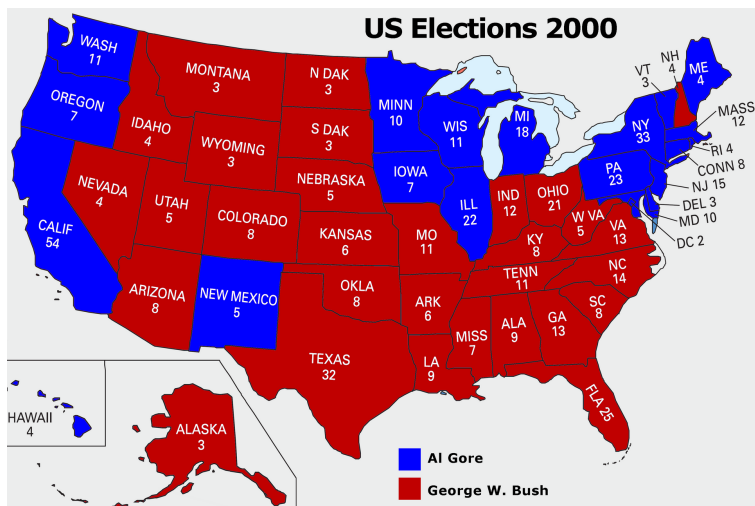
Tento systém volitelů byl zaveden při vzniku Spojených Států, aby voličům usnadnil rozhodování. Kandidáty na prezidenta málo lidí znalo a tak si stačilo vybrat volitele, kterému důvěřovali. Kandidát, co se umístil jako druhý, se stal viceprezidentem. Toto pravidlo bylo ale změněno a viceprezidenta teď občané většiny států volí zvlášť. Tento systém volby prezidenta je již ale zastaralý. Proběhlo mnoho pokusů to změnit, jenže se setkaly s odporem převážně ze strany republikánů.

Dříve nebyli volitelé ústavou nijak vázáni zvolit kandidáta, co dostal většinu v jejich státě. Mohli dokonce dát hlas osobě, která ve volbách vůbec nekandidovala. To se ve většině států změnilo v 19. století a dnes mají povinnost ve dvou třetinách států hlasovat pro vítěze v jejich státě. V současnosti nejsou většinou ani jejich jména na volebních lístcích uváděna (v roce 2020 byla jména uvedena pouze v 8 státech).

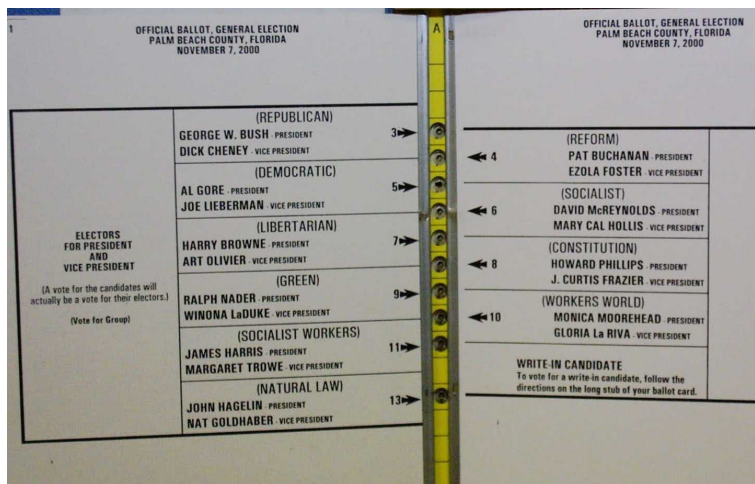
Nejvíce volitelů zastupuje Kalifornii – mají jich 55 – a Texas. V roce 2024 bylo ve volbách celkem 538 volitelů.

Nedostatky

Volby může ovlivnit vzhled hlasovacího lístku: jeden z příkladů může být motýlí hlasovací lístek použitý v prezidentských volbách v Palm Beach na Floridě v roce 2000 (viz obrázek 5). Volič musel proděravět políčko vybraného kandidáta. Hlasovací lístek byl ale udělaný velmi nepřehledně a demokraté tak přišli o spoustu hlasů kvůli matoucí poloze kolonek u reformní strany. Část voličů měla za to, že demokratická strana je na druhém řádku, patří k nim i druhé kolečko. Toto výrazně nahrálo republikánům, kteří nakonec volby v tomto státě vyhráli o 327 hlasů ze skoro šesti milionů celkových. Dalším nedostatkem těchto hlasovacích lístků byly stroje, co se používaly k jejich proděravění. Ty byly zastaralé a neproděravěly lístky dostatečně, tudíž byly některé volební lístky počítány jako prázdné. Hlasy byly přepočítány a zvažovalo se nezapočítat výsledky z Floridy, proti čemu se nakonec postavil Nejvyšší soud. Nakonec 25 volitelů tedy získal Bush a výsledky voleb byly uzavřeny.



Obrázek 4: Počty volitelů zastupující jednotlivé státy v prezidentských volbách v roce 2000. Barevné odlišení ukazuje, ve kterém státě zvítězil který kandidát.



Obrázek 5: Nepřehledný hlasovací lístek z Palm Beach County na Floridě z prezidentských voleb v roce 2000.

Tento systém je ale výhodnější pro malé státy, které mají na obyvatele více volitelů než ty velké. Problémem také je, volby může vyhrát kandidát zvolený jen menšinou voličů. To se stalo i v roce 2000. Populární volbu (nejvíce hlasů) vyhrál demokratický kandidát, ale do Bílého domu nastoupil republikán Bush, protože měl většinu hlasů volitelů.

kandidát a jeho strana	hlasy volitelů	celkový počet hlasů
George W. Bush, za republikány	271	50 456 062
Albert Gore, Jr., za demokraty	266	50 999 897
Ralph Nader, za zelené	0	2 882 955

Mnoho lidí zastává názor, že systém volitelů nahrává republikánům více než demokratům. Tomu nasvědčuje i fakt, že republikáni od roku 2000 nezískali více jak 50 % voličských hlasů. Dokonce si 63 % Američanů myslí, že by se měl změnit volební systém tak, aby vyhrál kandidát s nejvíce hlasy. Zvláštností amerického volebního systému je také nutná registrace voličů. V některých státech ji už lze provést přes internet, další vyžadují papírovou. Republikáni ji chtějí přísnější, což demokraté vnímají jako snahu znemožnit menšinám účast u voleb, protože volí většinou více levicové strany. Kritici upozorňují i na fakt, že je potřeba k registraci v některých státech řídicí průkaz, který si mnoho lidí nemůže dovolit.

Paradoxem také bylo, že žádný z kandidátů nedosáhl většiny hlasů. Bush získal 47,9 % a Al Gore 48,4 %. To nás přivádí k další zvláštnosti amerického volebního systému – kvůli systému volitelů může vyhrát i méně oblíbený kandidát a vítěz nemusí ani mít nadpoloviční většinu hlasů. Je to způsobeno systémem volitelů, protože stačí, když kandidát přesvědčí většinu v nerozhodných státech neboli „swing states“. Tam se i soustředí většina kampaní.

Dalším nedostatkem mohou být dlouhé fronty u volebních místností. Průměrná čekací doba byla minulý rok například ve Washingtonu čtyřicet pět minut.

Problémem mohl být i fakt, že guvernérem státu Florida byl Bushův mladší bratr. Ten byl pravděpodobně zaujatý proti demokratickému kandidátovi a mohl volby ovlivnit.

Většinové pravidlo

Obě kola amerického systému volitelů používá tzv. většinové pravidlo, které se používá hlavně při potřebě vybrat jednoho kandidáta. Je to nejstarší volební systém, který byl využíván nejvíce do konce 19. století.

Kandidátům jde o získání většiny, té je ale více typů: relativní, absolutní a kvalifikovaná. Relativní většina funguje nejjednodušeji. Vyhrává ten, kdo má nejvíce hlasů, ať už je to jen 30 %. Nejvíce se používá v anglosaských zemích, třeba v USA. Další většina se nazývá absolutní, u té musí vítěz dostat alespoň polovinu hlasů. Ta je nejvíce aplikována v Evropě. Používáme ji i v České republice v senátních a prezidentských volbách. Poslední většinou je kvalifikovaná většina. Aby uchazeč získal tuto většinu, musí mít určitý podíl hlasů, který je stanovený individuálně. Je uplatňována u hlasování o změnách v Ústavě v Parlamentu ČR,

kde je potřeba tří pětin hlasů poslanců ke změně.

Jedním z problémů tohoto systému je, že voliči hlasující pro strany, které nezvítězí, nemají žádné politické zastoupení. Na druhou stranu u pozic, jako je prezident, je těžké mít politické zastoupení všech.

Další komplikací může být více kandidátů – jejich počet může znesnadnit rozhodování voličů, kteří se musí rozhodnout strategicky pro kandidáta, co má nejvyšší šanci vyhrát. Nedává totiž smysl hlasovat pro méně populární kandidáty, kteří nemají šanci vyhrát. Může tak vzniknout systém dvou stran, podobný tomu americkému.

Závěr

V tomto článku jsem chtěla poukázat na některé problémy současných volebních systémů, kde se často nemůžeme jen rozhodovat pouze podle toho, jaký kandidát se nám zamlouvá nejvíce, musíme také strategizovat. Problémem je i to, když naši volbu ovlivní design volebních lístků či čekací doba. Dalším nedostatkem voleb může být, že nahrávají jedné straně, či nerespektují vůli většiny. Také bych chtěla ukázat, že matematika se dá využít i v humanitních oborech, jako je politologie.

Zdroje

- Učit se učit, *Matematika a volby* [online] (2022). Masarykova univerzita, c2025 [citováno 7. 1. 2025] <<https://www.ucitseucit.cz/matematika/inspirace/matematika-a-volby>>.
- KRAJÍČEK, David. Matematika a volby. Bakalářská práce, vedoucí Beran, Filip. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky, 2023.
- 270 to win, *2000 Presidential Election* [online]. Electoral Ventures LLC, c2025 [citováno 7. 1. 2025] <https://www.270towin.com/2000_Election/>.
- Why do math, *Some Mathematics of Voting Theory* [online]. Society for Industrial and Applied Mathematics, c2011 [citováno 7. 1. 2025] <<https://www.whymath.org/node/voting/math.html>>.
- Veritasium, *Why Democracy Is Mathematically Impossible* [online]. YouTube [citováno 7. 1. 2025] <<https://www.youtube.com/watch?v=qf7ws2DF-zk>>.
- Příspěvatelé Wikipedie, *Volba prezidenta Spojených států amerických* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2025, Datum poslední revize 27. 1. 2025, 18:41 UTC, [citováno 6. 2. 2025] <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Volba_prezidenta_Spojen%C3%BDch_st%C3%A1t%C5%AF_americk%C3%BDch&oldid=24612183#Sbor_volitel%C5%AF>

- Ron Elving, *The Florida Recount Of 2000: A Nightmare That Goes On Haunting* [online] (2018). NPR, c2025 [citováno 6. 2. 2025] <<https://www.npr.org/2018/11/12/666812854/the-florida-recount-of-2000-a-nightmare-that-goes-on-haunting>>.
- James M. Lindsay, *The 2024 Election by the Numbers* [online] (2024). Council on Foreign Relations, c2025 [citováno 6. 2. 2025] <<https://www.cfr.org/article/2024-election-numbers>>.
- Amy Walter, *The Republican Electoral College Advantage* [online] (2022). Cook Political Report, c2025 [citováno 6. 2. 2025] <<https://www.cookpolitical.com/cook-pvi/2022-partisan-voter-index/republican-electoral-college-advantage>>.
- *Ústava České republiky* (1992). Dostupná také z: <https://www.psp.cz/docs/laws/constitution.html>>.
- ČTK, *Povinná registrace voličů vyvolává v USA pře, účast prý neovlivní* [online] (2016). VLTAVA LABE MEDIA a.s. [citováno 6. 2. 2025] <https://www.denik.cz/ze_sвета/povinna-registrace-volicu-vyvolava-v-usa-pre-ucast-pry-neovlivni-20160928.html>.
- iurium, *Většinový volební systém* [online]. Nugis Finem, z.s., c2016–2025 [citováno 6. 2. 2025] <<https://www.iurium.cz/encyklopedie/koncept/vetsinovy-volebni-system>>.
- Martin Dohnal, *Fronty na volby jsou ve Washingtonu extrémní* [online]. Seznam.cz a.s., c2019–2025 [citováno 6. 2. 2025] <<https://www.novinky.cz/clanek/volby-usa-az-desitky-minut-cekani-ve-washingtonu-stoji-volici-dlouhe-fronty-40495936>>.

Výsledky 2. deadlinu 3. čísla a 1. deadlinu 4. čísla

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Témata						O	Σ_0	Σ_1
				2	3	4	5	6				
1.	Doc. ^{MM} J. Uglickich	3	498,6	16,5	7,5	6,5	4,5				35,0	170,3
2.	Doc. ^{MM} M. Těšitel	4	386,2	19,9	9,0	6,5	5,5	13,6			54,5	156,4
3.	Doc. ^{MM} M. Jarvis	3	339,8	16,5			8,0	6,0			30,5	151,6
4.	Doc. ^{MM} J. Klementová	3	313,8	16,8		6,0	2,0	3,2			28,0	104,0
5.	Mgr. ^{MM} P. Starý	3	99,9	19,2							19,2	99,9
6.	Dr. ^{MM} M. Ambros	2	199,2	9,9		8,5		10,3			28,7	88,5
7.	Mgr. ^{MM} B. Salajová	3	77,7	13,4		15,5	4,5	4,4			37,8	77,7
8.	Doc. ^{MM} L. Zůnová	4	255,5	2,0	0,8	4,5					7,3	72,3
9.	Doc. ^{MM} P. Šimová	4	253,0	9,9		8,5		10,3	3,0		31,7	70,6
10.	Dr. ^{MM} L. Votrubová	4	163,0		10,6	5,5					16,1	67,4
11.	Doc. ^{MM} O. Sedláček	4	299,3									66,8
12.	Mgr. ^{MM} F. Nouza	3	68,1	4,8	3,0			2,4			10,2	64,1
13.	Mgr. ^{MM} A. Trnková	4	91,5	2,0		4,5					6,5	63,6
14.	Mgr. ^{MM} A. Gauchet	3	58,1	1,0		10,5		3,0	2,0		16,5	58,1
15.	Doc. ^{MM} D. Kaňka	3	201,9	2,0		10,2		1,0			13,2	57,3
16.	Dr. ^{MM} K. Kučerová	Z9	127,0	2,5		8,6					11,1	54,4
17.	Mgr. ^{MM} R. Petit	4	90,7	19,0							19,0	53,7
18.	Bc. ^{MM} S. Ožanová	3	47,3			7,2		2,5			9,7	47,3
19.	Bc. ^{MM} N. Jochová	2	47,1		12,5			1,5			14,0	47,1
20.	Bc. ^{MM} M. Pustková	4	43,8									43,8
21.	Bc. ^{MM} S. Šimečková	3	42,5	1,0	3,2	6,5					10,7	42,5
22.	Dr. ^{MM} J. Jedlička	3	103,2		6,5						6,5	42,0
23.	Doc. ^{MM} O. Nevěril	3	251,2		6,1	6,0					12,1	41,8
24.	Dr. ^{MM} M. Urbanová	2	148,5									39,8
25.	Mgr. ^{MM} P. Barták	1	58,8	2,7		6,2		4,5			13,4	38,4
26.	Bc. ^{MM} K. Bouchalová	Z9	36,3	3,8		8,7		3,4			15,9	36,3
27.	Bc. ^{MM} V. Šitra	3	32,0									32,0
28.	Bc. ^{MM} F. Dvořák	2	31,1	17,8							17,8	31,1
29.	Mgr. ^{MM} V. Kučera	3	78,0			9,2					9,2	27,4
30.	Bc. ^{MM} Š. Swaczyna	Z9	21,9	3,8		8,7		3,4			15,9	21,9
31.	Mgr. ^{MM} K. Maxera	4	50,8									19,3
32.	P. Bělušová	3	17,5									17,5
33.	B. Samková	1	16,4			1,0				1,0		16,4
34.	Mgr. ^{MM} A. Bakoč	4	97,3									14,9
35.	M. Jurečková	3	13,7									13,7
36.	Mgr. ^{MM} V. Vybíral	3	65,5			6,9				6,9		13,6

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Témata						O	\sum_0	\sum_1
				2	3	4	5	6				
37.	M. Kramešová	4	12,9			7,5					7,5	12,9
38.	J. Fišerová	2	12,3			5,8					5,8	12,3
39.	Dr. ^{MM} J. Löwenhöffer	4	102,1				4,5				4,5	12,2
40.	Mgr. ^{MM} M. Rybecký	3	73,2									10,8
41.	R. Zelený	4	14,2									10,4
42.	Mgr. ^{MM} J. Kadlec	4	57,6									10,3
43.	Mgr. ^{MM} M. Stýskala	4	69,6									7,1
44.	R. Michálková	3	5,1									5,1
45.–47.	S. Zubák	1	5,0									5,0
	L. Koma	1	5,0									5,0
	T. Matějková	4	5,0									5,0
48.–49.	T. Gruber	3	4,7			4,7				4,7		4,7
	J. Kaplický	3	4,7									4,7
50.	M. Štěpán	4	3,0									3,0
51.–52.	M. Těšitel	Z1	2,5									2,5
	M. Ambrosová	Z9	10,3									2,5
53.	Bc. ^{MM} K. Česká	4	28,7									1,5

Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v těchto deadlinech a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Sloupec **O** symbolizuje **Ostatní**, obvykle příspěvky za články. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 4.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy. Pokud si časopis nepřejete dále dostávat v tištěné podobě, zrušte si prosím jeho odběr v nastavení svého účtu na webu.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK E-mail: mam@matfyz.cz
 Ke Karlovu 3 Web: mam.matfyz.cz
 121 16 Praha 2 FB: [casopis.MaM](https://www.facebook.com/casopis.MaM)

