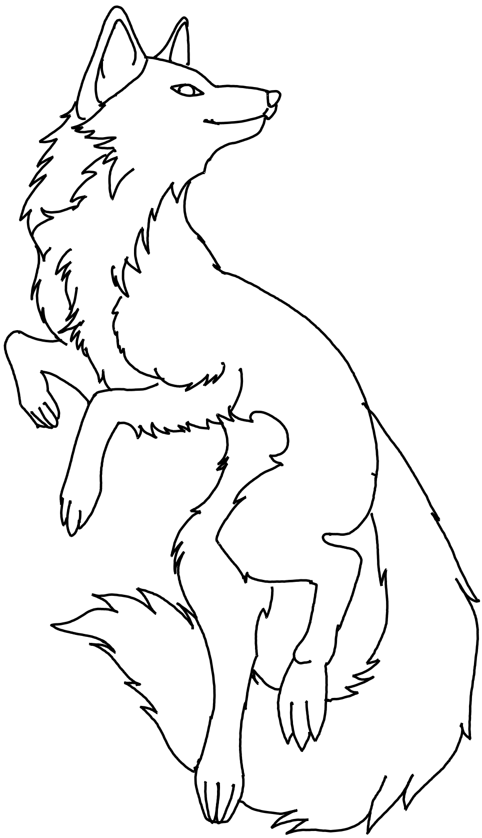
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXXI
Číslo 4

M&M

MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

s příchodem dalšího pololetí přichází i nové číslo časopisu M&M a my vám ho přinášíme se vší parádou! Ať už jste nadšení řešitelé, občasní řešitelé nebo se prostě jen chcete dozvědět něco víc, jste tady na správném místě.

Začněme dobrou zprávou – vybraným řešitelům totiž během několika dnů přistanou v e-mailech pozvánky na jarní soustředění. A co ti, kterým to tentokrát nevyšlo? Nesmutněte! Stále máte šanci – buď jako náhradníci, nebo se můžete připravit a zabojovat o místo na dalším soustředění. Každý bod se počítá, tak neváhejte a pokračujte v řešení!

Blíží se mezinárodní týmová soutěž *Náboj*[1]! Soutěž proběhne 14. března, přičemž registrace startuje už 10. února. Tak si to zapište do diáře, nastavte si budíky nebo si to prostě vyryjte do stolu (jen ne ve škole). Volná místa mizí, tak ať si nějaké ulovíte!

A co vás v tomto čísle čeká? Přeci hromada zábavných tématek:

- **Vektory a matice** – Determinant řekne, jestli se vaše krychle roztáhne, nebo smrskne. Pokud je záporný, gratuluji! Právě jste vytvořili portál do paralelního vesmíru – a zjistili, co je za zrcadlem.
- **Programování v TEXu a LATEXu** – Naučíme vás, jak balit makra a environmenty do balíčků tak šikovně, že je budete chtít dávat k Vánocům místo ponožek!
- **Typografie a pravopis** – Naučíme vás, jak se poprat s velkými písmeny ve vědeckých textech, kde je to občas hlavolam, ale o to větší vítězství, když na to přijdete!
- **Strojíme matiku puntíky a šipkami** – V tomto dílu zakončíme naši dobrodružnou jízdu definicí elementárního topu, tedy posledním stavebním kamenem pro to, abychom již bez zábran mohli strojit matiku s grácií a sebevědomím.
- **Speciální teorie relativity** – Vezmeme vás na výlet prostoročasem, kde zjistíte, proč se hybnost a zrychlení v relativitě chovají trochu jinak. Taky odpovíme na otázku: Co na to říká světlo?

To nejlepší teprve přijde! Tak neváhejte, čtěte dále, vyberte si téma a pusťte se do řešení. Navíc jakmile vám přidáme zpětnou vazbu, tak vám automaticky přijde e-mailem. Teda jen těm, kteří to mají na webu[2] zakliknuté. Ať máte všechny příklady v malíku a přejeme vám spoustu úspěchů a štěstí – nejen do nadcházejícího pololetí!

Vaši organizátoři

[1] https://math.naboj.org/cz/cs/
[2] https://mam.mff.cuni.cz/resitel/osobni-udaje/

Obsah

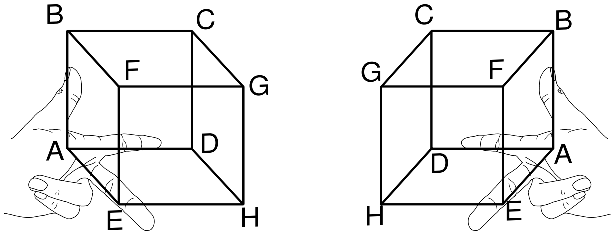
Zadání a řešení témat

1. deadline: 4. března 2025 | 2. deadline: 1. dubna 2025

Téma 2 – Vektory a matice

Díl 4: Determinanty

V tomto díle si ukážeme *determinanty* a později i *vlastní vektory.* Determinantem čtvercové matice $\mathbf{A}$ je číslo, ze kterého se dá vykoukat několik užitečných vlastností zobrazení, kterému původní matice odpovídá. Značí se $\det(\mathbf{A})$. Intuitivně si budeme představovat, že pro matici $n \times n$ absolutní hodnota jejího determinantu odpovídá míře zvětšení jednotkové n-dimenzionální krychle (tedy čtverce o hraně 1 pro matice 2×2, jednotkové krychle pro 3×3, …) po transformaci daným zobrazením. Znaménko determinantu pak značí, jestli se změnila *orientace báze* – odpovídá to třeba tomu, jestli se čtverec překlopil a má vrcholy v opačném pořadí, u krychle pak jestli sousedé některého vrcholu zůstaly v pořadí podle jedné ruky, nebo je potřeba použít ruku druhou, jak je vidět na obrázku 1 (a ve vyšších dimenzích se to představuje ještě obtížněji).



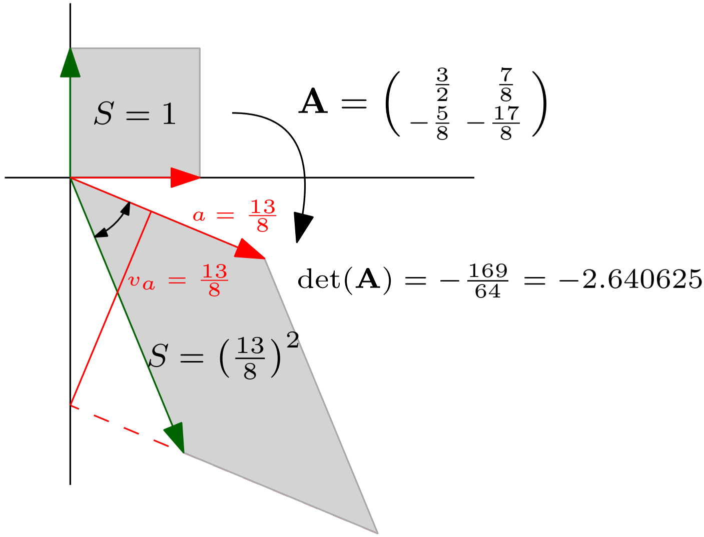
Obrázek 1: Různá pořadí os krychle.

Ještě se vraťme k tomu, jak odpovídá determinant změně velikosti při transformaci. I to se s dimenzí (a tedy rozměry matice) bude lišit: Víme, že matice 2×2 zobrazí čtverec na rovnoběžník, v tom případě se bude jednat o jeho plochu, jak můžeme vidět na obrázku 2. U krychle a matice 3×3 je to pak objem zobrazeného *rovnoběžnostěnu*, a ve vyšších dimenzích pak o hyperobjem n-dimenzionálního rovnoběžnostěnu. Vycházíme z faktu z prvního dílu, že lineární zobrazení nutně zachovávají rovnoběžnost přímek (a počátek soustavy souřadnic)

Jako další příklad můžeme uvést, že překlopení má determinant (-1), neboť prohazuje pořadí os; rotace a zkosení 1 (nezvětšuje ani neprohazuje osy) a škálování α-krát má determinant α^n, kde n je délka vektorů.

Jak determinanty počítat?

Sice jsme v odstavcích výš relativně dobře popsali, jaký determinant matice má vyjít, ale není úplně praktické kreslit rovnoběžnostěny a určovat jejich (hyper)objemy. Odvodíme proto jinou metodu, jak determinanty počítat.



Obrázek 2: Znázornění geometrického významu determinantu.

Víme, že lineární zobrazení jde skládat násobením matic. Je tedy intuitivní, že výsledná změna objemu bude odpovídat součinu změn objemů první a druhé transformace. Z toho máme $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$. Samozřejmě, jednotková matice objem zachová, tedy $\det(\mathbf{I}) = 1$.

Pokud v matici prohodíme dva řádky, otočí se znaménko determinantu. Speciálně se nám tedy bude hodit, že pokud v jednotkové matici dva řádky prohodíme, taková matice bude mít determinant -1 (prohodily se některé osy, musíme „změnit ruku“). Pokud některé číslo na diagonále jednotkové matice bude místo jedničky α, pak i determinant bude α (vznikne (hyper)kvádr).

A protože nám tahle pozorování velmi silně připomínají matice z řešení Problému 2.6, zbývá si rozmyslet, jaký bude determinant matice, která má kromě jedniček na diagonále ještě nějaké jedno číslo mimo diagonálu. V tomto případě zobrazení odpovídá zkosení ve směru kanonické báze, takže výsledný rovnoběžník má zachovanou výšku i délku příslušné hrany a determinant se tedy nezmění.[3]

A pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace umíme mimo jiné nalézt posloupnost řádkových úprav, které dávají inverzní matici. Suma sumárum: pokud si při redukci matice $\mathbf{A}$ na jednotkovou budeme průběžně počítat součin determinantů operací, které děláme, dostaneme determinant inverzní matice, tj. $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$.

Úloha 4.1 [0,5b]: *Jak z determinantu inverzní matice vypočítáme determinant původní matice?*

[3] Ve vyšších dimenzích pak z hyperkrychle vznikne kolmý hyperhranol s podstavou tvaru rovnoběžníku v rovině určené osami x_i a x_j, pakliže je naše další číslo na pozici ij.

Jenže chyták: my jsme slíbili, že pouze u regulárních matic existuje inverzní matice. Co když matice bude singulární? Ale na to už přece taky známe odpověď!

Úloha 4.2 [2b]: *Odvoďte z toho, co je napsáno výš a v předchozích dílech (hlavně ve druhém), že determinant singulární matice je nula.*

Zajímavé matice, dějství druhé

Ve zbytku dílu se nám bude hodit označit si několik typů matic. Tak rovnou:

- *Diagonální matice* má nenulové prvky jen na hlavní diagonále, tedy $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i \neq j$.
- *Horní trojúhelníková matice* má pod hlavní diagonálou nuly ($a_{ij} = 0$ pro $i > j$).
- *Dolní trojúhelníková matice* má naopak nuly nad hlavní diagonálou ($a_{ij} = 0$ pro $i < j$).

Tyto matice mají několik hezkých vlastností, zejména platí, že jsou regulární právě tehdy, když nemají nulu na diagonále (to jsme nezakázali, speciálně matici samých nul klidně budeme považovat jak za diagonální, tak za libovolnou trojúhelníkovou). A taky se pro ně snadno počítají determinanty.

Úloha 4.3 [3b]: *Jak můžeme snadno spočítat determinant*

- *diagonálních matic (1b) a*
- *horních trojúhelníkových matic (2b)?*

Poznámka: pro dolní trojúhelníkové matice vyjde řešení analogicky, jen se to hůř představuje.

Jak determinanty počítat méně pohodlně

Ještě pro úplnost ukážeme běžnou formální definici determinantu. Nejprve zapíšeme formálně a pak rozebereme lidsky, co se vlastně míní:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)}.$$

Definice působí poněkud zběsile a říká, že vezmeme všechny permutace („zpřeházení“) na sloupcích matice, pronásobíme diagonály těchto matic, tyto součiny ještě vynásobíme tzv. znaménkem permutace (to je to $\operatorname{sgn}(\pi)$, které říká, jestli jsme prohodili dva sloupce lišekrát nebo suděkrát a odpovídá to tomu násobení (-1) u matice prohazující řádky) a všechny tyto součiny sečteme (napříč permutacemi, tzn. máme $n!$ sčítanců).

Jistě si kladete otázku, proč by mělo být praktické sčítat $n!$ sčítanců místo Gaussovy–Jordanovy eliminace. Vskutku, většinou[4] to praktické není, ale pro matice 2×2 a 3×3 je to o poznání přímočařejší způsob, jak determinant vyjádřit:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \underline{ad} - \underline{bc},$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) = \underline{aei} + \underline{bfg} + \underline{cdh} - \underline{ceg} - \underline{bdi} - \underline{afh}.$$

(a) Matice 2×2 **(b)** Matice 3×3

Obrázek 3: Pomůcka pro výpočet determinantu malých matic.

Úloha 4.4 [1b]: *Určete determinant následujících matic* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$*:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4.5 [3b]: *Mějme matici* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Je-li* $\det(\mathbf{A}) = d$, *jaký je* $\det\left(\mathbf{A}^T\right)$*?*

Vlastní čísla a vlastní vektory

Slíbili jsme na začátku tohoto dílu, že kromě determinantů ukážeme i vlastní vektory. I tady se jedná o hezky představitelný koncept týkající se lineárních zobrazení: zajímá nás, jestli existují nějaké nenulové vektory, které po transformaci zachovají svůj směr a jen se škálují. A s tím budou souviset *vlastní čísla*, tedy to, jak moc se vlastní vektory budou škálovat.

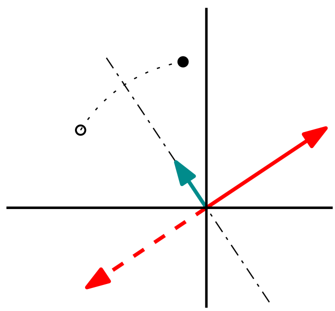
Příklady vlastních čísel a vektorů v rovině (tedy pro matice 2×2):

- Jednotková matice má dvojnásobné[5] vlastní číslo 1 a každý nenulový vektor je vlastní.

[4] Druhý užitečný důsledek definice je možnost počítat determinanty pomocí tzv. *Laplaceova rozvoje*, který se hodí pro řídké matice, tj. matice, které obsahují hodně nul. Ten ale v tématku nevyužijeme, tak ho nebudeme víc rozebírat – jen se může hodit vědět, že existuje.

[5] O násobnosti vlastních čísel si povíme za okamžik.

- Nerovnoměrné roztažení v obou osách má vlastní čísla odpovídající roztažení a vlastní vektory ve směru těchto os.
- Matice rotace žádné reálné vlastní číslo ani vlastní vektor nemá, a zjevně žádný směr nezachovává.
- Překlopení podle nějaké přímky procházející počátkem má vlastní vektor ve směru této přímky (zobrazí se sám na sebe) a vektor kolmý na tuto přímku (zobrazí se na vektor opačný). První je tedy příslušný vlastnímu číslu 1, druhý (-1) – vizme obrázek 4.



Obrázek 4: Vlastní vektory překlopení podle přímky.

Pojďme se nyní podívat na vlastní vektory podrobněji. Opět budeme uvažovat jen čtvercové matice a budeme vycházet z rovnosti

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

kde λ je vlastní číslo a $\vec{x}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ matice $\mathbf{A}$, resp. z obměny této rovnosti

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{x} = \vec{0}.$$

Poznamenejme, že nulový vektor nikdy nebudeme uvažovat jako vlastní vektor, ale naopak pokud vyjde nula jako vlastní číslo, pak je to platné vlastní číslo.

Samozřejmě, teď chceme vlastní čísla a vektory najít, ale rovnice má moc neznámých. Víme ale, že matice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ má být singulární (zobrazí nenulový vektor na nulový), a ta má nulový determinant. Řešíme tedy rovnici

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Determinant, jak víme z formální definice, je součet nějakých součinů n prvků matice. Když si tedy levou stranu rovnice výše rozepíšeme podle definice determinantu, dostaneme polynom stupně n v proměnné λ. Nazýváme ho *charakteristický polynom* matice $\mathbf{A}$ a jeho kořeny jsou přirozeně vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Je možné, že vyjde stejný kořen víckrát, pak říkáme, že dané vlastní číslo má takovou *násobnost* a odpovídá mu tolik vlastních vektorů. (Vlastní čísla a následně i vlastní vektory mohou vyjít komplexní i pro reálné matice, třeba matice rotace má dvě komplexní vlastní čísla a žádné reálné.)

Ukažme si to na příkladu. Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

máme

$$\mathbf{A} - \lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 3 & 0-\lambda & -4 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

což nám dává charaktetistický polynom

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) =& (1-\lambda)(0-\lambda)(2-\lambda) + 3\cdot(-4)\cdot(-1) + (-1)\cdot 3\cdot 2 - \\ & (-1)\cdot(0-\lambda)\cdot(-1) - 3\cdot 3\cdot(2-\lambda) - (1-\lambda)\cdot(-4)\cdot 2 \\ =& -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4. \end{aligned}$$

Jak si můžete sami dosazením ověřit, polynom má kořen -1 a dvojnásobný kořen 2, matice $\mathbf{A}$ má tedy vlastní číslo -1 a dvojnásobné vlastní číslo 2.

Pro nalezení vlastního vektoru (či vektorů v případě vícenásobného vlastního čísla) už pak známe matici $\mathbf{A}_i = \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$ a vektor tedy je řešením rovnice $\mathbf{A}_i \vec{x} = \vec{0}$ s tím rozdílem, že tentokrát matice není regulární a nás zajímá nenulové řešení. Ale takové už jsme se naučili najít taky ve druhém díle – vyjde vektor s parametrem, který můžeme libovolně zvolit, což odpovídá tomu, že libovolný násobek vlastního vektoru je pořád vlastní vektor.

K čemu to všechno je

Už jsme viděli, že nám determinanty a vlastní čísla a vektory dávají informace o lineárních zobrazeních. Determinanty a vlastní čísla však mají mnoho použití třeba při analýze funkcí více proměnných, mohou říci zajímavé charakteristiky kombinatorických grafů[6] nebo je na nich založený algoritmus PageRank, pomocí kterého Google určuje významnost stránek[7]. Taky se pomocí vlastních čísel dá snadno zjednodušit mocnění některých matic.

[6]Kombinatorickým grafem myslíme „puntíky spojené čarami“; viz `https://cs.wikipedia.org/wiki/Graf_(teorie_graf%C5%AF)`.

[7]Velmi zhruba se dá říci, že Google má matici pravděpodobností, s jakou se kdo kam proklikne, vlastní vektor pak odpovídá ohodnocení stránek, jak pravděpodobně na nich skončíme, protože další kliknutí jen zachová poměrné váhy těchto stránek. Samozřejmě se více můžete dočíst třeba na `https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank`

Jednu ze snadno uchopitelných aplikací posledního faktu si teď ukážeme.

Odvoďme si vzoreček pro Fibonacciho čísla!

Poslední fakt do skládačky k jednomu možnému postupu odvození vzorečku pro Fibonacciho čísla je existence *diagonalizovatelných* matic: Matice $\mathbf{M}$ je diagonalizovatelná, pokud existuje diagonální matice $\mathbf{D}$ a regulární matice $\mathbf{S}$ (tzv. *matice podobnosti*) taková, že $\mathbf{M} = \mathbf{SDS}^{-1}$. Ne každá matice je diagonalizovatelná, ale pokud je, tak bez odvození budeme tvrdit, že $\mathbf{D}$ má prostě na diagonále vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{S}$ má ve sloupcích vektory odpovídající těmto vlastním číslům (ve stejném pořadí). A takové diagonalizovatelné matice se snadno mocní: $\mathbf{M}^k = \mathbf{M} \cdot \ldots \cdot \mathbf{M} = \mathbf{SD}^k\mathbf{S}^{-1}$ (násobky $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}$ se v součinu prostě požerou, protože násobení matic je asociativní, diagonální matici jde mocnit prostě po prvcích).

Co se tady vlastně děje? Vlastní vektory tvoří bázi prostoru, kde původní matice žije, a tedy jen přejdeme do této báze, kde k-krát vlastně „jen zvětšíme (hyper)kvádr“, a výsledek pak necháme přejít zpátky do původního prostoru.

Pro jistotu ještě zadefinujeme Fibonacciho čísla: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pro každé $i \geq 2$ je $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Vzniká tak posloupnost čísel 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ….

No, a zbytek necháme na vás ☺

Úloha 4.6 [7b]: *Odvoďte explicitní vzoreček pro i-té Fibonacciho číslo. Tady je zhruba návod:*

1. *Najděte matici, která bude dávat vždycky další Fibonacciho číslo, tj.* $\mathbf{A}\binom{F_{i-1}}{F_i} = \binom{F_i}{F_{i+1}}$ *(1,5b).*
2. *Najděte vlastní čísla této matice (1,5b).*
3. *Najděte vlastní vektory příslušné těmto číslům (1,5b).*
4. *Poskládejte správnou diagonální matici (*$\mathbf{D}$ *výše), matici podobnosti (*$\mathbf{S}$*) a její inverzi (1b).*
5. *Vynásobte obecně* $\mathbf{A}^i \cdot \binom{0}{1} = \mathbf{SD}^i\mathbf{S}^{-1}\binom{0}{1}$ *(1,5b).*
6. *Tadá! První složka tohoto vektoru je přesně i-té Fibonacciho číslo.*

(Postup si případně upravte podle vlastní chutě, nevyžadujeme konkrétní mezikroky, pokud bude jasné, co zrovna počítáte. Ale zkuste se držet nějakého lineárně-algebraického přístupu (s maticemi))

Je nám jasné, že úloha má hodně mezikroků, které na sebe navazují. Pokud se vám stane, že se na něčem zaseknete nebo vám to nebude jasné, napište nám buď na Discord[8] nebo na e-mail `lingebra@ledoian.cz` a my vám zkusíme vhodně napovědět.

LEdo a Marian; `lingebra@ledoian.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

[8] do místnosti `#vektory-a-matice`!

Téma 3 – Programování v TEXu a LATEXu

Nyní už umíme definovat makra a environmenty. To se nám samozřejmě hodí i při psaní samotného dokumentu. Daleko častěji si však potřebujeme nadefinovat makra/environmenty (případně nastavit hodnoty registrů/counterů/délek) a pak je používat v mnoha dokumentech.

Jednou možností je kód nakopírovat přímo do dokumentu. To je však velmi nepraktické, zvláště když už máme více částí kódu, které dělají různé věci a různě na sobě závisí (v jedné části potřebujeme definice z druhé), nebo pokud si chceme definovat různé vzhledy dokumentu a mít možnost jednoduše vyměnit jeden za druhý.

Také můžeme použít TEXovské `\input`. Při tom však nemáme moc možností konfigurace (jako třeba v `\usepackage[a5,landscape,margin=5cm]{geometry}`), a navíc pokud použijeme `\input` na stejný soubor vícekrát[9], opravdu se vloží vícekrát, což často skončí chybou, neboť definice maker často počítá s tím, že makra ještě neexistují.

Díl čtvrtý: Balíčky

Proto má LATEX systém balíčků a tříd. **Balíček** (anglicky package) je vlastně soubor s příponou `.sty` obsahující LATEXovský kód. Kromě přípony `.sty` musí ještě ze začátku obsahovat dva řádky:

```
\NeedsTeXFormat{LaTeX2e}
\ProvidesPackage{nazevbalicku}[YYYY/MM/DD Popis balíčku]
```

Pokud toto splňuje a nachází se ve stejné složce jako váš soubor, případně jinde, kde TEX hledá balíčky, můžeme ho použít pomocí `\usepackage[parametry]{souborbalickubezpripony}[datum]`. V podstatě se tím kód v balíčku vloží do daného dokumentu, ale na rozdíl od `\input` vkládá pouze jednou. Navíc může obsahovat `parametry` (o těch později) a můžeme přidat `datum`, které říká minimální verzi balíčku (udávanou právě pomocí `YYYY/MM/DD`, např. `2025/01/02`). Platí, že `nazevbalicku` by měl odpovídat názvu souboru (bez přípony `.sty`), jinak LATEX vypisuje varování.

V rámci balíčku můžeme použít jiné balíčky, místo `\usepackage...` je však lepší psát `\RequirePackage...` (i když až na výjimky je to totéž).

Třída (anglicky class) je skoro totéž, ale slouží primárně k definici celkového vzhledu dokumentu.[10] K tomu se váže to, že dokument obsahuje právě jednu třídu, definice balíčku nemůže obsahovat žádnou a v definici třídy lze nejvýše jednou načíst jinou třídu.

[9] Můžeme si například definovat nějaká základní makra (třeba na vycentrování), která pak chceme používat k složitějším definicím (třeba vkládání vycentrovaných tabulek a vkládání vycentrovaných obrázků) a ty pak někde chceme použít najednou (v dokumentu budeme vkládat jak obrázky, tak tabulky).

[10] Rozhodovací kritérium balíček/třída může být např. to, jestli dané definice můžeme použít v různých typech dokumentů (článek, kniha, klidně i prezentace) nebo také jestli je mohou používat další balíčky; pak je to rozhodně balíček. Naopak pokud definujeme, že dokument například má jednotlivá tématka, která se zobrazí v obsahu a záhlaví, že nadpisy jsou takového a takového vzhledu atd., pak je to spíše třída.

Syntakticky se třída liší tím, že

- soubor má příponu `.cls`,
- místo `\ProvidesPackage...` píšeme `\ProvidesClass...`,
- místo `\usepackage...` používáme `\documentclass...` (to obsahuje každý dokument hned na začátku)
- a pro použití třídy v jiné třídě místo `\RequirePackage...` máme `\LoadClass...` (to může obsahovat pouze definice třídy a to nejvýše jednou).

Úloha 4.1 [1b]: *Definujte (smysluplný) balíček/třídu. (Dobrým odrazovým můstkem může být kód, který jste vytvořili k minulému číslu.)*

Parametry

Výhodou balíčků (a tříd) je i to, že mohou být nastavitelné. Ti, co už se sžili se syntaxí keyval (sekce Keyval v minulém čísle[11]), mají výhodu, neboť těm stačí nadefinovat klíče a pak jen pustit `\ProcessKeyOptions[pojmenování]`, což funguje stejně jako `\SetKeys[pojmenování]{#N}`, jen ne na `N`-tý parametr makra, ale na `parametry` v `\usepackage[parametry]{}` nebo `\documentclass[parametry]{}`.

Jednodušší (ale omezenější) variantou je `\DeclareOption{parametr}{kód}`, které vykoná `kód` právě tehdy, když je v `parametry` přítomen `parametr`. Přičemž je ještě potřeba po definici všech parametrů zavolat `\ProcessOptions\relax`.

Příklady použití obou způsobů najdete na `https://wiki.moznabude.cz/doku.php?id=latex:prog:class`.

Úloha 4.2 [1b]: *Definujte balíček/třídu s alespoň jedním (smysluplným) parametrem.*

Chyby

Ještě se můžou hodit makra:

```
\ClassError{názevtřídy}{text chyby}{obsáhlejší informace o chybě}
\ClassWarning{názevtřídy}{text varování}
\PackageError{názevbalíčku}{text chyby}{obsáhlejší informace o chybě}
\PackageWarning{názevbalíčku}{text varování}
```

(chyby zastaví kompilaci, v Overleafu se zobrazují červeně, varování se pouze vypíší, v Overleafu oranžově). Například pokud náš balíček používá balíček `subcaption`, můžeme přidat následující kód.

```
\AddToHook{begindocument/before}{\IfPackageLoadedTF{subfig}{
  \PackageError{nazevbalicku}}{Balíček subfig nelze použít spolu
s nazevbalicku, neboť ten již používá subcaption.}
}{}}
```

[11] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/31/31-3.pdf`

Tím se uživateli vašeho balíčku zobrazí rozumná chybová hláška, když použije balíček `subfig`, který je se `subcaption` nekompatibilní. (Pro jiné dvojice nekompatibilních balíčků bude pravděpodobně potřeba použít jiné místo, kde vyhodit chybu.)

Úloha 4.3 [1b]: *Definujte balíček/třídu s alespoň jednou (smysluplnou) chybou.*

Problém 4.4: *Vytvořte balíček/třídu pro ostatní řešitele, sebe či orgy. Fantazii se meze nekladou (a boduje se).*

V definici balíčků a tříd navíc můžeme používat makra s názvem obsahujícím znak `@` (například některá techničtější makra užitečná pro definování komplexních maker[12]). Taková makra nelze používat přímo v dokumentu aniž bychom předefinovali kategorii `@` na písmeno (a pak zpět); buď pomocí `\catcode` jako v prvním díle, nebo pomocí `\makeatletter` a `\makeatother`. Tím pádem jsou to taková „internější“ makra (skrytá běžným uživatelům, především je běžný uživatel omylem nepředefinuje).

Řešení 3. dílu

Úloha 3.1

Zadání:
Definujte si nějaké smysluplné makro s alespoň jedním nepovinným a alespoň jedním povinným parametrem.

Řešení od Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Jany Uglickich:

```
\NewDocumentCommand\MOhlavicka{s m m m m O{1} O{1}}{%
\IfBooleanTF{#1}{\begin{centering}}{}
\noindent \textbf{#2}\\
\textbf{#3}\\
\textbf{#4}\\
\textbf{#5}\\
\IfValueT{#6}{ \noindent \textbf{List: #6/}}{}%
\IfValueT{#7}{\noindent\textbf{#7}}{}

\IfBooleanTF{#1}{\end{centering}}{}%
\vspace*{1ex}
\hrule
\vspace*{1ex}
}

\MOhlavicka{Jana Uglickich}{třída, gymnázium}{adresa}{A-I-3}[1][2]
```

[12] https://mirrors.nic.cz/tex-archive/info/macros2e/macros2e.pdf

Úloha 3.2

Zadání:

Definujte environment `uloha`*, který dostane v nepovinném parametru počet bodů a uvnitř zadání a vypíše zadání úlohy jako je toto. (Kurzíva se tvoří pomocí* `\textit{text}`*, tučné písmo pomocí* `\textbf{text}`*.)*

Řešení od Mgr.MM Františka Nouzy:

```
\NewDocumentEnvironment{uloha}{m o +b}{% číslo úlohy, počet bodů, zadání
\textbf{Úloha #1}
\IfValueT{#2}{[#2b]}:
\textit{#3}
}{}
```

Úloha 3.3

Zadání:

Definujte si nějaké jiné makro používající alespoň dvě `.store`*.*

Řešení od Doc.MM Jany Uglickich:

```
\usepackage{moresize,xcolor}
\DeclareKeys[klice]{
barva.store=\barva,
text.store=\text,
tucne.if=tucne,
kurziva.if=kurziva,
strojove.if=strojove,
velke.if=huge,
male.if=tiny}

\NewDocumentCommand\FormatovanyText{O{}}{%
\SetKeys[klice]{text={Vypadá to, že jste nezadali žádný text, který by se měl
vypsat. Tak dostanete popis, co tohle makro vlastně dělá. \par Tohle makro
umožňuje vypsat zadaný text s nějakým řezem (tučný, kurzíva, strojový; řezy
nelze kombinovat), nějakou velikostí (defaultní \TeX ovská, velikost HUGE,
velikost tiny) a nějakou barvou (podporují se barvy defaultně dostupné
v balíčku xcolor, takže třeba cyan, magenta nebo green, ale také samozřejmě
black).  }, barva=black}%
\SetKeys[klice]{#1}%
\ifhuge\HUGE\fi\iftiny\tiny\fi
\iftucne\bf\fi\ifkurziva\it\fi\ifstrojove\tt\fi\textcolor{\barva}{\text}
\ifhuge\normalsize\fi\iftiny\normalsize\fi
}%

\FormatovanyText[tucne,barva=orange] % text={Vypadá to, že ...}
\FormatovanyText[kurziva, velke, barva=magenta,
text={Tento text se vypíše kurzívou, písmena budou velká a barva růžová.}]
```

Úloha 3.4

Zadání:
Doprogramujte následující kód (zadání je šedivý kód), aby před kapitolami psal jejich pořadové číslo a v obsahu opravdu byla čísla stránek správně prokliknutelná.

Bonus: Kapitoly po zavolání `\prilohy` *by měly být římskými čísly.*

Řešení:
```
\documentclass{article}\usepackage{hyperref}
\newcounter{kapitola}
\AtEndDocument{\newpage\noindent\Large\textbf{Obsah:}\\}
\NewDocumentCommand\kapitola{m}{\newpage\noindent\refstepcounter{kapitola}%
\Large\textbf{\thekapitola: #1}\label{#1}%
\AtEndDocument{#1 \hfill \pageref{#1}\\}}
% \AtEndDocument{X} = \AddToHook{enddocument}{X}
\NewDocumentCommand\prilohy{}{%
\RenewDocumentCommand\thekapitola{}{\Roman{kapitola}}}

\begin{document}
\kapitola{Úvod}\kapitola{Stať}\kapitola{Závěr}
\prilohy\kapitola{Mapa}\kapitola{Seznam postav}
\end{document}
```

Úloha 3.5

Zadání:
Vytvořte makra `\kapitola{název}` *a* `\naKonciKapitoly{kód}`*, tak, že* `\kapitola` *nejprve provede všechen* `kód`*, jež byl jako parametr volání* `\naKonciKapitoly`*, a pak vypíše samotný* `název` *kapitoly.*

Řešení:
```
\NewHook{KonecKapitoly}
\NewDocumentCommand\kapitola{m}{\UseHook{KonecKapitoly}\section{#1}}
\NewDocumentCommand\naKonciKapitoly{+m}{\AddToHook{KonecKapitoly}{#1}}
```

Úlohy 3.6 a 3.7

Zadání:
Předpokládejme, že dostaneme účastníky ve formátu

```
\ucastnik{jméno}{e-mail}{škola}
\ucastnik{jméno}{e-mail}{škola}
\ucastnik{jméno}{e-mail}{škola}
```

Definujte makra `\ucastnik`*,* `\jmena` *a* `\kontakty` *tak, aby* `\jmena` *vypsalo* `jména` *všech účastníků a* `\kontakty` *vypsalo postupně třeba všechny* `e-maily`*.*

Zadání:
Doplňte makra z předchozí úlohy tak, aby ke každému účastníkovi vypsala jeho pořadové číslo a stejné číslo se pak vypsalo i u jeho kontaktu (abychom spárovali účastníky a jejich kontakty).

Řešení od Mgr.MM Františka Nouzy:

```
\NewHook{Jmena}\NewHook{Maily}\NewHook{Skoly}
\newcounter{pocitadlo}
\setcounter{pocitadlo}{1}

\NewDocumentCommand\ucastnik{m m m}{
\AddToHook{Jmena}{\arabic{pocitadlo}. #1\stepcounter{pocitadlo}\\}
\AddToHook{Maily}{\arabic{pocitadlo}. #2\stepcounter{pocitadlo}\\}
\AddToHook{Skoly}{\arabic{pocitadlo}. #3\stepcounter{pocitadlo}\\}
}

\NewDocumentCommand\jmena{}{\UseHook{Jmena}\setcounter{pocitadlo}{1}}
\NewDocumentCommand\kontakty{}{\UseHook{Maily}\setcounter{pocitadlo}{1}}
```

Všimněte si, že se musí po každém použití hooku vynulovat počítadlo. To je tím, že zatím neumíme získat aktuální hodnotu počítadla, neboť `\arabic{pocitadlo}` se „provede“ (expanduje) až při `\UseHook`. To se dá obejít:

Řešení od Doc.MM Michaela Jarvise:

```
\NewHook{seznamjmena}\NewHook{seznamemail}\NewHook{seznamskola}
\newcounter{pocet}\setcounter{pocet}{0}

\makeatletter
% same as AddToHook, but fully expands arguments
\NewDocumentCommand{\ExpandAddToHook}{m m}{%
\@expandtwoargs\AddToHook{#1}{#2}%
}
\makeatother

\NewDocumentCommand{\ucastnik}{m m m}{%
\stepcounter{pocet}%
\ExpandAddToHook{seznamjmena}{\thepocet: #1\\}%
\ExpandAddToHook{seznamemail}{\thepocet: #2\\}%
\ExpandAddToHook{seznamskola}{\thepocet: #3\\}%
}

\NewDocumentCommand{\jmena}{}{\UseHook{seznamjmena}}
\NewDocumentCommand{\kontakt}{}{\UseHook{seznamemail}}
\NewDocumentCommand{\skola}{}{\UseHook{seznamskola}}
```

Jeho makro `\ExpandAddToHook` dělá právě to, že nejprve „vyhodnotí" (expanduje) parametry, a pak je teprve předá makru `\AddToHook`. Původně k tomu používal záplavu TEXovských `\expandafter` (to je v čistém TEXu docela běžné), ale my jsme to nahradili užitečným LATEXovským makrem `\@expandtwoargs` (které dělá přesně to, že expanduje parametry makra a pak mu je předá). (Ale protože nejsme v definici balíčku, museli jsme přidat `\makeatletter` a `\makeatother`.)

Problém 3.8

Zadání:
Na `https://mam.matfyz.cz/media/prilohy/31-3/abstrakt.tex` *máte formát, v jakém dostanete abstrakty. Vyrobte z nich sborníček (dokument obsahující všechny abstrakty), který se co nejvíce podobá tomu na* `https://mam.matfyz.cz/media/prilohy/31-3/sbornicek.pdf` *(případně vaší představě, jak by měl sborníček vypadat).*

Řešení:
Na `https://mam.matfyz.cz/media/prilohy/31-4/sbornicek.zip` si můžete prohlédnout řešení Doc.MM Michaela Jarvise, Doc.MM Martina Těšitele, Doc.MM Jany Uglickich a mé vlastní šité horkou jehlou z původního M&Mího řešení (to však navíc obsahuje i triky jako verzi bez kontaktů na web, takže je velice nepřehledné). Nezaručujeme plnou správnost, ani pochopitelnost (a to ani u našeho „oficiálního řešení"), ale jsme otevřeni jakékoliv debatě (jak co udělat, proč je tam tohle a tamto, které provedení je nejlepší atd.) na Discordu, či po e-mailu.

Jidáš; `jonas.havelka@volny.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka
(PDF) i soubory `.tex`, `.sty` *a* `.cls`

Téma 4 – Typografie a pravopis

Minule jsme se podívali na interpunkci. Ač v té je při psaní vědeckých děl, kde si člověk dává pozor na pravopis, pravděpodobně největší chybovost,[13] její pravidla jsou spíše stručná a intuitivní. Zato velká písmena, která jsou ve vědě (kde se vše pojmenovává po lidech a občas po univerzitách) stejně důležitá, mají velmi obsáhlá pravidla[14] a spoustu výjimek.

V souvislosti s tímto jevem také připomínáme článek „Spřežky na začátku slov“ od Doc.MM Jany Uglickich z minulého dílu.

Díl čtvrtý: Velká písmena

Nejlepším pravidlem pro psaní velkých písmen je: zjistěte si, jak se dané vlastní jméno / místní název / zkratka píše. V mnoha případech je to totiž dáno tradicí (*Moravan*), nějakou další znalostí (Karlova univerzita se jmenuje *Univerzita Karlova*, *IKEA* jsou iniciály), přáním osoby (*LEdoian*, *lord Radim*), povahou věci (*Bílá Hora* je pražská čtvrť, nebo případně tramvajová zastávka, stojící na *Bílé hoře*), nebo tím, co píšete (*Ty*/*Vy* v dopise, typy oblastí jako *Národní park* ve vyhláškách[15]) atd. Je ale třeba mít na vědomí, že čeština píše velká písmena jinde než třeba němčina (všechna podstatná jména začínají velkým písmenem) nebo angličtina (velkých prvních písmen se používá pro zdůraznění slova a v nadpisech).

V matematice se nejčastěji setkáváme s problémem vytváření přídavného jména od jména vlastního. To lze dvěma způsoby, buď pomocí přípon jako -ův (-ova, -ovo), -in (-ina, -ino), pak se píše velké písmeno (např. *Pýthagorova věta*, *Eukleidovy věty*[16]), nebo pomocí přípon jako -ský (-ská, -ské), -ovský (-ovská, -ovské), pak se píše písmeno malé (např. *eukleidovský prostor*, *eukleidovská konstrukce*). Většinou je zažitý právě jeden z těchto způsobů.

Úloha 4.1 [1b]: *Jak už se píše výše,* Univerzita Karlova *se píše s velkým U, i když je to obecné označení. Obdobně se píše mnoho gymnázií. Najděte alespoň dva další takové názvy.*

Problém 4.2: *Více se tu o velkých písmenech rozepisovat nebudeme, ale pokud máte nějaký oblíbený jev, nebojte se o něm napsat článek. (Nezapomeňte však, že článek má něco přinést ostatním řešitelům, tedy jen vyjmenovat své oblíbené jevy stačit nebude.)*

---

[13] Proto se k psaní interpunkce ještě vrátíme v příštím dílu, kde se podíváme na to, jak psát matematiku.

[14] Jen Internetová jazyková příručka má šestnáct článků o velkých písmenech, a to počítáme pouze ty s názvem začínajícím „Velká písmena –“ (`https://prirucka.ujc.cas.cz/?dotaz=Velk%C3%A1+p%C3%ADsmena`) a ne třeba „Zkratky iniciálové“ (`https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=781`).

[15] Všude jinde jsou toto obecné názvy, takže píšeme *chráněná krajinná oblast Třeboňsko*. Nejjednodušší je samozřejmě psát *CHKO Třeboňsko*, kde o psaní velkých písmen není pochyb.

[16] Další informace ohledně psaní jmen antických matematiků, tedy například Eukleida a Pýthagora, najdete na `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Historie_MFF/AnticMat_koment.pdf`.

Řešení 3. dílu

Úloha 3.1

Zadání:
V jakých dalších případech se za interpunkčními znaménky (zejména tečkou) nepíše mezera?

Řešení:
Nejčastějším takovým případem je, když za nimi následuje další interpunkční znaménko (zejména závorky nebo uvozovky). Velmi častou situací je také to, že interpunkční znaménko je součástí nějaké speciální syntaxe, např. číslování kapitol nebo časový údaj.

Úloha 3.2

Zadání:
Často najdete chyby v psaní spojovníku nebo pomlčky. Co je správně?

- *Gauss–Jordanova, Gaussova–Jordanova, Gaussova – Jordanova, Gauss-Jordanova.*
- *Marie Curie–Skłodowska, Marie Curie – Skłodowska, Marie Curie-Skłodowska, Marie Curie - Skłodowska.*
- *Praha–Libeň, Praha – Libeň, Praha-Libeň, Praha - Libeň*
- *5.-13. dubna, 5.–13. dubna, 5. – 13. dubna, 5. - 13. dubna.*
- *23. 12. – 3. 1., 23. 12. - 3. 1., 23. 12.–3. 1., 23. 12.-3. 1.*

Řešení:
- Gaussova–Jordanova: `https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=165`, druhý odstavec.
- Marie Curie-Sklodowska: `https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=164`, bod 1. d).
- Praha-Libeň: `https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=164`, bod 2.
- 5.–13. dubna a 23. 12. – 3. 1.: `https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=165`, třetí odrážka.

Problém 3.4

Zadání:
Jak byste do věty zakomponovali emoji (česky také emodži)? Psali byste za ně tečku? Nebo byste je psali za tečku? Proč?

Řešení:
Sešlo se nám několik řešení, která by psala tečku i emoji a určovala by pořadí, stejně jako v M&M v poslední době rozhodujeme odkaz na poznámku pod čarou:

před tečku, pokud souvisí s danou částí věty (slovem); za tečku, pokud souvisí s celou větou.

Cenným příspěvkem jsou pak následující dvě řešení (od Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Julie Klementové a Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Františka Nouzy), která problém rozebírají z více perspektiv a do detailu.

Řešení od Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Julie Klementové:

> Vzhledem k tomu, že emotikony nejsou interpunkční znaménka, daný text jen emočně doplňují, neexistuje žádná konvence ani pravidlo, jimž bychom se mohli vždy řídit.
>
> Emoji bych psala až za tečku; napsala bych tedy normálně větu, ukončila bych ji odpovídajícím znaménkem a teprve až za znaménko přidala případně emoji, aby byla zachována čitelnost a struktura textu. Interpunkční znaménka jsou součástí gramatické struktury věty a emoji pouze „ilustrace“ k textu (např. *Dnes je slunečný den.* ☀️).
>
> Výjimkou by mohlo být, kdybych emoji použila uprostřed věty (např. *Mám ráda* 🍏*,* 🍍 *a* 🍓*.*). Zde emoji text doplňují, a proto bych psala interpunkční znaménko až za emoji.
>
> Problém nastává, pokud bychom emoji chtěli přidat do nějakého souvětí, tedy před/za čárku či spojku oddělující jednotlivé věty od sebe. Mějme například toto souvětí:
>
> *Jeho odpověď mě velmi překvapila* 😳*, většinou tak vstřícný nebývá.*
>
> *Jeho odpověď mě velmi překvapila,* 😳 *většinou tak vstřícný nebývá.*
>
> Pokud bych se měla řídit tím, co jsem napsala výše, správná varianta by byla ta druhá, tedy emoji až za čárkou, ale pokud bych se měla rozhodovat podle citu, volila bych první variantu, tedy emoji před čárkou, protože emoji má dokreslovat emoce u první věty souvětí.
>
> Abychom rozhodli tento problém, je dobré si uvědomit, že daná emoce, čili nálada vycházející ze souvětí, bývá většinou pro celé souvětí stejná, proto můžeme bez výčitek svědomí a beze změny významu i emocionálního vyznění souvětí přesunout emoji na konec věty, až za tečku: *Jeho odpověď mě velmi překvapila, většinou tak vstřícný nebývá.* 😳

Řešení od Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Františka Nouzy:

> Já se kloním k nápadu, že by emoji mohly být dalším typem „ukončovacího“ znaménka, jako jsou třeba tečka nebo otazník. Věta by pak mohla vypadat třeba takhle 😁
>
> Dost možná se vám tohle zpracování moc nelíbí. Než si člověk zvykne, věta ukončená emotikonou vypadá trochu neukončeně. Nemám tak úplně důvod dělat to právě takhle, spíš dva důvody nepsat emoji s tečkou: pokud dám tečku před emoji, připadá mi, že už emoji není součástí věty (což by podle mě měla být). 😕 Spíš se přilepí k větě následující. No a když tečku dám až za emoji, vypadá to

prostě nanic 🤢. Tečka zkrátka patří hezky na konec nějakého slova a ne až za emoji. Když bych ale měl volit mezi těmito dvěma variantami, zvolil bych tečku za emoji 😮‍💨. Když už nic, alespoň udrží emotikonu v rámci věty.

No, a pokud nastane situace, ve které se emoji objeví uprostřed věty 🤔, nechal bych okolní text chovat se, jako kdyby tam nebylo. Toto řešení se mi zdá konzistentní s „tečkou po emoji“ z minulého odstavce.

Jidáš; `jonas.havelka@volny.cz`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 5 – Strojíme matiku puntíky a šipkami

Díl 3: Elementární topos podruhé

V tomto, srovnatelně kratším, díle tématka dokončíme definici *elementárního topu* jakožto úplné kategorie s exponenty a klasifikátorem podobjektů. Definovavše v minulém díle *limity* jako terminální objekty kategorie kuželů nad daným diagramem, prozradili jsme, že kategorie je *úplná*, když v ní má úplně každý diagram svoji limitu. Jakmile objasníme zbylé dvě klíčové vlastnosti elementárního topu, dojdeme konečně na místo, kde můžeme do haleluja „strojit matiku puntíky a šipkami“.

Podobně jako dříve, i teď přispějí jisté vlastnosti množin cennou inspirací. Celou dobu nám bude lítým sokem neexistence pojmu „prvku“ objektu v kategorii a zarytá tvrdošíjnost teorie množin v neochotě se prvků vzdáti. Limity již přispěly k jeho porážce – pozřeli jsme, že množinové konstrukce jako součin, řešení rovnic i vzor funkce lze postavit použitím jen množin a funkcí mezi nimi.

My se tomuto soku však hodláme nejen postavit čelem, ale přímo vysmívat do obličeje. A to tím, že bez jakékoli zmínky o prvcích definujeme *podmnožinu*. To fakt jde?

Monomorfismy a epimorfismy

Nabitými Smith and Wessony u boku při polední přestřelce na divoké teorii kategorií se nám stanou proslulé a obávané *monomorfismy* a *epimorfismy*[17]. Jsou to kategorické paralely *prostých* (či *injektivních*) a *surjektivních* funkcí.

Připomínáme, že z definice je funkce $f\colon A \to B$ *prostá*, když posílá dva různé prvky z A na dva různé prvky z B; symbolicky $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Ach jo, zas ty prvky. Prvky, prvky, prvky… Ale nebudou nám překážet na dlouho! My totiž, jsouce již protřelí a vychytralí kategorici, umíme ověřit, že je funkce prostá použitím jiných funkcí.

Představme si pro názornost, že máme jinou funkci $g\colon A \to B$, která prostá není a „slepuje“ prvky a_1 a a_2, čili $g(a_1) = g(a_2) = b$. Dosvědčit to mohou buď ony prvky a_1, a_2 samotné (což nechceme) anebo třeba konstantní funkce $h_1, h_2\colon C \to A$, které zobrazují úplně každý prvek $c \in C$ (za C stačí brát libovolnou neprázdnou množinu) na a_1, resp. a_2, to jest, $h_1(c) = a_1$ a $h_2(c) = a_2$ pro každé $c \in C$. Funkce h_1 a h_2 jsou zřejmě rozdílné, avšak g je, stejně jako prvky a_1 a a_2, ztotožňuje, neboť zobrazuje a_1 i a_2 na týž prvek $b \in B$. Našli jsme tedy funkce $h_1 \neq h_2$, pro které ale platí, že $h_1 g = h_2 g$. Pro přehlednost můžeme nakreslit obrázek.

[17] Oba pojmy pocházejí z řečtiny: konkrétně ze slov *mónos*, „samotný, jediný“, *epí*, „na“, a *morphé*, „podoba, tvar“.

$$\begin{tikzcd}
& \{a_1\} \subset A \arrow[dr, "g"] & \\
C \supset \{c\} \arrow[ur, "h_1"] \arrow[dr, "h_2"'] \arrow[rr, dashed, "h_1 g = h_2 g"] & & \{b\} \subset B \\
& \{a_2\} \subset A \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Nakonec si všimněme, že takové funkce umíme najít pro jakoukoli neprostou funkci $g\colon A \to B$. My si pod nimi představujme konstantní funkce, které zobrazují vše na prvky, jež následně g zobrazí na jeden jediný, ale naše představa není pro definici prosté funkce rozhodující. Stačí nám vědět, že takové funkce *vždy existují.* Důležitá myšlenka, jež nám bude i později užitečná: mezi výstupem konstantní funkce a prvkem její cílové množiny vlastně není z pohledu teorie množin žádný rozdíl.

Shrňme si, co jsme vyzkoumali: funkce $g\colon A \to B$ **není** prostá, když existují funkce $h_1, h_2\colon C \to A$ takové, že $h_1 \neq h_2$, ale $h_1 g = h_2 g$. A hle! Jásejme převelice, neb slovo *prvek* jsme neutrousili ba ani náznakem. Není již těžké si rozmyslet, že funkce $f\colon A \to B$ naopak prostá **je**, když žádné funkce $h_1, h_2\colon C \to A$ neslepuje; pokud tedy $h_1 \neq h_2$, pak též $h_1 f \neq h_2 f$. Dokazovat, že tato definice prostoty funkce je ekvivalentní té „standardní“, zde nebudeme. Zato vy ano!

Úloha 4.1 [1b]: *Dokažte, že funkce $f\colon A \to B$ je prostá právě tehdy, když pro každou množinu C a funkce $h_1, h_2\colon C \to A$ platí, že pokud $h_1 \neq h_2$, pak $h_1 f \neq h_2 f$.*

Podotýkáme, že slovy „právě tehdy, když“ vyjadřujeme ekvivalenci *vyřčených tvrzení. Možná vám pomůže použít poslední implikaci v* obměně*, čili jako: $h_1 f = h_2 f \Rightarrow h_1 = h_2$.*

Definice *monomorfismu* v libovolné kategorii $\mathcal{A}$ je v zásadě totožná. Řekneme, že šipka $a \xrightarrow{\alpha} b$ je *monomorfismus* (zkráceně též *mono*), když pro každý objekt $c \blacktriangleleft \mathcal{A}$ a každé dvě šipky $c \xrightarrow{\gamma_1} a, c \xrightarrow{\gamma_2} a$ platí, že $\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1\alpha \neq \gamma_2\alpha$.

Podobně jako monomorfismus je obdobou prosté funkce, *epimorfismus* (zkráceně *epi*) je obdobou funkce surjektivní. Tak nazýváme funkci $f\colon A \to B$, vzhledem k níž má každý prvek B svůj vzor v A – pro všechna $b \in B$ existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$. Množinová definice surjektivní funkce nedává najevo žádnou její přímou spojitost s funkcí prostou. Ovšem, její kategoriální (a objektivně mnohem hezčí) definice je dokonale *duální* kategoriální definici prosté funkce. To znamená, že definici surjektivní funkce, resp. epimorfismu, sestrojíme zkrátka tím, že v definici funkce prosté, resp. monomorfismu, otočíme všechny šipky.

Úloha 4.2 [2b]: *Definujte epimorfismus v libovolné kategorii $\mathcal{A}$ a dokažte, že v kategorii množin jsou epimorfismy rovny surjektivním funkcím. Řečeno úplně: dokažte, že funkce $f\colon A \to B$ je epimorfismus právě tehdy, když je surjektivní.*

Jelikož monomorfismy i epimorfismy hrají v teorii kategorií významnou roli, vysloužily sobě vlastní značení. Fakt, že šipka $a \xrightarrow{\alpha} b$ je *monomorfismus*, značíme jako $a \overset{\alpha}{\rightarrowtail} b$ a fakt, že šipka $c \xrightarrow{\gamma} d$ je *epimorfismus*, zapisujeme symbolem $c \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} d$.

Na závěr oddílu ještě varování: šipka, která je jak mono, tak epi, **není** ještě nutně isomorfismus. Dát příklad takové šipky je bez znalosti hlubší teorie nemožné; v kategorii množin jsou totiž isomorfismy přesně bijektivní funkce – z definice funkce, jež jsou prosté (tedy mono) a surjektivní (tedy epi).

Klasifikátor podobjektů

S ocelovou rozhodností saháme po revolverech. Nepřítel je však rychlejší a střílí náboj s definicí podmnožiny. Panteřími smysly se vyhýbáme; kulka nás leč škrábe. Šokem nám probíhá život před očima a my se rozpomínáme, že A je podmnožinou B z definice tehdy, když je každý prvek A též prvkem B. Neblouzníme však dlouho; držíce revolvery již pevně v rukou, pálíme hned dvě funkce – funkci *inkluse* a *charakteristickou funkci.*

První z těchto funkcí přináší důvod definice monomorfismu. Jest-li totiž A podmnožinou B, pak z A do B vede funkce, obvykle zvaná pouze *inkluse*, která se chová vlastně jako identita na A, tedy posílá každý prvek $a \in A$ na ten samý prvek $a \in B$. Všimněme si, že taková funkce je *prostá* (tedy *mono*) a může existovat jedině tehdy, když je A opravdu podmnožinou B, protože žádný prvek $a \in A$ nesmí v B chybět. *Inkluse* nám umožňuje částečně předefinovat podmnožinu, ale ještě ne do podoby, po které se pídíme. Opravňuje nás tvrdit, že A je podmnožinou B, když existuje prostá funkce $i\colon A \rightarrowtail B$ s předpisem $i(a) = a$ pro každé $a \in A$. Druhá část věty – „s předpisem $i(a) = a$" – stále využívá prvků množiny A. Co s tím?

Vzduchem naštěstí letí ještě jedna funkce, zvaná *charakteristická.* Je to funkce, která vlastně „prochází" množinu B, rozhodujíc u každého prvku, zda patří i do podmnožiny A. Formálně je jí funkce[18] $\chi_A\colon B \to \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$ daná předpisem

$$\chi_A(b) = \begin{cases} \mathtt{ano}, & \text{když } b \in A, \\ \mathtt{ne}, & \text{když } b \notin A. \end{cases}$$

Dvě důležitá pozorování:

- každá podmnožina $A \subseteq B$ odpovídá přesně jedné charakteristické funkci $\chi_A\colon B \to \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$;
- podmnožina $A \subseteq B$ je *vzorem* prvku `ano` vzhledem k χ_A, to jest $A = \chi_A^{-1}(\{\mathtt{ano}\})$.

[18] Každá dvouprvková množina je v principu množina obsahující logickou „pravdu" a logickou „lež". Často se píše jako $\{0, 1\}$, též $\{\mathtt{t}, \mathtt{f}\}$ či $\{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$.

První z pozorování je, doufáme, zřejmé. Různé charakteristické funkce vybírají z B různé prvky, takže definují různé podmnožiny. Naopak, každé podmnožině $A \subseteq B$ vyrobíme její charakteristickou funkci χ_A tím, že odpovíme `ano` pro každý prvek $a \in A$ a naopak `ne` pro všechny ostatní prvky.

Bychom objasnili druhé pozorování, připomeňme, že vzorem množiny $\{\texttt{ano}\}$ vzhledem k χ_A jsou právě všechny prvky $b \in B$, které se zobrazí funkcí χ_A do množiny $\{\texttt{ano}\}$ (čili na prvek `ano`); symbolicky

$$\chi_A^{-1}(\{\texttt{ano}\}) = \{b \in B \mid \chi_A(b) \in \{\texttt{ano}\}\}.$$

Množina na pravé straně je ale přesně podmnožina $A \subseteq B$.

Nebýt **úlohy 3.4** z minulého dílu, byli bychom snad bezradní. V ní jste dokázali, že vzor množiny vzhledem k dané funkci lze kategorickým jazykem vyjádřit jako limitu zvanou *pullback*. Dáváme na paměť, že *pullback* v kategorii $\mathcal{A}$ je limita diagramu

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "\alpha"] \\ b \arrow[r, "\beta"'] & c, \end{tikzcd}$$

čili objekt $p \blacktriangleleft \mathcal{A}$ s šipkami $p \xrightarrow{\pi_a} a$ a $p \xrightarrow{\pi_b} b$ takový, že

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "\pi_a"] \arrow[d, "\pi_b"'] & a \arrow[d, "\alpha"] \\ b \arrow[r, "\beta"'] & c \end{tikzcd}$$

komutuje a navíc, kdykoli máme objekt $d \blacktriangleleft \mathcal{A}$ s šipkami $d \xrightarrow{\delta_a} a$ a $d \xrightarrow{\delta_b} b$, pro nějž tentýž diagram (akorát nahradíme p, π_a, π_b za d, δ_a, δ_b) komutuje, pak existuje přesně jedna šipka $d \xrightarrow{\delta} p$ splňující $\delta_a = \delta\pi_a$ a $\delta_b = \delta\pi_b$.

Úloha 3.4 ztvrzuje, že diagram na obrázku 5 je pullback[19], kde $f\colon X \to Y$ je libovolná funkce, Y' je podmnožina Y, i a j jsou *inkluse* a f' je funkce f zúžená na podmnožinu $f^{-1}Y' \subseteq X$.

$$\begin{tikzcd} f^{-1}Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, tail, "i"'] & Y' \arrow[d, tail, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Obrázek 5: Vzor podmnožiny jako pullback.

[19]Vyjadřujeme se zkráceně. Myslíme tím, že množina $f^{-1}Y'$ spolu s funkcemi f' a i je pullback diagramu, který vznikne, když tuto množinu a funkce odebereme z představeného.

Teď nás čeká v diagramu na obrázku 5 zvolit ty správné funkce a množiny, aby $f^{-1}Y'$ pro různé volby inkluse i byly různé podmnožiny B. Pamatujme, že chceme, aby levý horní roh diagramu byla množina A. Musí tedy platit, že $A = f^{-1}Y'$. Zároveň jsme si ale výše rozmysleli, že $A = \chi_A^{-1}(\{\mathtt{ano}\})$, díky čemuž víme, co má být funkce f i množina Y'. Volby $f = \chi_A$ a $Y' = \{\mathtt{ano}\}$ už jednoznačně dokreslují zbytek diagramu na obrázku 5. Přeci, funkce χ_A vede z množiny B do množiny $\{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$, musíme pročež zvolit $X = B$ a $Y = \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$.

Výstupem předchozího odstavce je pullback na obrázku 6, kde $j(\mathtt{ano}) = \mathtt{ano}$ a χ'_A je funkce χ_A zúžená na podmnožinu A, čili vlastně konstantní funkce, která zobrazuje každý prvek $a \in A$ na `ano`. Pozorujme, že funkce χ_A v tomto diagramu dokonale závisí na inklusi i. Totiž, jeho komutativita nám říká, že $\chi'_A j = i\chi_A$. Protože levá strana je konstantní funkce, která zobrazuje celou množinu A na prvek `ano` v množině $\{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$, musí být funkce χ_A ta **jediná** funkce, která „z i dělá konstantní funkci“, tedy ta, která obor hodnot funkce i (jímž je vlastně ta množina A uvnitř množiny B) celý posílá na prvek `ano`.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\chi'_A"] \arrow[d, tail, "i"'] & \{\mathtt{ano}\} \arrow[d, tail, "j"] \\
B \arrow[r, "\chi_A"'] & \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}
\end{tikzcd}
$$

Obrázek 6: Pullback definující podmnožinu.

Poslední větou jsme řekli, že místo, abychom funkci inkluse $i\colon A \rightarrowtail B$ určili podle podmnožiny A, určíme naopak podmnožinu A podle inkluse $i\colon A \rightarrowtail B$, což je přesně ten přístup, jehož jsme potřebovali k převodu definice podmnožiny do teorie kategorií. Její kompletní znění tedy je: A je *podmnožinou* B, když pro každou prostou funkci $i\colon A \rightarrowtail B$ existuje právě jedna funkce $\chi_A\colon B \to \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$ taková, že diagram

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"'] & \{\mathtt{ano}\} \arrow[d, tail] \\
B \arrow[r, dashed, "\exists!\chi_A"'] & \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}
\end{tikzcd}
$$

je pullback.

Věnujme jeden odstavec jisté formalistické blamáži: nemusí být pravda, že přímo množina A je podmnožinou B, ale ve skutečnosti je jí množina $i(A)$ (tj. obor hodnot funkce i) uvnitř B. Množina A zde slouží pouze k tomu, aby funkce i „vybrala správný počet prvků“ z množiny B. Protože ale není prostá funkce vlastně nic jiného, než přejmenování prvků, nehodláme tuto formální paštiku dále rozmazávat. Opakujeme, tím *definujícím* předmětem je zde funkce $i\colon A \rightarrowtail B$, nikoli samotná množina A.

Než budeme pokračovat, uveďme příklad. Vezměme množinu $B = \{a, b, c\}$. Chceme pomocí funkcí definovat podmnožinu $\{a, c\} \subseteq B$. Volme tedy za i prostou funkci z libovolné dvouprvkové množiny do B, třeba $i\colon \{1, 2\} \rightarrowtail B$, takovou, že $i(1) = a$ a $i(2) = c$. Potom existuje jediná funkce $\chi\colon \{a, b, c\} \to \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$ taková, že

$$\begin{tikzcd}
\{1,2\} \arrow[r, "\chi'"] \arrow[d, tail, "i"'] & \{\mathtt{ano}\} \arrow[d, tail, "j"] \\
\{a,b,c\} \arrow[r, "\chi"'] & \{\mathtt{ano},\mathtt{ne}\},
\end{tikzcd}$$

kde $\chi'(1) = \chi'(2) = \mathtt{ano}$ a $j(\mathtt{ano}) = \mathtt{ano}$, je pullback. Proč ale existuje jediná? Inu, díky komutativitě máme

$$i\chi(1) = \chi' j(1) = j(\chi'(1)) = j(\mathtt{ano}) = \mathtt{ano},$$

takže musí platit $\mathtt{ano} = i\chi(1) = \chi(i(1)) = \chi(a)$. Podobně pro prvek $2 \in \{1, 2\}$. To nám ale pouze zaručí, že $\chi(a) = \chi(c) = \mathtt{ano}$, ale nikoli, že $\chi(b) = \mathtt{ne}$. K tomu právě musíme použít definici pullbacku. Kdyby platilo $\chi(b) = \mathtt{ano}$, pak bychom mohli vzít následující komutativní diagram

$$\begin{tikzcd}
\{1,2,3\} \arrow[r, "\tilde{\chi}"] \arrow[d, tail, "\tilde{i}"'] & \{\mathtt{ano}\} \arrow[d, tail, "j"] \\
\{a,b,c\} \arrow[r, "\chi"'] & \{\mathtt{ano},\mathtt{ne}\},
\end{tikzcd}$$

kde $\tilde{\chi}(1) = \tilde{\chi}(2) = \tilde{\chi}(3) = \mathtt{ano}$ a $\tilde{i}(1) = a, \tilde{i}(2) = c, \tilde{i}(3) = b$. Jenže, z definice pullbacku musí existovat právě jedna funkce $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ taková, že komutuje diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} \arrow[dl, tail, "\tilde{i}"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "\tilde{\chi}"] & \\
\{a,b,c\} & \{1,2\} \arrow[l, tail, "i"'] \arrow[r, "\chi'"] & \{\mathtt{ano}\}.
\end{tikzcd}$$

Levý trojúhelník nicméně šanci komutovat nemá. Ať už f zobrazuje 3 na 2 nebo na 1, v obou případech dostaneme, že $\tilde{i}(3) = b$, ale $fi(3) = i(f(3)) \neq b$, protože $f(3)$ je buď 1 nebo 2, čili $i(f(3))$ je rovno a nebo c, ale nikdy b. Z toho plyne, že taková funkce f nemůže existovat, a tedy zpětně musí platit, že $\chi(b) = \mathtt{ne}$. Tím jsme dokázali, že funkce $\chi\colon B \to \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$ je opravdu jediná taková a vzorem $\chi^{-1}(\{\mathtt{ano}\})$ je naše kýžená podmnožina $\{a, c\}$.

Dvěma posledními kroky k zobecnění pojmu *podmnožiny* či *podobjektu* je najít jakýsi způsob, kterak vyrobit množiny $\{\texttt{ano}\}$ a $\{\texttt{ano}, \texttt{ne}\}$ v kategorii, jež nemusí mít s množinami nic společného. K našemu zdaru, jednoprvková množina je dosti speciální – jedná se totiž o *terminální objekt* (objekt, do nějž vede přesně jedna šipka z každého objektu) kategorie množin. To je jednoduché si rozmyslet: nejprve, všechny jednoprvkové množiny jsou si isomorfní (existuje mezi nimi bijekce). Například, mezi množinami $\{x\}$ a $\{y\}$ vede funkce, která zobrazuje x na y. Ta je zřejmě prostá i surjektivní, tedy bijektivní. Proto od sebe jednoprvkové množiny v kategoriálním světě nemusíme vůbec rozlišovat a můžeme je všechny souhrnně značit třeba symbolem 1. Z libovolné množiny C jistě vede do 1 jen jediná funkce – ta, jež posílá každý prvek $c \in C$ na ten jediný prvek množiny 1. Jednoprvková množina je tímto vskutku terminálním objektem, protože je universální a vede do ní přesně jedna funkce z každé množiny.

Díky předchozímu odstavci můžeme místo množiny $\{\texttt{ano}\}$ vzít terminální objekt kategorie $\mathcal{A}$. Počkat, počkat… Možná namítáte: „Kategorie přeci nemusí mít terminální objekt.“ Právem tak. Obecná kategorie vskutku terminální objekt mít nemusí, ale *úplná* kategorie má terminální objekt vždy. Je tomu tak pro to, že – možná trochu překvapivě – terminální objekt je ve skutečnosti limitou jistého diagramu. Přijďte na to, kterého.

Úloha 4.3 [1b]: *Najděte diagram v kategorii $\mathcal{A}$, jehož limitou je terminální objekt.*

Dvouprvková množina $\{\texttt{ano}, \texttt{ne}\}$ už ale příliš speciální není. Všechny dvouprvkové množiny sice jsou vzájemně isomorfní, ale limitami žádného diagramu bohužel nejsou, takže nemáme dobrý způsob, jak takové objekty v úplných kategoriích najít. Vlastně tam obecně ani nemusejí být. Proto výslovně požadujme, aby v naší kategorii objekty chovající se jako dvouprvkové množiny (tedy vlastně množiny, díky kterým umíme rozlišovat mezi „ano“ a „ne“) existovaly. Takovým objektům se říká *klasifikátory podobjektů*, právě pro to, že přes ně zvládneme použitím charakteristických funkcí definovat něco jako podmnožiny v úplných kategoriích.

Idea definice *klasifikátoru podobjektů* je v závěsu provedené diskuse docela přímočará. Potřebujeme ve své (úplné) kategorii $\mathcal{A}$ s terminálním objektem $1 \blacktriangleleft \mathcal{A}$ vlastně umět vyrobit obrázek 6. Inklusi $i\colon A \rightarrowtail B$ z A do její nadmnožiny B můžeme snadno zobecnit na monomorfismus $a \overset{\alpha}{\rightarrowtail} b$ mezi objekty $a, b \blacktriangleleft \mathcal{A}$.

Roli množiny $\{\texttt{ano}\}$, na kterou charakteristická funkce χ_A zobrazuje celou množinu A, zde hraje terminální objekt kategorie $\mathcal{A}$, který označíme $1 \blacktriangleleft \mathcal{A}$. Tu **jedinou** šipku $a \to 1$ pak symbolem !. Zatím jsme vnukli život diagramu

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & 1 \\ b. & \end{tikzcd}$$

Aby však dospěl v diagram na obrázku 6, chybí mu jedna končetina – objekt v pravém dolním rohu. Označme si takový objekt $\Omega \blacktriangleleft \mathcal{A}$ a rozmysleme si, co musí – jakožto „obdoba“ dvouprvkové množiny $\{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$ – splňovat. Zaprvé, potřebujeme existenci monomorfismu $1 \overset{\eta}{\rightarrowtail} \Omega$, který je zobecněním inkluse $\{\mathtt{ano}\} \rightarrowtail \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$ v původním pullbacku na obrázku 6. Pubertální versí rostoucího diagramu je

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, tail, "\eta"] \\ b & \Omega. \end{tikzcd}$$

Té už ale mnoho nechybí. Totiž, na obrázku 6 je charakteristická funkce $\chi_A \colon B \to \{\mathtt{ano}, \mathtt{ne}\}$ jednoznačně určená množinou A. Všechny prvky A musí posílat na $\mathtt{ano}$ a všechny prvky vně A (tedy ležící v $B \setminus A$) na $\mathtt{ne}$. Na konkrétním příkladě následujícím obrázku 6 jsme zpozorovali, že tato podmínka je ekvivalentní tomu, že diagram na témže obrázku je pullback. Musíme tedy k definici objektu Ω přidat požadavek, že za situace na adolescentním diagramu výše existuje **právě jedna** šipka $b \xrightarrow{\chi_a} \Omega$ taková, že

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, tail, "\eta"] \\ b \arrow[r, dashed, "\exists! \chi_a"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

je pullback. Celou právě opodstatněnou definici klasifikátoru objektů vyřkneme jedním dechem: ať $\mathcal{A}$ je úplná kategorie s terminálním objektem $1 \blacktriangleleft \mathcal{A}$. *Klasifikátor podobjektů* kategorie $\mathcal{A}$ je objekt $\Omega \blacktriangleleft \mathcal{A}$ s monomorfismem $1 \overset{\eta}{\rightarrowtail} \Omega$ takový, že pro jakýkoli monomorfismus $a \overset{\alpha}{\rightarrowtail} b$ existuje **právě jedna** šipka $b \xrightarrow{\chi_a} \Omega$ taková, že

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, tail, "\eta"] \\ b \arrow[r, dashed, "\exists! \chi_a"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

je pullback.

Správně bychom, soudíme, měli psát χ_α místo χ_a, neboť tím „podobjektem“ objektu b je spíše monomorfismus α, více než objekt a, jak jsme tvrdili už dříve – v situaci, kdy $i \colon A \rightarrowtail B$ není nutně inkluse, ale jen prostá funkce (tedy monomorfismus), je podmnožinou B množina $i(A)$, nikoli samotná množina A. Následující úloha je rozvinutím této diskuse.

Úloha 4.4 (těžká) [4b]: *Existuje elegantnější definice klasifikátoru podobjektů, přes pomocnou kategorii monomorfismů. Z kategorie $\mathcal{A}$ můžeme vyrobit* kategorii monomorfismů *v $\mathcal{A}$, značenou* $\mathrm{Mono}(\mathcal{A})$, *jejímiž objekty jsou monomorfismy $a \overset{\alpha}{\rightarrowtail} b$ a šipkou mezi monomorfismy $a \overset{\alpha}{\rightarrowtail} b$ a $c \overset{\gamma}{\rightarrowtail} d$ je dvojice šipek $a \xrightarrow{\varepsilon_1} c$, $b \xrightarrow{\varepsilon_2} d$ taková, že diagram*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & c \arrow[d, tail, "\gamma"] \\ b \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & d \end{tikzcd}$$

*je **pullback**.*

1. *Dokažte, že* $\mathrm{Mono}(\mathcal{A})$ *je opravdu kategorie. K tomu je potřeba ověřit, že pullback monomorfismu je monomorfismus. Tím neformálně vyjadřujeme, že je-li diagram*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, tail, "\gamma"] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

   pullback a γ je monomorfismus, pak i α je monomorfismus. Opravdu?

2. *Dokažte, že šipka $1 \overset{\eta}{\rightarrowtail} \Omega$, kde 1 je terminální objekt, Ω klasifikátor podobjektů a η libovolný monomorfismus, je* terminálním objektem *kategorie* $\mathrm{Mono}(\mathcal{A})$.

Větu v části 2 lze se špetkou nepřesnosti přeformulovat na „Klasifikátor podobjektů je terminální objekt v $\mathrm{Mono}(\mathcal{A})$.“

Exponenty

Inkluse a charakteristická funkce zasáhly protivníka do pravé ruky a levého stehna. Upustiv revolver není již schopen střílet a zpocen klesá k zemi. Zvedá však hlavu a v očích mu jiskří vzdor. Není ještě poražen. Pod sombrerem skrývá kapesní pušku s *množinou funkcí*.

V teorii množin pro každé dvě množiny A, B existuje množina funkcí z A do B, většinou značená[20]

$$B^A := \{f \mid f \text{ je funkce } A \to B\}.$$

V obecné kategorii ale neexistuje nic jako „objekt šipek mezi objekty“. Tím, že při definici B^A se o prvcích B ni A vůbec nezmiňujeme, je tuto myšlenku zobecnit do teorie kategorií méně pracné.

[20] Důvod pro toto značení je fakt, že počet funkcí z A do B je roven přesně $|B|^{|A|}$, jsou-li A i B konečné.

Každá funkce $f \in B^A$ (neboli $f\colon A \to B$) zobrazuje prvky množiny A na prvky množiny B; existuje tedy funkce (zvaná *evaluační*), která vezme prvek $a \in A$ a funkci $f \in B^A$ a vrátí prvek $f(a) \in B$. Formálně, evaluační funkce $\mathrm{ev}\colon A \times B^A \to B$ je daná předpisem

$$\mathrm{ev}(a, f) = f(a).$$

Ideu definice množiny B^A rozvedeme přes jistou universální vlastnost množiny B^A a funkce ev. Uvážíme-li jakoukoli jinou množinu C a funkci $g\colon A \times C \to B$, pak se množina C už „vlastně chová" jako množina funkcí z A do B, čili jako B^A.

Nejprve dokončíme definici *exponentu* a poté tuto myšlenku ilustrujeme na příkladě. Pro dané $g\colon A \times C \to B$ existuje *jediná* funkce $\tilde{g} : C \to B^A$ (v principu funkce, která *doslova* dělá z prvků $c \in C$ funkce $f\colon A \to B$) taková, že

$$\begin{tikzcd}
A \times B^A \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & B \\
A \times C \arrow[u, dashed, "\exists! 1_A \times \tilde{g}"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

komutuje, kde funkce $1_A \times \tilde{g}$ je daná předpisem $(1_A \times \tilde{g})(a, c) = (a, \tilde{g}(c))$. Proč je $\tilde{g}$ jedinečná? To není těžké nahlédnout. Přeci, $\tilde{g}$ musí daný prvek $c \in C$ zobrazit na tu jedinou funkci $\tilde{g}(c) \in B^A$, která *každý* prvek $a \in A$ zase zobrazuje na $g(a, c)$. Opravdu, komutativita diagramu výše říká přesně, že

$$\mathrm{ev}((1_A \times \tilde{g})(a, c)) = g(a, c).$$

Označme funkci $\tilde{g}(c) \in B^A$ pro přehlednost jako $\tilde{g}_c$. Pak na levé straně máme $\mathrm{ev}(a, \tilde{g}_c) = \tilde{g}_c(a)$. Takže funkce $\tilde{g}_c$ musí pro dané $c \in C$ a každé $a \in A$ splňovat $\tilde{g}_c(a) = g(a, c)$. Tím je přirozeně funkce $\tilde{g}_c\colon A \to B$ určená dokonale, neb jsme definovali její výstup na každém prvku $a \in A$.

Existence a jednoznačnost funkce $1_A \times \tilde{g}$ nám dává návod jak onen „objekt šipek mezi objekty", tzv. *exponent*, definovat v libovolné *úplné* kategorii. Úplnost zde potřebujeme proto, abychom směli mluvit o produktech dvou objektů, neboť, jak víme z minulého dílu, produkty jsou druhem limity.

Nyní, řekneme, že objekt $a \blacktriangleleft \mathcal{A}$ je *umocnitelný* či *exponovatelný*, když pro každý objekt $b \blacktriangleleft \mathcal{A}$ existuje objekt značený b^a (zvaný *exponent*) spolu s šipkou $a \times b^a \xrightarrow{\mathrm{ev}} b$ (zvanou *evaluace*) takový, že pro každý objekt $c \blacktriangleleft \mathcal{A}$ a každou šipku $a \times c \xrightarrow{\alpha} b$ existuje *právě jedna* šipka $c \xrightarrow{\tilde{\alpha}} b^a$, že

$$\begin{tikzcd}
a \times b^a \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & b \\
a \times c \arrow[u, dashed, "\exists! 1_a \times \tilde{\alpha}"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

komutuje. A je to! Tím jsme definovali exponent b^a v kategorii $\mathcal{A}$. Když takový objekt existuje pro každé dva $a, b \blacktriangleleft \mathcal{A}$, říkáme, že $\mathcal{A}$ *má všechny exponenty*.

Na závěr příkladem vysvětlíme, v jakém smyslu se prvek $c \in C$ „chová jako funkce $A \to B$“ vzhledem k nějaké funkci $g\colon A \times C \to B$. Představme si situaci, kdy $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}, C = \mathbb{N}$ a funkce $g\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ zobrazuje dvojici (p,q) na zlomek p/q. V tomto případě není vlastně rozdíl mezi jmenovatelem $q \in \mathbb{N}$ a funkcí „vyděl číslo $p \in \mathbb{Z}$ číslem $q \in \mathbb{N}$“, tedy funkcí $f_q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, danou předpisem $f_q(p) = p/q$. Je jasné, že pro každé číslo $q \in \mathbb{N}$ máme přesně jednu takovou funkci $f_q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Takže, co v tomto příkladě dělá funkce $\tilde{g}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$? Nu, bere přeci přirozené číslo q a dává zpět funkci „dělení číslem q“, tedy funkci $f_q \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$. Evaluační funkce $\mathrm{ev}\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Q}$ pak přijme dvojici (p,f_q) a číslo p doslova vydělí číslem q. Situaci si nakresleme.

$$
\begin{tikzcd}
(p, f_q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "(p,f_q)\mapsto f_q(p)=p/q"] & \mathbb{Q} \\
(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \arrow[u, "(p,q)\mapsto(p,f_q)"] \arrow[ur, "(p,q)\mapsto p/q"'] &
\end{tikzcd}
$$

Sombrero nonšalantně skopáváme nepříteli s hlavy a s vítězoslavným úšklebkem mu hledíme do tváře propadající beznaději. Je jen na vás, zda teorii množin ušetříte; my však tímto tématkem zavíráme definici elementárního topu – úplné kategorie s klasifikátorem podobjektů a všemi exponenty. V příštím díle se již konečně dozvíte, jak se taková prapodivná věc dá použít k „výrobě“ matematické logiky.

Vzorová řešení úloh 2. dílu

Úloha 3.1

Zadání:

Dokažte, že funkce $f\colon C \to A\times B$ z diagramu na obrázku 17 je jednoznačně určená. Podrobně: je-li $\tilde{f}\colon C \to A \times B$ jiná funkce splňující $f_A = \tilde{f}p_A$ a $f_B = \tilde{f}p_B$, pak $f(c) = \tilde{f}(c)$ pro každé $c \in C$.

Řešení od Doc.[MM] Jany Uglickich:

> Pokud funkce f není jednoznačně určená, pak pro aspoň jedno $c \in C$ platí $f(c) \neq \tilde{f}(c)$. Vyberu si jedno takové c a označím ho c_1. Potom označím $f_A(c_1) = a_1$ a $f_B(c_1) = b_1$, a proto platí $p_A(f(c_1)) = a_1, p_B(f(c_1)) = b_1$ a $p_A(\tilde{f}(c_1)) = a_1, p_B(\tilde{f}(c_1)) = b_1$ (protože $f_A = fp_A$, $f_B = fp_B$ a stejně pro $\tilde{f}$). Potom zřejmě $f(c_1) = (a_1,b_1)$, aby se vyhovělo prvním dvěma rovnicím, ale také $\tilde{f}(c_1) = (a_1,b_1)$. Obdobně pokračuji pro všechna možná c, až nutně dojdu k závěru, že f a $\tilde{f}$ jsou ve skutečnosti totožné.

Úloha 3.2

Zadání:
Dokažte, že v libovolné kategorii je produkt $a \times b$ objektů a,$b \blacktriangleleft \mathcal{A}$ universální, *existuje-li. To jest, splňují-li dva objekty c,d v kategorii $\mathcal{A}$ definici produktu $a \times b$, pak jsou isomorfní.*

Pozor! *Pro dvě šipky $n \xrightarrow{\mu} m$, $n \xrightarrow{\nu} n$ z rovnosti $\mu = \nu\mu$ obecně* ***neplyne****, že $\nu = 1_n$.* Jednoznačnost *funkce γ v definici produktu je k řešení úlohy nezanedbatelná.*

Budiž vám ku pomoci obrázek 7.

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[ddl, bend right, "\gamma_a"'] \arrow[ddr, bend left, "\gamma_b"] \arrow[d, dashed, bend left, "\exists!\gamma"] & \\
 & d \arrow[dl, "\delta_a"] \arrow[dr, "\delta_b"'] \arrow[u, dashed, bend left, "\exists!\delta"] & \\
a & & b.
\end{tikzcd}
$$

Obrázek 7: Universalita produktu v kategorii. Předpokládáme, že c i d splňují definici produktu $a \times b$.

Řešení:
Podobně lze postupovat při důkazu universality jakékoli limity, nejen produktu. Totiž, jsou-li c i d produkty $a \times b$, pak z definice existuje právě jedna šipka $c \xrightarrow{\gamma} d$ taková, že $\gamma_a = \gamma\delta_a$ a $\gamma_b = \gamma\delta_b$, a též právě jedna šipka $d \xrightarrow{\delta} c$ taková, že $\delta_a = \delta\gamma_a$ a $\delta_b = \delta\gamma_b$.

Potom je ale například $\gamma_a = \gamma\delta_a = \gamma(\delta\gamma_a) = (\gamma\delta)\gamma_a$. Ovšem, smyčka $c \xrightarrow{1_c} c$ je (opět z definice produktu) jediná šipka $c \to c$ splňující $\gamma_a = 1_c\gamma_a$ a $\gamma_b = 1_c\gamma_b$. Odtud plyne, že $\gamma\delta = 1_c$. Podobně ukážeme, že $\delta\gamma = 1_d$, a tedy jsou γ a δ svědky isomorfismu mezi c a d.

Úloha 3.3

Zadání:
Popište ekvalizéry v teorii množin. Konkrétně: jsou-li X,Y množiny, s,$t \colon X \to Y$ funkce a množina E s funkcí $i \colon E \to X$ jejich ekvalizér, určete podmínky, za kterých platí $x \in E$. Neopomeňte zdůvodnit, že vámi popsaná množina je vskutku ekvalizérem.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

Řešení od Doc.$^{\text{MM}}$ Michaela Jarvise:

Lemma 1: Pro ekvalizér E s funkcí $i\colon E \to X$ platí $x \in E$ právě tehdy, když $s(i(x)) = t(i(x))$.

Začneme s implikací $x \in E \Rightarrow s(i(x)) = t(i(x))$. Ta triviálně vychází z toho, že objekt E a funkce i tvoří rozdvojku funkcí $s,t\colon X \to Y$.

Opačnou implikaci $s(i(x)) = t(i(x)) \Rightarrow x \in E$ dokážeme sporem. Mějme ekvalizér E s funkcí $i\colon E \to X$ a prvek $z \in X$, který splňuje $s(z) = t(z)$, ale není prvkem $i(E)$. Pak můžeme najít rozdvojku $A = i(E) \cup \{z\}$ s funkcí $h\colon A \to X, h(x) = x$. Pro tuto rozdvojku ale neexistuje žádná funkce $\varepsilon\colon A \to E$, která by splnila $\varepsilon i = h$, protože $z \notin i(\varepsilon(A))$ (protože $z \notin i(E)$), ale $z \in h(A) = A$. To je spor s definicí ekvalizéru.

Máme tedy dokázáno, že $x \in E \Leftrightarrow s(i(x)) = t(i(x))$.

Lemma 2: Funkce i je prostá (pro různá x vycházejí různá $i(x)$).

Použijeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $i(a) = i(b)$ pro $a,b \in E, a \neq b$ (tj. funkce i není prostá). Pak můžeme vybrat rozdvojku $A = \{i(a)\}$ s funkcí $h\colon A \to X$, $h(x) = x$. Pak existují dvě různé **konstantní** funkce $\varepsilon_1,\varepsilon_2\colon A \to E$ s $\varepsilon_1(x) = a$ a $\varepsilon_2(x) = b$ splňující $\varepsilon_1 i = h = \varepsilon_2 i$, což je spor s definicí ekvalizéru. Tedy, i je nutně prostá.

Nakonec je potřeba dokázat, že pokud množina E s funkcí $i\colon E \to X$ splňuje $x \in E \Leftrightarrow s(i(x)) = t(i(x))$ a funkce i je prostá, pak je E ekvalizérem, tedy platí, že pro každou rozdvojku bude existovat právě jedna funkce $\varepsilon\colon A \to E$, která splňuje $\varepsilon i = h$.

Definujme si funkci $i^{-1}\colon X \to E$, pro kterou platí $i^{-1}(i(x)) = x$. Protože i je prostá, je funkce i^{-1} jednoznačně určená. Pak $\varepsilon(x) = i^{-1}(h(x))$ je též jednoznačně určená (také je pro všechna $x \in A$ definovaná, protože i^{-1} je definovaná pro všechna $x \in i(E) \supseteq h(A)$).

Úloha 3.4

Zadání:

Ať X,Y jsou množiny, $f : X \to Y$ funkce a Y' podmnožina Y. Uvažujme diagram

$$\begin{tikzcd} f^{-1}Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & Y' \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

kde $i : f^{-1}Y' \to X$, $j : Y' \to Y$ jsou inkluse *definované předpisy $i(x) = x$, $j(y) = y$ a $f' : f^{-1}Y' \to Y'$ je zkrátka funkce f zúžená na $f^{-1}Y' \subseteq X$, to jest, $f'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in f^{-1}Y'$. Dokažte, že množina $f^{-1}Y'$ spolu s funkcemi f' a i je pullback diagramu*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Řešení:
Potřebujeme dokázat, že zadaný diagram komutuje a že pro každou jinou množinu A a funkce $h_1 : A \to Y', h_2 : A \to X$ takové, že zase diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & Y' \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

komutuje, existuje přesně jedna funkce $h : A \to f^{-1}Y'$, která zařizuje, že komutuje

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "h_2"'] \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \arrow[dr, "h_1"] & \\ X & f^{-1}Y' \arrow[l, "i"] \arrow[r, "f'"'] & Y'. \end{tikzcd}$$

První úkol je snadný. Pro $x \in f^{-1}Y'$ platí, že $f'(x) = f(x)$ z definice funkce f'. Nezapomínejme též, že i a j jsou *inkluse*, tedy vlastně identické funkce na svých vstupních množinách. Potom ale

$$f'j(x) = j(f'(x)) = f'(x) = f(x) = f(i(x)) = if(x),$$

takže vskutku $f'j = if$, což přesně znamená, že první z diagramů komutuje.

Abychom dokázali universalitu, zvolme nějakou množinu A s funkcemi $h_1 \colon A \to Y'$ a $h_2 \colon A \to X$ takovými, že $h_1 j = h_2 f$. Všimněme si, že pro každé $a \in A$ je

$$h_1 j(a) = j(h_1(a)) = h_1(a),$$

čili $f(h_2(a)) = h_1(a)$. Funkce $h \colon A \to f^{-1}Y'$ musí splňovat $hi = h_2$ a $hf' = h_1$. Ovšem, první z těchto rovností se dá přepsat pro $a \in A$ jako

$$h_2(a) = hi(a) = i(h(a)) = h(a),$$

neboť i je inkluse. Zdá se, že h musíme definovat předpisem $h(a) = h_2(a)$ pro každé $a \in A$. Jak máme ale zaručeno, že $h_2(a) \in f^{-1}Y'$? To plyne z rovnosti $f(h_2(a)) = h_1(a) \in Y'$, neboť ta znamená, že funkce f posílá každý prvek $h_2(a)$ do množiny Y', a tedy je každý prvek $h_2(a)$ vzorem nějakého prvku z množiny Y'. Poslední věta se zapíše symbolicky jako $h_2(a) \in f^{-1}Y'$, jak jsme chtěli.

Již víme, že $hi = h_2$. Zbývá ověřit, že $hf' = h_1$. Za tímto účelem pro $a \in A$ počítáme

$$hf'(a) = f'(h(a)) = f(h(a)) = f(h_2(a)) = h_1(a),$$

kde druhá rovnost plyne z toho, že $f'(x) = f(x)$ pro každé $x \in f^{-1}Y'$ a ta třetí z definice h. Tím jsme dokázali universalitu a jsme hotovi.

Úloha 3.5

Zadání:
Dokažte, že pokud je v diagramu na obrázku 20 objekt c terminální, *pak je pullback tohoto diagramu isomorfní produktu $a \times b$.*

Připomínáme, že objekt je v kategorii terminální, *když do něj vede přesně jedna šipka z každého objektu této kategorie.*

Řešení:
Ať je $a \times b$ s šipkami $a \times b \xrightarrow{\pi_a} a$ a $a \times b \xrightarrow{\pi_b} b$ produktem a a b. Stačí ukázat, že diagram

$$\begin{tikzcd} a \times b \arrow[r, "\pi_a"] \arrow[d, "\pi_b"'] & a \arrow[d, "\alpha"] \\ b \arrow[r, "\beta"'] & c \end{tikzcd}$$

komutuje. Z universality $a \times b$ jakožto produktu pak rovnou vyplyne, že je i pullbackem.

Z toho, že c je terminální víme, že existuje **přesně jedna** šipka $a \times b \xrightarrow{\pi} c$. Ovšem, $\pi_a\alpha$ i $\pi_b\beta$ jsou rovněž šipky $a \times b \to c$, takže musí platit $\pi_a\alpha = \pi_b\beta = \pi$ a daný diagram opravdu komutuje.

Mějme nyní objekt $x \blacktriangleleft \mathcal{A}$ s šipkami $x \xrightarrow{\chi_a} a$ a $x \xrightarrow{\chi_b} b$. Zcela stejným argumentem jako v předchozím odstavci dostaneme, že diagram

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\chi_a"] \arrow[d, "\chi_b"'] & a \arrow[d, "\alpha"] \\ b \arrow[r, "\beta"'] & c \end{tikzcd}$$

rovněž komutuje. Z definice produktu $a \times b$ existuje přesně jedna šipka $x \xrightarrow{\chi} a \times b$ taková, že navíc

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "\chi_b"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\chi"] \arrow[dr, "\chi_a"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "\pi_a"] \arrow[r, "\pi_b"'] & b \end{tikzcd}$$

komutuje. To ale přesně znamená, že $a \times b$ je pullback diagramu

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "\alpha"] \\ b \arrow[r, "\beta"'] & c. \end{tikzcd}$$

Adam; `kategoricketematko@gmail.com`
odevzdávejte do odevzdávátka

Téma 6 – Speciální teorie relativity

Díl 4: Vlastní čas a čtyřvektory

V minulém díle jsme dobrali důsledky Lorentzových transformací. V tomto díle se budeme zabývat geometrií prostoročasu a vektory v něm. Poté se podíváme na prostoročasové analogie klasických dynamických veličin jako například hybnost nebo zrychlení.

Měření vzdáleností v prostoročase

Ve 3. úloze 2. dílu jsme se dověděli, jak počítat skalární součin mezi vektory v prostoročase. Pro připomenutí, platí:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \eta \mathbf{v},$$

kde η je matice zvaná Minkowského metrika a má podobu:

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

V tomto díle budeme většinou uvažovat jen jednu prostorovou složku, tedy η bude mít tvar:

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uvažujme vektor spojující dva body v prostoročase, takzvané události, a označme ho $\mathbf{S}$. Jeho složky označíme t a x:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}.$$

Pro jeho velikost bude platit:

$$||\mathbf{S}||^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = t^2 - x^2.$$

$||\mathbf{S}||^2$ většinou značíme s^2 nebo τ^2. Všimněme si, že s^2 nemusí nabývat jen kladných hodnot, jak bychom od velikosti na druhou čekali, ale může být i záporné.

Vektory s $s^2 > 0$ nazýváme **časupodobné**. To proto, že mají větší časovou složku než složku prostorovou. Také pro časupodobné vektory většinou používáme značení τ^2. τ v tomto kontextu nazýváme vlastní čas a odpovídá času, který uplyne mezi událostmi, pokud jsme v inerciální referenční soustavě, ve které se tyto události staly na stejném místě. Také si můžeme všimnout, že τ je nejkratší možný čas, který mezi dvěma událostmi může uplynout. To je důsledkem toho, že ostatní časy budou zdilatované, jak jsme si ukázali v předchozích dílech.

Vektory, pro které platí, že $s^2 = 0$, nazýváme **světlupodobné**. To proto, že $t = \pm x$, což popisuje dráhy paprsků světla.

A na konec vektory s $s^2 < 0$ nazýváme **prostorupodobné**, protože mají větší prostorovou složku. Ty odpovídají vlastní délce, tedy délce nějakého objektu, kterou měříme v referenční soustavě toho objektu. Tuto délku lze spočíst jako $l = \sqrt{-s^2}$. Můžeme si všimnout, že tato délka je největší možná, protože v jiné referenční soustavě by délky podléhaly kontrakci délek.

Lorentzovy transformace podruhé

V této sekci si ukážeme přívětivější způsob, jak se koukat na Lorentzovy transformace. Protože matici η jsme našli speciálně takovou, aby se skalární součin neměnil s Lorentzovou transformací, určitě se nebude měnit ani hodnota s^2. Je tedy docela přirozené zadefinovat Lorentzovy transformace jako transformace, při kterých se nemění hodnota s^2.

Lze si všimnout, že čistě prostorové rotace hodnotu s^2 také nezmění, a tedy je také budeme nazývat Lorentzovými transformacemi.

Nyní se budeme zabývat typem transformace, který bude měnit i složku časovou. Nejdříve ovšem uděláme klíčové pozorování o kuželosečkách. Je dobře známo, že rovnice:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

popisuje kružnici o poloměru r. Transformace, které nemění hodnotu r, jsou zcela evidentně rotace. Abychom si takové rotace popsali, hodí se nám umět naši kružnici popsat parametricky. To se klasicky dělá takto:

$$x(t) = r\cos(t),$$

$$y(t) = r\sin(t).$$

Abychom nyní orotovali nějaký bod na kružnici, stačí nám k t přičíst úhel, o který chceme rotovat.

Také víme, že rovnice:

$$x^2 - y^2 = r^2,$$

popisuje hyperbolu. Z předchozího příkladu víme, že bychom tuto hyperbolu chtěli popsat parametricky, abychom vymysleli transformaci, která nemění r. To uděláme úplně analogicky jako u kružnice, jen místo funkcí sinus a kosinus použijeme jejich hyperbolické ekvivalenty:

$$x(t) = r\cosh(t),$$

$$y(t) = r\sinh(t).$$

Lze ukázat, že:

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Také si všimněme, že musí platit obdoba pythagorijské identity:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1.$$

Ještě se nám budou hodit součtové vzorce pro naše hyperbolické funkce. Začneme s rovnicemi, které není nijak těžké ověřit:

$$\cosh(t) + \sinh(t) = e^t,$$
$$\cosh(t) - \sinh(t) = e^{-t}.$$

Potom:

$$\cosh(t+a) + \sinh(t+a) = e^{t+a} = e^t e^a = (\cosh(t) + \sinh(t)) \cdot (\cosh(a) + \sinh(a)),$$

$$\cosh(t+a) - \sinh(t+a) = e^{-(t+a)} = e^{-t} e^{-a} = (\cosh(t) - \sinh(t)) \cdot (\cosh(a) - \sinh(a)).$$

Sečtením a po úpravě:

$$\cosh(t+a) = \cosh(t)\cosh(a) + \sinh(t)\sinh(a),$$

$$\sinh(t+a) = \sinh(t)\cosh(a) + \cosh(t)\sinh(a).$$

Nyní si ještě odvodíme matici analogickou s maticí rotace, jen bude rotovat hyperbolicky. Mějme vektor na jednotkové hyperbole parametrizovanou parametrem t:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{bmatrix}.$$

Hledáme zobrazení, které nám vektor posune o hyperbolický úhel a:

$$f(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \cosh(t+a) \\ \sinh(t+a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(t)\cosh(a) + \sinh(t)\sinh(a) \\ \sinh(t)\cosh(a) + \cosh(t)\sinh(a) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že takové zobrazení lze reprezentovat maticí:

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix}.$$

Čímž jsme skončili naše pozorování o kuželosečkách.

Už víme, že Lorentzova transformace (v jedné časové a jedné prostorové dimenzi) jde reprezentovat maticí:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{bmatrix}.$$

Také víme, že pro vektor $\mathbf{S} = (t, x)$ Lorentzova transformace nezmění hodnotu $s^2 = t^2 - x^2$. Z našeho pozorování o kuželosečkách ale víme, že hyperbolická rotace také nechá s nezměněné. Můžeme se tedy ptát, jaká hyperbolická rotace odpovídá této Lorentzově transformaci:

$$\begin{bmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{bmatrix}.$$

Tedy:

$$\cosh(a) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$a = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right).$$

Jen ověříme, že $\sinh(a) = \gamma v$:

$$\sinh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right) = \sqrt{\cosh^2\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right) - 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-v^2} - 1} = \sqrt{\frac{1-1+v^2}{1-v^2}} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma v.$$

V této sekci jsme si tedy dokázali, že Lorentzovy transformace jsou jen hyperbolické rotace v prostoročase. Používat hyperbolické rotace je často užitečnější, protože je jednodušší je rozpoznat. Také se s nimi jednodušeji buduje vyšší fyzika. Především v částicové fyzice je důležité chápat podstatu těchto transformací, což je ovšem mimo záběr tohoto tématka.

Dynamické veličiny v prostoročase

Prostoročasovou polohu jsme si už zavedli, ale pro úplnost ji zde začneme. Prostoročasovou polohu budeme značit $\mathbf{S}$ a je to vektor, který ukazuje polohu v čase a prostoru. Pokud nás zajímá, jak vypadá v jiné referenční soustavě, použijeme na něj Lorentzovu transformaci. Jeho složky budeme označovat prostě t, x:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}.$$

Rychlost zavedeme obdobně jako v klasické mechanice, kde je rovna časové derivaci polohového vektoru. V našem případě se ovšem čas mění s referenční soustavou a my bychom chtěli, aby se na prostoročasové rychlosti shodli všichni pozorovatelé. Už víme, že ti se shodnou na vlastním čase. Zadefinujeme tedy proto rychlost jako derivaci polohy podle vlastního času:

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{S}}{d\tau}.$$

V dalším kroce si rozepíšeme vektor $\mathbf{S}$ jako lineární kombinaci bázových vektorů. O těch jsme se zde ještě tolik nebavili a budeme je značit $\mathbf{e}_t$ pro časový a $\mathbf{e}_x$ pro prostorový.

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(t\mathbf{e}_t) + \frac{d}{d\tau}(x\mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_t\frac{dt}{d\tau} + t\frac{d}{d\tau}\mathbf{e}_t + \mathbf{e}_x\frac{dx}{d\tau} + x\frac{d}{d\tau}\mathbf{e}_x.$$

Bázové vektory se nemění s vlastním časem v inerciální soustavě a tedy derivace podle něj bude 0. Dále by nás zajímala hodnota $\frac{dt}{d\tau}$. Čas t z Lorentzových transformací závisí na τ vztahem:

$$t = \gamma\tau,$$

kde pozice je rovna nule, protože vlastní čas se měří v soustavě, kde se poloha nemění, jak jsme si řekli na začátku dílu. Tedy:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma.$$

Ještě budeme potřebovat znát $\frac{dx}{d\tau}$. Na to jen použijeme klasické řetízkové pravidlo:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma u_x,$$

kde u_x značí klasickou rychlost ve směru x. Dostaneme tedy:

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \gamma\mathbf{e}_t + \gamma u_x\mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{U} = \gamma\begin{bmatrix}1\\u_x\end{bmatrix}.$$

Všimněme si, že i když se nepohybujeme v prostoru, tak $\gamma = 1$ a $u_x = 0$, tedy:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

Tedy v naší soustavě se vždy pohybujeme rychlostí světla v čase dopředu. Protože velikost prostoročasové rychlosti je ve všech inerciálních soustavách stejná, vždy se pohybujeme rychlostí světla i pro jiné pozorovatele, jen nikdy ne vůči nim, ale vůči počátku souřadnicového systému.

Když jsme si zavedli rychlost, je docela přirozené si jako další zavést hybnost. Tu opět zavedeme analogicky ke klasickému zavedení a prostě vynásobíme rychlost hmotností:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{U},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\gamma m\\\gamma m u_x\end{bmatrix}.$$

Než si něco řekneme k významu čtyřhybnosti (prostoročasové vektory nazýváme často čtyřvektory), řekneme si něco k relativistické hmotnosti. K tomu ještě zavedeme klidovou hmotnost. To je hmotnost tělesa, kterou naměříme v jeho referenční soustavě. Dříve se potom zaváděla relativistická hmotnost jako $m_r = \gamma m_k$. Dělalo se to, aby ve složkách hybnosti šlo vynechat faktor γ, ovšem nebylo to tak šikovné, jak se zdálo, a v dnešní době se tato konvence nepoužívá. Když tedy budeme mluvit o hmotnosti, myslíme vždy hmotnost klidovou (a všechny rozumné zdroje budou myslet taky).

Zpět k čtyřhybnosti. Všimněme si, že časová složka odpovídá energii, ze vztahu, který jsme odvodili minule, a prostorová odpovídá klasické hybnosti. I ve speciální teorii relativity platí zákon zachování hybnosti. To je dobré ilustrovat na příkladu. Mějme dvě částice s hmotností m letící proti sobě s rychlostmi u_x a $-u_x$. Celková hybnost bude

$$\mathbf{P} = \gamma \begin{bmatrix} m \\ u_x \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} m \\ -u_x \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 2m \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Budeme předpokládat dokonale nepružnou srážku, tedy částice po srážce se od sebe neodrazí. Klasicky bychom čekali, že nyní bude jejich společná hmotnost rovna $2m$, ovšem ze zákona zachování čtyřhybnosti plyne, že bude rovna $\gamma 2m$. Tedy jejich (klidová) hmotnost se po srážce zvýší!

Nyní se podíváme na čtyřzrychlení. Zadefinujeme ho ve stejném duchu jako jsme dosud zadefinovali vše, tedy jako druhou derivaci čtyřpolohy podle vlastního času

$$\mathbf{A} = \frac{d^2\mathbf{S}}{d\tau^2} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\gamma(\mathbf{e}_t + u_x\mathbf{e}_x) = \frac{d}{d\tau}(\gamma)(\mathbf{e}_t + u_x\mathbf{e}_x) + \gamma\frac{d}{d\tau}(\mathbf{e}_t + u_x\mathbf{e}_x).$$

Prvně se zaměříme na druhý člen:

$$\gamma\frac{d}{d\tau}(\mathbf{e}_t + u_x\mathbf{e}_x) = \gamma\frac{d}{d\tau}(u_x)\mathbf{e}_x = \gamma\frac{du_x}{dt}\frac{dt}{d\tau}\mathbf{e}_x = \gamma^2 a_x\mathbf{e}_x,$$

kde a_x je zrychlení ve směru x.
Nyní se podíváme na $\frac{d\gamma}{d\tau}$:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{d\gamma}{dt}.$$

Použijeme definici γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u_x^2}},$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u_x^2}}\right) = \gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-u_x^2}^3}(-2u_x)\cdot a_x = -\gamma^4 u_x \cdot a_x,$$

kde $\cdot$ značí skalární součin. Při našem odvozování musíme totiž počítat s tím, že u_x a a_x jsou vektory a obecně budou mít 3 složky a ne jen jednu. Kvůli skalárnímu součinu se na pravé straně objevilo mínus navíc, to je artefakt Minkowského metriky. Také skalární součin úplně vpravo chápeme klasicky jen jako mezi prostorovými vektory.

Zrychlení má tedy tvar:

$$\mathbf{A} = -\gamma^4 u_x \cdot a_x(\mathbf{e}_t + u_x \mathbf{e}_x) + \gamma^2 a_x \mathbf{e}_x = (-\gamma^3 u_x \cdot a_x)\mathbf{U} + \gamma^2 a_x \mathbf{e}_x =$$

$$= \gamma^2 \begin{bmatrix} -\gamma^2(u_x \cdot a_x) \\ -\gamma^2(u_x \cdot a_x)u_x + a_x \end{bmatrix}.$$

Všimněme si, že prostorové složky čtyřzrychlení obecně nejsou rovnoběžné s klasickým prostorovým zrychlením.

Když jsme si zadefinovali zrychlení (to je v klasické mechanice definováno jako změna hybnosti za čas, nebo také součin hmotnosti a zrychlení), můžeme si zadefinovat i sílu. Opět budeme postupovat klasicky:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = m\mathbf{A}.$$

Zde uvažujeme, že se nemění hmotnost s vlastním časem, jinak druhá rovnost neplatí.

A tím jsme dokončili dynamické veličiny ve speciální teorii relativity.

Úlohy

Úloha 4.1 [2b]: *Ukažte, že pro každý časupodobný vektor existuje referenční soustava, ve které má nulovou prostorovou složku. A pro každý prostorupodobný vektor zase soustava, ve které má nulovou časovou složku.*

Úloha 4.2 [4b]: *Na základě nově nabytých znalostí o Lorentzových transformacích odvoďte vzorec pro relativistické skládání rychlostí v jedné prostorové dimenzi (a jedné časové).*

Problém 4.3: *Pokud měníme referenční soustavu, čtyřpozice se transformuje pomocí Lorentzových transformací. Jak se budou transformovat ostatní výše zavedené veličiny?*

Problém 4.4: *Zamyslete se, co by znamenalo, že něco cestuje rychleji než světlo. Co by různí pozorovatelé naměřili? Mohl by takový objekt například cestovat zpět v čase?*

Problém 4.5: *V knize Stručná historie času od S. Hawkinga měli čtenáři problém pochopit koncept imaginárního času. Imaginární čas je čas vynásobený imaginární jednotkou. Na základě nově nabytých znalostí o Minkowského metrice zkuste zdůvodnit, proč je tato substituce vlastně velmi přirozená.*

Můžete i zkusit dohledat, k čemu je dobrá.

Řešení 2. dílu

Úloha 2.2

Zadání:

Analogickým postupem, jako jsme odvodili dilataci času, odvoďte takzvanou kontrakci délek, neboli jak se bude měnit metr pozorovatele v pohybu vůči pozorovateli v klidu.

Řešení od Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Martina Těšitele:

Z Lorentzových transformací víme:

$$x_A = \frac{x_B - vt_B}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Uvažujeme změnu délky okamžiku, tak proč by tento okamžik nemohl být v čase 0, aby vypadl člen vt_B. Výsledná rovnice vypadá takto:

$$x_A = \frac{x_B}{\sqrt{1-v^2}} \implies x_B = x_A\sqrt{1-v^2}.$$

Délka se dá vyjádřit jako rozdíl prostorových souřadnic x_{A1} a x_{A2}, kde platí $x_{A1} > x_{A2}$

$$\Delta x_B = x_{A1}\sqrt{1-v^2} - x_{A2}\sqrt{1-v^2} = \Delta x_A\sqrt{1-v^2}.$$

Úloha 2.3

Zadání:

*Skalární součin je velmi praktická matematická operace a my bychom ho chtěli používat i pro čtyřvektory (tj. vektory v prostoročase). Úplně obecně se skalární součin mezi vektory **u** a **v** spočte jako (v maticové notaci):*

$$\boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{v} = k\,,$$

kde matice A je symetrická matice a k je konstanta.

Při změně vztažné soustavy by se neměly měnit hodnoty skalárů (pouhých čísel, dobrým příkladem je třeba teplota tělesa). Když měníme vztažnou soustavu v prostoročase, používáme výše uvedené Lorentzovy transformace. Odvoďte, jak musí vypadat matice A ve dvou dimenzích, jedné časové a jedné prostorové, pokud chceme, aby vektor ukazující jednu jednotku v čase dopředu a nula v prostoru měl velikost 1. (Skalární součin vektoru se sebou samým berte jako čtverec velikosti tohoto vektoru.)

Řešení od Doc.$^{\mathsf{MM}}$ Michaela Jarvise:

Prvně si rychle dokážeme jedno lemma o násobení matic, které použijeme později, a to $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Pojmenujme si levou stranu $C = (\mathbf{AB})^T$ a pravou $D = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Pak z definice platí $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$ a $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}$. Vyšlo nám tedy $c_{ij} = d_{ij}$, čímž jsme lemma dokázali.

Nyní k samotné úloze. Chceme, aby skalární součin $\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = k$ vycházel stejně, i pokud oba vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ transformujeme Lorenzovou transformací. Tedy:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = k = (\Lambda\mathbf{u})^T\mathbf{A}(\Lambda\mathbf{v}).$$

Nyní použijeme naše lemma:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{u}^T\Lambda^T\mathbf{A}\Lambda\mathbf{v},\\ \mathbf{A} &= \Lambda^T\mathbf{A}\Lambda.\end{aligned}$$

Nyní dosadíme za $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{bmatrix}1 & -v\\ -v & 1\end{bmatrix}$ a za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ [21]

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{bmatrix}1 & -v\\ -v & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{bmatrix}1 & -v\\ -v & 1\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix} &= \frac{1}{1-v^2}\begin{bmatrix}a-2vb+v^2c & b-va-vc+v^2b\\ b-va-vc+v^2b & c-2vb+v^2a\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Z toho nám vyjdou rovnice $a = \frac{1}{1-v^2}(a-2vb+v^2c)$ a $b = \frac{1}{1-v^2}(b-va-vc+v^2b)$.

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{1-v^2}(b-va-vc+v^2b),\\ b-v^2b &= b-va-vc+v^2b,\\ 2v^2b &= va+vc,\\ 2vb &= a+c.\end{aligned}$$

(Předpokládáme $v \neq 0$.) To dosadíme do první rovnice:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{1-v^2}(a-2vb+v^2c),\\ a &= \frac{1}{1-v^2}(a-a-c+v^2c),\\ a &= \frac{1}{1-v^2}(-c(1-v^2)),\\ a &= -c.\end{aligned}$$

To dosadíme zpět do druhé rovnice, aby nám vyšlo $2vb = a + c = 0 \Longrightarrow b = 0$. Výsledná matice zatím vypadá takto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}.$$

Chceme, aby vektor, který míří 0 v prostoru a 1 dopředu v čase, měl velikost 1, tudíž jeho vektorový součin sám se sebou musí být také 1:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1, \\ -a &= 1, \\ a &= -1. \end{aligned}$$

Tvar matice **A** je tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Radim N; radim05@post.cz
Honza T.; jan.tregler@seznam.cz
odevzdávejte do odevzdávátka

[21] *Pozn. red.:* Zde autor využívá toho, že matice A je symetrická.

Výsledky 2. deadlinu 2. čísla a 1. deadlinu 3. čísla

				Témata							
Poř.	**Jméno**	**R.**	$\sum_{-1}$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**O**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ J. Uglickich	3	463,6	18,3	11,3	10,0	5,5	0,0		45,1	135,3
2.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ M. Jarvis	3	309,3	17,8	12,2		8,5	6,0		44,5	121,1
3.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ M. Těšitel	4	331,7	16,4	5,0	8,5	2,5	4,4		36,8	101,9
4.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ P. Starý	3	80,7	17,2		1,5		11,8		30,5	80,7
5.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ J. Klementová	3	285,8	12,5		12,2	5,5	5,5		35,7	76,0
6.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ O. Sedláček	4	299,3	19,0						19,0	66,8
7.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ L. Zůnová	4	248,2	3,5	6,5	10,0				20,0	65,0
8.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ M. Ambros	2	170,5	13,8						13,8	59,8
9.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ A. Trnková	4	85,0	2,0	6,0		5,8			13,8	57,1
10.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ F. Nouza	3	57,9		8,1	8,0				16,1	53,9
11.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ L. Votrubová	4	146,9	17,0	5,0	8,8				30,8	51,3
12.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ D. Kaňka	3	188,7	10,0				4,9		14,9	44,1
13.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ M. Pustková	4	43,8								43,8
14.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ K. Kučerová	Z9	115,9	11,2		3,0				14,2	43,3
15.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ A. Gauchet	3	41,6			7,5			3,0	10,5	41,6
16.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ B. Salajová	3	39,9	11,1		2,5	4,8	1,1		19,5	39,9
17.	Dr.$^{\mathsf{MM}}$ M. Urbanová	2	148,5			2,0				2,0	39,8
18.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ P. Šimová	4	221,3	4,0		1,4		1,0		6,4	38,9
19.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ S. Ožanová	3	37,6	6,0		3,0				9,0	37,6
20.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ J. Jedlička	3	96,7	2,1						2,1	35,5
21.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ R. Petit	4	71,7	16,6						16,6	34,7
22.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ N. Jochová	2	33,1	3,5		14,2				17,7	33,1
23.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ V. Šitra	3	32,0	5,7	8,8					14,5	32,0
24.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ S. Šimečková	3	31,8	5,9	3,0	1,0				9,9	31,8
25.	Doc.$^{\mathsf{MM}}$ O. Nevěřil	3	239,1	3,5	3,0			0,5		7,0	29,7
26.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ P. Barták	1	45,4	6,0		5,0	2,0	2,5		15,5	25,0
27.	Bc.$^{\mathsf{MM}}$ K. Bouchalová	Z9	20,4					3,5		3,5	20,4
28.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ K. Maxera	4	50,8			1,5				1,5	19,3
29.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ V. Kučera	3	68,8			5,3				5,3	18,2
30.	P. Bělušová	3	17,5								17,5
31.	B. Samková	1	15,4			2,2				2,2	15,4
32.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ A. Bakoč	4	97,3	6,0						6,0	14,9
33.	M. Jurečková	3	13,7	7,9						7,9	13,7
34.	F. Dvořák	2	13,3								13,3
35.	Mgr.$^{\mathsf{MM}}$ M. Rybecký	3	73,2								10,8
36.	R. Zelený	4	14,2								10,4

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Témata 2	3	4	5	6	O	$\sum_0$	$\sum_1$
37.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Kadlec	4	57,6								10,3
38.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ J. Löwenhöffer	4	97,6				4,5			4,5	7,7
39.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ M. Stýskala	4	69,6								7,1
40.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ V. Vybíral	3	58,6								6,7
41.	J. Fišerová	2	6,5	6,5						6,5	6,5
42.	Š. Swaczyna	Z9	6,0	6,0						6,0	6,0
43.	M. Kramešová	4	5,4								5,4
44.	R. Michálková	3	5,1								5,1
45.–47.	S. Zubák	1	5,0								5,0
	L. Koma	1	5,0	3,0						3,0	5,0
	T. Matějková	4	5,0								5,0
48.	J. Kaplický	3	4,7								4,7
49.	M. Štěpán	4	3,0								3,0
50.–51.	M. Těšitel	Z1	2,5								2,5
	M. Ambrosová	Z9	10,3			2,5				2,5	2,5
52.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ K. Česká	4	28,7								1,5

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v těchto deadlinech a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku. Sloupec **O** symbolizuje **Ostatní**, obvykle příspěvky za články. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: `mam@matfyz.cz`
Web: `mam.matfyz.cz`
FB: `casopis.MaM`

matfyz
M&M