

M&M číslo 5 ročník III

Milí řešitelé,

dostáváte do ruky historicky již poslední letošní číslo našeho časopisu. Nenačítejte v něm proto zadání žádných nových fyzikálních, ani matematických problémů. Přesto doporučujeme toto číslo vaší bdělé pozornosti, neboť není důvodu, proč v bádání nad některými problémy nepokračovat v ročníku příštím. Ostatně, první číslo čtvrtého ročníku M&M již bylo vytištěno a naše redakce se už teď těší na články nejen od vás, letošních řešitelů, ale i od řešitelů nových, doposud námi nezkažených.

Do září je však ještě daleko, přejeme vám tedy co nejhezčí prožití letních prázdnin a alespoň nějaký odpočinek od matematiky a fyziky.

A abychom nezapomněli, na poslední straně najdete celkovou letošní tabulku vítězů.

Ája, Robert a Matouš

Téma 1 – Trosečníci

Dr. Jan Fátor: Tíhové zrychlení v Hradci Králové

Autor se pokusil měřit tíhové zrychlení v Hradci Králové. Z jeho článku předkládáme stručný výňatek.

K měření tíhového zrychlení jsem použil kyvadlo tvořené závažím zavěšeným na provázku. Kyvadlo jsem považoval za matematické. Měřil jsem periodu kyvadla tak, že jsem stopnul dobu 100 kyvů. Délka závěsu byla něco přes 2 metry (měřil jsem ji s přesností 1 mm).

Ze známého vztahu $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ jsem obdržel průměrnou hodnotu $g = 9,769 \text{ ms}^{-2}$. Nezbývá než konstatovat, že měření mělo nedostatečnou přesnost (takové tíhové zrychlení totiž není ani na horách na rovníku). Systematickou chybu spatřuji v odporu vzduchu, utahování uzlů během kývání a ve faktu, že kyvadlo nebylo dostatečně matematické.

Dr. Jan Mysliveček: Placky starého trosečníka

Zaujala mne úloha vysvětlit 100 let starému trosečníkovi, že Země není placka a nenesou ji sloni. Nejjednodušší způsob je pomocí Coriolisovy síly. Vektor této síly je kolmý na vektor rychlosti pohybujícího se tělesa. Pokud by Země byla cokoli jiného než koule, musela by se tato síla projevit jinak než jak tomu je nyní, například by tlačila vše “nabok” (kdyby byla Země placka rotující kolem osy procházející jejím středem). Aby zrychlení způsobené Coriolisovou silou bylo kolmé ke gravitačnímu zrychlení, musí být Země koule. Fakt, že musí rotovat, plyne z existence Coriolisovy síly (lze demonstrovat Foucaultovým kyvadlem apod. – viz předchozí čísla M&M).

Doc. Pavol Habuda: “Stroskotanci”

(A) Důkazy kulatosti Země

- 1) Předpokládáme, že hvězdy jsou od Země hodně vzdálené (nemají měřitelnou paralaxu). Kdyby Země byla deska, z každého místa Země bychom viděli hvězdy na stejném místě (jejich výška nad obzorem by byla stejná). Ale dobře víme, že čím víc jdeme na jih, tím víc vidíme Polárku blíž k obzoru. To vyvrací předpoklad, že Země je deska.
- 2) Deprese horizontu: Vzdaluje-li se loď z přístavu, postupně klesá pod obzor. To dokazuje, že zemský povrch je zakřivený.
- 3) Je-li povrch Země kulový, pak existuje při vytyčení tří bodů na zemském povrchu sférický exces. (Tuto metodu zkusil r. 1800 Gauss, ale výsledek byl zatížen chybami.)

- 4) Aristotelův názor: Kdyby byla Země deska, pak by mohlo mít zatmění Měsíce na povrchu kruhový stín pouze v nadhlavníku. Jenže kruhový stín na Měsíci vidíme, i když je Měsíc blízko obzoru. Kdyby jej vrhala zemská deska, musela by být nakloněná (což by způsobilo pád jejich obyvatel do pekla).
 - 5) Všechny ostatní planety, měsíce a Slunce vidíme jako kruhové desky. Všechny však konají vůči Zemi librační pohyby (kývají se z boku nabok), ale svůj tvar si zachovávají. Proto mají kulový tvar. Analogicky by měla mít kulový tvar Země. Opodstatnění takové analogie nemáme, tedy tento bod není argumentem.
 - 6) Přímé fotografie Země z družice.
- (B) Argumentace důstojného kmeta proti mým názorům
- 1) “Není pravda, jak jsi mi řekl, že pod námi je peklo. Vždyť želva se opírá o jeho střechnu. A sloni, když některý pije z nebeského oceánu, způsobují zemětřesení.”
 - 2) “Nebeská klenba je nízká nad zemí, proto nastává posun hvězd. Synu, nedej se zmást ďáblem!!!”
 - 3) “Pekelné plameny ohřívají oceán, proto při krajích je voda nižší než při pevnině. To je ta tvoje deprese horizontu.”
 - 4) “Vskutku můžeme pozorovat stín Země na Měsíci, jak jsi ukazoval. Ale vidíme ho jenom část.”
 - 5) “Všechny planety jsou obrazem ďábla. Nevěř tomu, co vidíš. To ďábel pokouší tvoji mysl, když ti ukazuje fotografii Země jako koule.”
- “A víš co, kašli na to, narazíme sud piva a ukážu ti, z čeho žiju a proč jsem tak dlouho živ.”

Po této věru akademické diskusi s vetším kmetem se zamysleme nad hypotézou, že Země je středem vesmíru. Mnoho faktů hovoří ve prospěch této teorie. Např. všechny vzdálenější galaxie se od nás vzdalují. Jestliže se vesmír rozpíná, měli bychom být v centru rozpínání.

Taktéž reliktné záření je vysoce izotropní, takže kdybychom se vůči němu pohybovali, byly by vlnové délky ve směru pohybu zkrácené a v opačném směru prodloužené v důsledku Dopplerova jevu.

Nevím, proč se všichni vzpírají myšlence, že Země je středem vesmíru. Pokud existuje střed, pak v něm musí něco existovat. Problém je v tom, že náš vesmír je pravděpodobně konečný a neuzavřený. Tedy má konečný objem a nemá hranici. Nabízí se analogie s povrchem koule, který rovněž nemá nikde hranici, ale nemá ani střed.

Dohodneme-li se, že na místě, kde stojím, je střed vesmíru (těžiště nebo střed souměrnosti), jakkoli je to absurdní, je to pravda. Jistý astronom prohlásil kdysi toto: “Pokud si dáte na průčelí svého domu vyrýt ‘Tady je střed vesmíru,’ máte na to moje požehnání.”

V tomto bodě bych tedy se ctihodným žrecom souhlasil.

Časové skoky pak autor identifikuje pomocí jevů na čase závislých. Sestavil dokonce tabulku jevů, pomocí nichž lze řádově odhadnout čas na 10^{-15} s až stovky miliónů let. Pro nedostatek místa tabulku neuvádíme.

Téma 5 – List papíru

Doc. Pavol Habuda: Ještě jednou Youngův modul

Autor zopakoval svůj experiment měření Youngova modulu pružnosti papíru, avšak učinil tak na profesionálnější úrovni: na trhačce v žilinské celulózce.

Řekněme nejprve něco o struktuře papíru. Papír není homogenní, je tvořen dlouhými vlákny celulózy. Tedy předpokládám, že Youngův modul nebude ve všech směrech stejný.

K měření byl použit pásek šířky 1,500 ± 0,005 cm. Na trhačce jsem měřil sílu F , při které se pásek přetrhne, a relativní prodloužení ϵ . Ve dvou různých směrech jsem obdržel po asi 20 měřeních tyto hodnoty Youngova modulu:

$$E_1 = (2670 \pm 150) \cdot 10^6 \text{ Pa,}$$

$$E_2 = (820 \pm 80) \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

Oproti mému předchozímu výsledku ($E = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$) jsou tyto hodnoty skoro o dva řády menší. Přikláním se spíše ke svým novým výsledkům. Domnívám se, že chybu dřívějšího měření mohly způsobit např. třecí síly (při měření průhybu listu papíru) apod.

Téma 6 – Hélium

Doc. Pavol Habuda: Závislost teploty atmosféry na výšce

Autor nám zaslal okomentovaný výpočet závislosti teploty atmosféry na výšce.

Spočítáme, jak se bude měnit teplota atmosféry s výškou. Uvažme vrstvu ve výšce h nad zemí. V této vrstvě platí

$$dQ \text{ umera } N, \quad (\text{V.6.1})$$

kde Q je teplo absorbované vrstvou a N je počet molekul.

Dále

$$dm c_v \Delta T = N \cdot E_i, \quad (\text{V.6.2})$$

kde E_i je střední energie přijatá částicí, dm je hmotnost vrstvy, c_v je tepelná kapacita vrstvy a ΔT je rozdíl teplot vrstvy při ohřátí přijatým teplem.

Z (V.6.2) plyne

$$m_{He} dN c_v \Delta T = N E_i, \quad (\text{V.6.3})$$

kde m_{He} je hmotnost molekuly hélia.

Odtud dostáváme

$$\frac{dN}{N} = \frac{E_i}{m_{He} c_v \Delta T}, \quad (\text{V.6.4})$$

po integraci

$$\ln \frac{N}{N_0} = \frac{E_i}{m_{He} c_v \Delta T}, \quad (\text{V.6.5})$$

a odtud

$$T = T_0 + \frac{E_i}{m_{He} c_v} \cdot \ln \frac{m_0}{m}, \quad (\text{V.6.6})$$

kde N_0 je počet molekul na jednotku objemu v referenční výšce (u hladiny moře), N je počet molekul v místě s teplotou T , T_0 je teplota u hladiny moře, $\frac{m_0}{m}$ je podíl hmotností vrstev u hladiny moře a v nadmořské výšce, ve které je teplota T .

Rovnici (V.6.6) můžeme upravit na tvar

$$T = T_0 + \frac{E_i}{m_{He} c_v} \cdot \ln \left(\frac{p_0 T}{p T_0} \right), \quad (\text{V.6.7})$$

kde poslední úpravu jsme učinili dosazením ze stavové rovnice.

Dále chci říci, že při myšlence, že počasí bude podobné současnému, jsem neuvažoval funkci vrstvy CO_2 v naší atmosféře. Ta totiž zvyšuje teplotu na povrchu o 30 – 40 °C.

Doc. Pavol Habuda: Odpovědi na některé důležité otázky

Teplota nikde na Zemi neklesne pod teplotu zkapalnění hélia (je zde totiž ještě kosmické záření reliktového pozadí, které nám znemožní ochladit hélium na teploty nižší než 3 K.

Jestliže se hélium ve fyzikálním smyslu podobá vzduchu (řádově stejné hodnoty základních konstant, jako je tepelná kapacita, rychlost šíření zvuku apod.), lze očekávat, že vznikne koloběh podobný koloběhu vzduchu. Avšak určitě v mnohem menší míře, protože měrná tepelná kapacita při stálém objemu je u hélia větší než u vzduchu. Dále, teplotní gradienty budou menší, žili bude nastávat stav s menším tlakovým gradientem. Budou foukat větry, ale pomaleji než dnes. Kvůli zamrznutí vodních ploch se sníží obsah vodních par v atmosféře, takže bude méně sněžit, bude "ostřejší hélium" (analogie pro "ostřejší vzduch"), a hlavně bude víc bezoblačných nocí. Takže astronomové, i když jim víc vyhovuje vakuum, se na hélium nebudou příliš zlobit. Např. v důsledku snížení teploty se sníží tzv. seeing atmosféry (kmitavé pohyby hvězd v důsledku turbulencí, které mění hustotu, a tím i index lomu).

Pokud vzniknou oblaky, pak to budou pouze cirry (druh mrčků tvaru záclon, jemné drapérie), které jsou tvořeny krystalky ledu. Ty se budou nacházet v menší výšce než v současné atmosféře (asi 10–15 km, možná dokonce jen ve výšce 2 km.

Letecká doprava bude prožívat svůj boom. V důsledku zvýšení hranice zvuku budou moci letadla létat rychlostmi třikrát většími než dnes. Je-li viskozita vzduchu a hélia téměř stejná, musí být též Reynoldsovo číslo pro letadlo ve vzduchu a v héliu skoro stejné.

Doc. Pavol Habuda: Symfonie a kakofonie

Frekvence kmitání hlasivek se záměnou vzduchu a hélia nezmění. Změní se však rychlost šíření vlnění v prostředí, a proto se změní též výška slyšeného tónu. Jestliže se rychlost zvuku zvýší asi 3-krát, potom se frekvence přijímaných zvuků zvýší také asi 3-krát. Např. komorní *a* bude mít novou frekvenci $440 \text{ Hz} \cdot \frac{971 \text{ m s}^{-1}}{331 \text{ m s}^{-1}} = 1290,7 \text{ Hz}$. Tedy, abychom slyšeli stejné symfonie jako doteď, budeme muset podladit nástroje na třetinovou hodnotu.

Doc. Pavol Habuda: Pětíčko

Peří padá volným pádem. Obtékání můžeme (doufejme) považovat za laminární. Tedy

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{k\eta_1 r_1 v_1}{k\eta_2 r_2 v_2}, \quad (\text{V.6.8})$$

kde indexy 1 označují vzduch, 2 hélium.

Tedy platí

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad (\text{V.6.9})$$

kde t_2 je čas, za který přeletí určitou vzdálenost těleso v héliu, t_1 týž čas ve vzduchu. Jestliže máme $\eta_1 \approx \eta_2$, pak si rozdíl v pádu ani nevšimneme.

Jestliže bude proudění turbulentní, bude platit

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}c_k S \rho_1 v_1^2}{\frac{1}{2}c_k S \rho_2 v_2^2}. \quad (\text{V.6.10})$$

Odtud

$$\frac{v_2^2}{a_2} \cdot \frac{a_1}{v_1^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2s_2}{2s_1}. \quad (\text{V.6.11})$$

Tedy dráha uražená v héliu bude za stejný čas asi 8-krát delší než ve vzduchu.

Doc. Pavol Habuda: Optika v héliu

Uvažujme atmosféru, která mění svůj index lomu. Platí Snellův zákon:

$$\begin{aligned} \frac{\sin z_1}{\sin z_0} &= \frac{n_0}{n_1} \\ \frac{\sin z_2}{\sin z_1} &= \frac{n_1}{n_2} \\ &\dots \\ \frac{\sin z_k}{\sin z_{k-1}} &= \frac{n_{k-1}}{n_k}, \end{aligned} \tag{V.6.12}$$

kde $\sin z_i$ je úhel dopadu na i -té vrstvě atmosféry, kde se mění index lomu n_i . Přitom $n_0 = 1$ je index lomu vakua. Z soustavy rovnic (V.6.12) plyne

$$\sin z_0 = n_k \cdot \sin z_k. \tag{V.6.13}$$

Označme zenitovou vzdálenost ξ . Potom rozdíl mezi skutečnou zenitovou vzdáleností ξ_0 a ξ můžeme napsat jako

$$\sin(\xi\sigma) = n_k \cdot \sin \xi, \tag{V.6.14}$$

kde σ je refrakční úhel, odchylka od přímého směru paprsku. Rovnici (V.6.14) upravme:

$$\sin \xi \cos \sigma + \cos \xi \sin \sigma = n_k \cdot \sin \xi. \tag{V.6.15}$$

Je-li úhel σ velmi malý, můžeme psát, že $\cos \sigma = 1$, $\sin \sigma = \sigma$. Odtud

$$\sin \xi + \sigma \cos \xi = n_k \cdot \sin \xi, \tag{V.6.16}$$

a konečně

$$\sigma = (n_k - 1) \operatorname{tg} \xi. \tag{V.6.17}$$

Do velikostí $\operatorname{tg} \xi < 10$ vztah platí poměrně přesně. Tedy bude platit

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{n_{k1} - 1}{n_{k2} - 1} = \frac{1,000292 - 1}{1,000035 - 1} = \frac{292}{35} \approx 8, \tag{V.6.18}$$

kde index 1 značí vzduch, 2 hélium. Tedy v héliové atmosféře bude v oblasti použitelnosti tohoto vztahu refrakce asi 8-krát menší než ve vzduchu. Můžeme však předpokládat, že i u obzoru bude refrakce asi 8-krát menší. Tedy Slunce, když bude jeho vršek zapadat, nebude $36'$ pod obzorem, nýbrž pouze $4'5''$ pod obzorem.

Doc. Pavol Habuda: Reakce na článek Dr. Daniela Klíra

Odstředivá síla dodává ke gravitačnímu zrychlení člen

$$a = g - \frac{v^2}{r} \cos \alpha.$$

Kdyby měla atmosféra díky odstředivému zrychlení odletět do prostoru, už by se tak stalo s naší vzduchovou atmosférou, což našťáší nepozorujeme.

Nechť $a = 0$, pak $v = \sqrt{gr} = \sqrt{9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 6378 \cdot 10^3 \text{ m}} \approx 8 \text{ kms}^{-1}$. Je to vlastně I. kosmická rychlost. Ve vyšších částech atmosféry už částice nekrouží pevně spojené se Zemí, ale podle Newtonových zákonů. Osobně si tedy myslím, že hrozba úniku hélia do prostoru neexistuje.

Doc. Pavol Habuda: Reakce na článek Dr. Aleše Přivětivého

Hmotnost vzduchu byla $5,3 \cdot 10^{18}$ kg. Když jsme tuto hmotu odstranili, rychlost rotace se zvětšila. Po vyprodukování hélia se opět zmenšila. Změna této rychlosti tedy nebude na 5., nýbrž až na 7. desetinném místě.

Doc. Pavol Habuda: Dodatek k článku Dr. Daniela Klíra

Absorbce části elektromagnetického spektra v viditelné oblasti ve vzduchu skutečně existuje. Tato absorbce však není úplná a dochází k ní pouze v úzkých pásích. Na malé vzdálenosti tedy budeme vidět stejně jako dřív.

Doc. Pavol Habuda: Reakce na článek Mgr. Štěpánky Kučkové

Změna indexu lomu mezi vzduchem a heliem je $\Delta n = 2,6 \cdot 10^{-4}$. Jestliže světlo musí zachovávat svoji energii a hybnost, platí, že frekvence záření se nezmění. Platí tedy

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{\lambda_1}{c_1},$$

kde index 1 označuje prostředí hélia. Pokud máme $c_1 = \frac{c}{1+\Delta n}$, pak

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \Delta n} = \lambda(1 - \Delta n) \approx \lambda.$$

Tedy ani vlnová délka světla se nikterak výrazně nezmění. Tyto změny může registrovat pouze úzkopásmový filtr, lidské oko rozhodně ne.

Doc. Pavol Habuda: Pozorování meteorů

Zatímco v kyslíkové atmosféře je výška “zapálení” meteoru asi 40 – 80 km, v heliové atmosféře to bude o mnoho výše. Důvodem je skutečnost, že meteor začne zářit při určitém tlaku. Tehdy je totiž okolo dostatek částic, kterým předá svoji hybnost a které potom vyzáří elmg. kvantum. Domnívám se, že výška zapálení se zvýší minimálně o řád, maximálně o dva řády. Zde by bylo třeba znát obecný vzorec pro výpočet tlaku v heliové atmosféře. Tedy budeme pozorovat méně meteorů kvůli snížení jejich jasnosti (budou dál od pozorovatele). Zvětší-li se vzdálenost 10-krát, pak intenzita poklesne 100-krát, což odpovídá 6 magnitudám. Meteorů bude méně tedy k^6 -krát, kde k je tzv. populační index. Udává vlastně poměr počtů pozorovaných meteorů s rozdílem jedné magnitudy. Běžné roje a sporadické pozadí mají $k \in (2; 3)$. Vezmeme-li $k = 2,5$, pak $k^6 \approx 100$, to znamená, že budeme pozorovat asi 100-krát méně meteorů.

Dalším problémem je rozptyl světla neonek. Heliová atmosféra bohužel nepotlačí tento efekt, takže pokud se budou neony vyrábět v dosavadní míře, budou to moci meteoráři zabalit.

Téma 7 – Magická zrcadla

Doc. Pavol Habuda: Pokusy s fóliemi

Toto téma, i když se to nezdá, se může snadno stát experimentálním. Vzal jsem asi 100 fólií, které odrážely světlo. Chovaly se jako zrcadla a bylo možné je tvarovat.

Autor popisuje svoje pokusy s fóliemi. Ve svém článku je doplnil několika náčrtky, které z technických důvodů neotiskujeme. Nejsme si však jisti, zda jsme všechny popisy deformace fólií pochopili správně, proto se předem omlouváme za případná nedorozumění.

- (1) Nejprve jsem si vyrobil parabolické zrcadlo. S jeho pomocí jsem zobrazil čtverec na čáru. (Jak jsem postupoval: Na stůl jsem položil čtverec, a před něj jsem umístil fólie, které jsem ohýbal.) Stejně lze zobrazit libovolný útvar nějaké šířky na čáru.

- (2) Dále jsem vzal fólii a její okraje jsem stlačil dovnitř. Boky byly prohnuté dovnitř, při rozích byly fólie prohnuté ven. Střed byl relativně nezakřivený. Tímto zrcadlem se mi podařilo změnit čtverec na písmeno S. Pokud se v však podíváte z vhodného úhlu, spatříte pouze srpek (půlměsíc).
- (3) Uchopil jsem obdélníkovou fólii za opačné strany a zkroutil jsem ji. Takto jsem ze čtverce získal písmeno U.
- (4) Jestliže nepatrně zakřívíte zrcadlo, pak můžete namísto čtverce pozorovat kuličky vedle sebe. Při tomto zobrazení je pěkný pohled do vlastních očí. *Autor dále dodává – citujeme:* “Cítil som sa ako vo Warcraft II-ke. Videl som asi 100 očí, ktoré sa prelievali jedno do druhého. Ako po mariške.”
- (5) Zdeformujete-li obdélníkovou fólii do tvaru sinusoidy (tj. jeden z jejích průmětů je sinusoida), potom opět pozorujete kuličky namísto čtverce (nejsem si však jist, zda jsem přitom nezakřivil také boční stranu).
- (6) Zkroutíte-li vrchní stranu rohy k sobě, a spodní necháte volně, zobrazíte čtverec na lichoběžník. Zkroutíme-li rohy k sobě trochu více, dostaneme “klobouk”.
- (7) Dále se mi podařilo zobrazit čtverec na sinusoidu. Už bohužel nevím, jak se mi to povedlo, ale možná si vzpomenu.
- (8) Na závěr budu polemizovat s Dr. Danielem Klírem. Není pravda, že se čtverec nedá zobrazit na tvar písmene X nebo Y s využitím pouze zakřivených zrcadel. Mějme zakřivené zrcadlo jako v bodě (1). Nyní vezměme dvě takováto zrcadla a spojme je (bez zalomení) do tvaru X nebo Y. Uvidíme tato písmena.

Doc. Pavol Habuda: Další pokusy

- (9) Provedeme-li pokus (3) z předchozího, avšak ohneme bok fólie pouze trochu, dostaneme čtverec otočený o 45° a kosočtverec.
- (10) Jemným nahnutím dostaneme čtverec prodloužený ve směru jedné osy.
- (11) Deformujeme fólii na oblouk. Ze čtverce tak dostaneme mezikružší.
- (12) Vypuklým zrcadlem s malým poloměrem křivosti dostaneme ze čtverce lichoběžník.
- (13) Ohneme-li čtvercovou fólii na úhlopříčce, pak úhlopříčka má vůči rovině stolu sklon α . Na fóliích se čtverec zobrazí na obdélník se sklonem α delší strany vůči stolu.
- (14) Větším zkřivením okrajů fólie dostaneme různé “vykouslé” útvary.

*Redakce vysoce (i bodově) oceňuje autorovu experimentální činnost. Autorovi udělujeme za zásluhy čestný titul **promovaný optik**. Připojujeme návrh. Pokud někdy (např. na soustředění, v příštích ročnících apod.) budeme chtít v tomto tématu pokračovat, bude asi nejlepší vyjadřovat tvary ploch pomocí rovnic.*

Téma 8 – Číselné soustavy

Dr. Jan Mysliveček: Odmocňování čísel v desítkové soustavě

Autor vyhověl prosbě redakce a poslal nám popis algoritmu pro ruční odmocňování. Ačkoliv tento algoritmus nevymyslel, nedokázal ani nezdůvodnil, považují ho za přínosný, neboť jsem ho už dávno chtěl poznat.

1. Napíšeme si odmocňované číslo v desítkové soustavě. Označme si toto číslo jako akumulátor A . Podíváme se, zda má před desetinnou čárkou sudý či lichý počet cifer.
2. Zpaměti odmocníme nejvyšší cifru (resp. 2 cifry), aby nám zbyl sudý počet cifer. Nás zajímá celá část této odmocniny, např. $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{2} = 1$, $\sqrt{3} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{27} = 5 \dots$ Tuto cifru vypíšeme jako první cifru výsledku V a pak ji posuneme do nejvyššího řádu akumulátoru a uložíme do rozdílu R .
3. Odečteme rozdíl R od akumulátoru A (pokud jsme již vyčerpali všechna desetinná místa, můžeme připsat dvě nuly). Pokud je akumulátor A nulový, skončili jsme s odmocňováním.
4. Nyní určíme další cifru výsledku y takto: y je největší možná cifra, pro kterou ještě platí $(2V \circ y) \cdot y = (2V \cdot 10 + y) \cdot y \leq A$, tedy zdvojnásobíme zatím vypsaný výsledek V , přičtíme cifru y , vynásobíme to y a to nesmí být větší než akumulátor A .

5. Tuto cifru přičítáme k výsledku V a vypočítaný součin uložíme do rozdílu R .

6. Vráťme se zpět ke kroku 3.

Během tohoto postupu nepracujeme vždy se celým akumulátorem, vždy bereme pouze několik horních míst. Desetinná čárka zde nemá valný význam, při výpočtech se ignoruje (pracujeme s celými čísly). Tento algoritmus není příliš výhodný pro větší počet cifer, neboť se stále zvětšuje velikost mezivýsledků. Vše si nyní ozřejmíme na několika příkladech:

$$\begin{array}{r}
 \text{sqrt } 2 \quad = 1.41421 \\
 -1 \\
 100 \quad \geq 24 \times 4 \\
 -96 \\
 400 \quad \geq 281 \times 1 \\
 -281 \\
 11900 \quad \geq 2824 \times 4 \\
 -11296 \\
 60400 \quad \geq 28282 \times 2 \\
 -56564 \\
 383600 \geq 282841 \times 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{sqrt } 397 \quad = 19.924 \\
 -1 \\
 297 \quad \geq 29 \times 9 \\
 -261 \\
 3600 \quad \geq 389 \times 9 \\
 -3501 \\
 9900 \quad \geq 3982 \times 2 \\
 -7964 \\
 193600 \geq 39844 \times 4
 \end{array}$$

Takto bychom mohli počítat i v jiných soustavách, ale bohužel nemáme tyto výpočty příliš zažité, takže nejlépe bude dělat je ručně v desítkové soustavě.

Bc. Ivana Čapková: Vyvážená trojková soustava

Autorka vidí největší přínos této soustavy v tom, že se dají zobrazit elegantně záporná čísla. V dalších výpočtech nevidí žádné zjednodušení, protože se s přenosy musí počítat také.

Názor redakce je jiný:

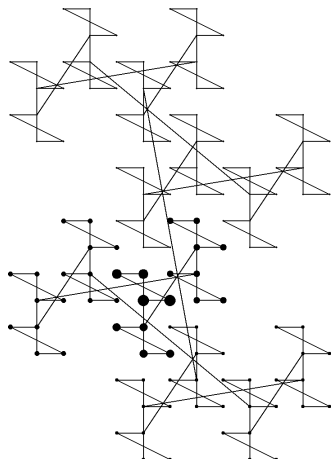
1. přenosy je nutné brát v úvahu ve všech pozičních soustavách,
2. záporná čísla se zde zobrazují skutečně elegantně: chceme-li vzít opačné číslo, pouze prohodíme cifry 1 a -1, chceme-li se podívat, je-li číslo kladné, poznáme to podle nejvyšší cifry,
3. sčítací tabulka obsahuje pouze přenosy 1 a -1, takže v nejhorším případě bude složitá stejně jako obyčejná binární soustava, rozhodně nebude jako např. soustava o základu -2 , kde jsou přenosy skutečně složité,
4. největší výhoda se projeví při násobení: nemusíme si pamatovat ŽÁDNOU násobilku – násobení cifrou 0 je vždy nula, násobení cifrou 1 je kopírování čísla a u násobení cifrou -1 pouze prohodíme znaménka. Takže počítání v této soustavě je stejně jednoduché jako počítání v soustavě binární, ale ještě jsme navíc elegantně zavedli záporná čísla.

Bc. Ivana Čapková: Soustava o základu $(i - 1)$

Zatímco v obvyklých pozičních soustavách graf vyznačující čísla, které je možno vyjádřit n ciframi, je jednoduchá čtvercová síť, jinak je tomu zde. Autorka si ručně vyjádřila všechna čísla s 1–4 ciframi a vykreslila je. Dá se předpokládat, že podobný symetrický obrazec uvidíme i při větším počtu cifer. Zatím jsme to však nedokázali!

$$\begin{array}{ll}
 0 = 0 & 1000 = 2+2i \\
 1 = 1 & 1001 = 3+2i \\
 10 = -1+i & 1010 = 1+3i \\
 11 = i & 1011 = 2+3i \\
 100 = -2i & 1100 = 2 \\
 101 = 1-2i & 1101 = 3 \\
 110 = -1-i & 1110 = 1+i \\
 111 = -i & 1111 = 2+i \quad \dots
 \end{array}$$

Na následujícím grafu jsou různě velkými tečkami nakreslena čísla vyjádřená 0–6 ciframi. Propojená jsou čarami podle toho, jak jdou po sobě jejich binární zápisy.



Úloha 10 – Fata morgána

Úmluva. V dalším textu zápis RG znamená číslo, jež má v řádu desítek číslici R a v řádu jednotek číslici G . Znak $?$ znamená libovolnou číslici.

Sčítáme-li pod sebou 3 čísla, sčítáme postupně po řádech od nejnižšího po nejvyšší a když je součet větší jak 9, přičítáme číslici desítek k vyššímu řádu.

Přičítací lemma. K vyššímu řádu nepřičítáme nikdy číslo větší jak 2.

Důkaz. Zjevně platí, že součet 3 čísel je vždy menší, nebo roven trojnásobku největšího z nich. Největší n -ciferné číslo je $\underbrace{99\dots99}_n$, součet posledních n -řádů tří čísel je vždy menší nebo roven $\underbrace{299\dots997}_{n-1}$. Tedy nikdy nemůžeme k $(n+1)$ -mu řádu přičítat více než 2.

Při řešení budeme často využívat faktu, jsou použity všechny číslice, tedy je každá použita právě jednou.

V řádu jednotek platí $A + A + A = ?A$. Zároveň $3 \cdot A \leq 27$, tedy A je řešením jedné z následujících rovnic

$$3 \cdot A = A, \quad 3 \cdot A = 10 + A, \quad 3 \cdot A = 20 + A.$$

Máme 3 řešení $A = 0$, $A = 5$ a $A = 10$, přičemž $A = 10$ můžeme vyloučit, neboť A má význam číslice.

Dále zjevně platí $2 \cdot S \leq 18$ (neboť $S \leq 9$) a $2 \cdot A \leq 10$ ($A = 0$ nebo 5), k vyššímu řádu převádíme tedy nejvýše jedničku. Z toho plyne $MO \leq 19$. Pokud neuvažujeme "zvrhlou" variantu $M = 0$ (obvykle není zvykem, aby čísla začínala nulou), dostáváme $M = 1$.

Protože $2 \cdot A$ končí vždy na nulu ($A = 0$ nebo 5), nemůže být R větší než 2 dle Přičítacího lemmatu. R však nemůže být jedna, jelikož $M = 1$.

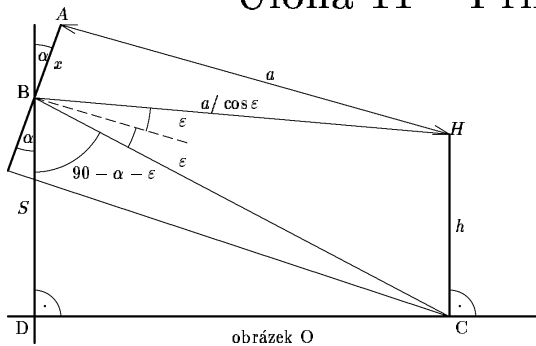
$R + R + T$ nemůže být větší než 9, neboť pak by se muselo přičítat něco k řádu stovek a neplatilo by v řádu stovek $A + A + A = \cdot A$ jako v řádu jednotek.

Rozebermež podrobněji všechny případy:

- (1) $A = 0$. Potom R nemůže být 0, tedy $R = 2$. Platí $R + R + T = N$, $H + H + F = RG$ a $S + S = 1O$, neboli $4 + T = N$, $2 \cdot H + F = 20 + G$, $2 \cdot S = 10 + O$. Uvažme, která číslice může být rovna 3:
- (a) $T = 3$. Dává $N = 7$. Jelikož $S \geq 7$ (platí $2 \cdot S = 10 + O$ a $O \leq 3$, neboť 0, 1 a 2 jsou již obsazeny), musí být
- (i) $S = 8$ a $O = 6$.
- (ii) $S = 9$ a $O = 8$. Jelikož platí $2 \cdot H + F = 20 + G$ ($G \geq 3$), je $H \geq 7$. Varianta (i) tedy odpadá a platí $H = 9$. Rovnost $2 \cdot 9 + F = 20 + G$ však se zbývajícími číslicemi 4, 5 nelze splnit.
- (b) $N = 3$. Nelze, neboť $N = 4 + T \geq 4$.
- (c) $H = 3$. Dává $F + 14 = G \geq 14$. Nelze.
- (d) $F = 3$. Dává $2 \cdot H = 17 + G \geq 20$ (0,1,2 již jsou obsazeny, tedy $G \geq 3$).
- (e) $G = 3$. Jelikož $F \geq 3$, jsou pouze 2 možnosti, jak splnit rovnici $2 \cdot H + F = 20 + 3$:
- (i) $H = 9$ a $F = 5$. Jelikož $4 + T = N$, musí být $T = 4$ a $N = 8$. Pak ale ze zbývajících číslic 6, 7 nesplníme rovnost $2 \cdot S = 10 + O$.
- (ii) $H = 8$ a $F = 7$. Nelze, neboť $O = G$.
- (f) $S = 3$. Nelze, neboť $2 \cdot S = 10 + O \geq 10$.
- (g) $O = 3$. Nelze, neboť dává $2 \cdot S = 13$, ale S musí být celé.
- (2) $A = 5$. Platí $R + R + T + 1 = N$, $H + H + F + 1 = RG$ a $S + S + 1 = 1O$. Zde máme 2 možnosti pro hodnotu R :
- (a) $R = 0$. Dostáváme $T + 1 = N$, $2 \cdot S = 9 + O$ a $2 \cdot H + F = G - 1$. Uvažme, která číslice může být dvojka:
- (i) $T = 2$. Pak $N = 3$. Protože $2 \cdot H + F = G - 1 \leq 8$, je $H \leq 4$, tedy $H = 4$. Potom ale musí být $F = 0$, ale již je $R = 0$.
- (ii) $N = 2$. Nelze, neboť $N = T + 1$ dává $T = 1$, ale již $M = 1$.
- (iii) $H = 2$. Pak $F + 5 = G \leq 9$ dává dvě možnosti (cifry 0, 1, 2 jsou již obsazeny, $G \leq 9$):
- (A) $F = 3$ a $G = 8$. Protože T a N jsou dvě po sobě jdoucí čísla, musí dále platit $T = 6$ a $N = 7$. Zbylé cifry 4, 9 ale již nemohou splnit rovnici $2 \cdot S = 9 + O$.
- (B) $F = 4$ a $G = 9$. Číslice 3 nemůže být ani S ($S \leq 5$ ani T ani N (T a N jsou dvě po sobě jdoucí čísla)). Tedy zbývá $O = 3$. Odtud již přímočaře $S = 6$, $T = 7$ a $N = 8$.
- (iv) $F = 2$. Pak $2 \cdot H + 3 = G \leq 9$ dává $H \leq 3$, tedy $H = 3$ a $G = 9$. Dále platí $2 \cdot S = 9 + O$, tedy je O liché. Poslední zbylé liché číslo je 7, tedy $O = 7$ a $S = 8$. Na T a N zbývají číslice 6 a 4, ty však nespĺňují rovnici $T + 1 = N$.
- (v) $S = 2$. Nelze, neboť $2 \cdot S = 9 + O$, $S \geq 5$.
- (vi) $O = 2$. Nelze, neboť dává $2 \cdot S = 11$, ale S musí být celé.
- (b) $R = 2$. Dostáváme $T + 5 = N$, $2 \cdot S = 9 + O$ a $2 \cdot H + F = G + 19$. Podívejme se, co se stane přiřazujeme-li jednotlivým cifrám nulu:
- (i) $T = 0$. Pak $N = 5$, ale již platí $A = 5$. Nelze.
- (ii) $N = 0$. Nelze, neboť $N = T + 5$, $N \geq 5$.
- (iii) $H = 0$. Pak $F = G + 19$, ale $F \leq 9$. Nelze.
- (iv) $F = 0$. Pak $2 \cdot H = G + 19$, ale $2 \cdot H \leq 18$. Nelze.

- (v) $S = 0$. Nelze, neboť $2 \cdot S = 9 + O$, $S \geq 5$. Tedy zbývá poslední možnost, $G = 0$. Odtud přímo plyne $2 \cdot H + F = 19$. Tato rovnice dává tato řešení (splňující podmínku H, F jsou číslice):
- (i) $H = 9, F = 1$. Nelze, již je $M = 1$.
 - (ii) $H = 8, F = 3$.
 - (iii) $H = 7, F = 5$. Nelze, již $A = 5$.
 - (iv) $H = 6, F = 7$.
 - (v) $H = 5, F = 9$. Nelze, již $A = 5$. Zároveň platí $2 \cdot S = 9 + O$. Tato rovnice dává řešení:
 - (i) $S = 5, O = 1$. Nelze, již $M = 1$.
 - (ii) $S = 6, O = 3$.
 - (iii) $S = 7, O = 5$. Nelze, již $A = 5$.
 - (iv) $S = 8, O = 7$.
 - (v) $S = 9, O = 9$. Nelze, již $O = S$. Jak vidno, nelze najít řešení pro H, F, S a O , tak aby se dvě z cifer nerovnal. Tedy $A = 5, R = 2$ nedává řešení.

Úloha 11 – Princeznička



Úloha 12 – Parník

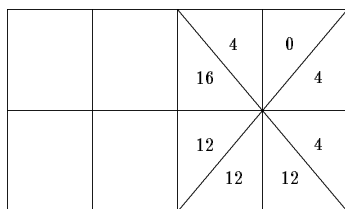
Řešme nejprve problém rozplacatého parníku. Papír budeme považovat za homogenní (kterákoli jeho jednotka plochy má stále stejnou hmotnost). Parníkem prochází jediná svislá osa symetrie. Těžiště lodí se zřejmě nachází na této ose. Zbývá tedy určit výšku těžiště nad zemí. K tomuto účelu si parník rozdělíme na několik trojúhelníků a čtverců, ideální je parník nakrájet. Na následujícím obrázku jsou šrafovaním vyznačeny útvary, ze kterých je parník složen, u každé šrafované části je uvedeno číslo, kolikrát je daná část na daném místě naskládána přes sebe. Díky symetrii stačí uvažovat pravou polovinu parníku.



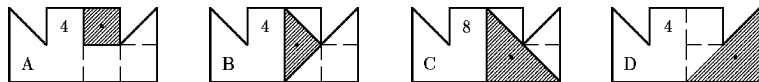


Rozdělme si nyní parník na elementární trojúhelníčky dle následujícího obrázku:

Každému trojúhelníčku lze přiřadit počet jeho výskytů přes sebe. Vepíšme tato čísla do obrázce:



Nyní si nakreslíme 4 jiné útvary složené vždy z několika elementárních trojúhelníčků. Dostaneme podobné pokrytí celého parníku jako na prvním obrázku, čísla představují počet pokrytí daného útvaru papírem přes sebe:



Teď použijeme momentovou větu. Pro každou souřadnici a_T polohy těžiště platí:

$$a_T = \frac{\sum_{i=1}^n a_i m_i}{m},$$

kde a_i je příslušná souřadnice i -té části, m_i je její hmotnost a m je hmotnost celého tělesa (v našem případě poloviny parníku). Papír považujeme za homogenní, tedy všechny zmíněné hmotnosti jsou přímo úměrné plochám částí. Dostáváme

$$a_T = \frac{\sum_{i=1}^n a_i S_i}{S},$$

kde S_i je plocha i -té části, $S = \sum_{i=1}^n S_i$ je plocha celku.

Označme výšku parníku h . Počátek soustavy souřadné umístíme na svislou osu souměrnosti do bodu dotyku lodě se zemí. Osa y nechť je totožná se zmíněnou osou souměrnosti. Zjistíme polohy těžišť jednotlivých částí na obrázcích A, B, C, D:

$$y_A = \frac{3}{4}h, y_B = \frac{1}{2}h, y_C = \frac{1}{3}h, y_D = \frac{1}{3}h.$$

Označíme-li plochu jednoho elementárního trojúhelníčku S_Δ , pak

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^4 S_i y_i}{S} = \frac{8S_\Delta \cdot \frac{3}{4}h + 8S_\Delta \cdot \frac{1}{2}h + 32S_\Delta \cdot \frac{1}{3}h + 16S_\Delta \cdot \frac{1}{3}h}{64S_\Delta} = \frac{13}{32}h.$$

Tím jsme jednoznačně našli polohu těžiště celého parníku. Zbývá otázka, co se bude dít s těžištěm, rozšíříme-li podstavu lodě. Mnozí z vás argumentovali, že parník se tak dostane do stabilnější polohy, a tudíž se sníží jeho potenciální energie, tj. těžiště klesne. Nepovažují však tento argument za přesvědčivý. Uvažte krabici půdorysu čtverce, která je vyrobena z pevné lepenky. Krabici zbavíme dna a víka, dostaneme jakousi ohrádku. Pokud přiblížíme dva její protější rohy, nebude stát ohrádka ve stabilní poloze. Přitom její těžiště bude stejně vysoko jako ve stabilní poloze, kdy je půdorys např. čtvercový.

Za rozumné zdůvodnění poklesu těžiště parníku tedy považují pozorování, že při roztáhnutí podstavu se každý z elementárních trojúhelníčků (nebo jiných elementárních částí) pohne směrem dolů.

Výsledková listina po závěrečné 5. sérii

Č.	Jméno	Třída	Σ_{-1}	T1	T5	T6	T7	T8	R10	R11	R12	Σ_0	Σ_1
1.	Doc. Pavol Habuda	3.B	114	6	3	7	6		3	2	4	31	126
2.	Prof. Tomáš Brauner	GMorKr 4.B	242						5	5		10	83
3.	Dr. Daniel Klír	GPoděb 4.B	148									0	82
4.-5.	Dr. Jan Mysliveček	GKJB 2.A	79	1				2	3	1	4	11	63
	Dr. Aleš Přivětivý	GPard 4.?	50						1	5	4	10	60
6.	Dr. Jan Holeček	GKJB 2.A	46						1	5	4	10	56
7.	Mgr. Štěpánka Kučková	GArab 3.E	41						2	5		7	48
8.	Dr. Jan Fátor	?	59	3						5	5	13	46
9.	Bc. Ivana Čapková	SPŠE 4.B	31					2	3			5	36
10.	Dr. Ondřej Přibyla	?	70									0	34
11.	Mgr. Vlastimil Křápek	GBrno 4.C	32									0	32
12.-13.	Dr. David Holec	GKJB 2.A	61									0	30
	Mgr. Jaroslav Jánský	GKJB 2.A	30									0	30
14.	Dr. Jitka Spoustová	?	58									0	28
15.	Mgr. Jiří Lísal	Gymn 4.A	27									0	27
16.	Mgr. Jarmila Mulačová	GMI B	16						4	5		9	25
17.	Mgr. Milan Orlita	GUhHra ?A	25									0	25
18.	Mgr. Radomír Budínek	GHod 7.A	24									0	24
19.	Dr. Václav Račanský	GKJB 2.A	79									0	23
20.	Mgr. Milena Svobodová	?	43									0	22
21.	Bc. Andrej Pavlík	GTrenč 1.r	18									0	18
22.-23.	Dr. Tomáš Klír	?	52									0	14
	Bc. Kateřina Nováková	GMnich	14									0	14
24.	Bc. Barbora Vostrovská	GJKT 4.A	12									0	12
25.	Jitka Krouželová	septíma B	9									0	9
26.	Mgr. Jiří Roubínek	GŽďár 4.A	48									0	8
27.	Lucie Petráčkové	SPŠST 3.L	0						3		3	6	6
28.	Bc. Zuzana Rychnová	?	14									0	5
29.-30.	Svatava Vyvialová	?	4									0	4
	Ondřej Škoda	?	4									0	4
31.	Petra Habrovanská	?	0						3			3	3
32.	Pavel Železný	?	0									0	2

Výsledková listina celého III. ročníku

Č.	Jméno	Třída	loni	S2	S3	S4	S5	letos	celkem
1.	Doc. Pavol Habuda	3.B	19	20	25	50	31	126	145
2.	Prof. Tomáš Brauner	GMorKr 4.B	169	32	18	23	10	83	252
3.	Dr. Daniel Klír	GPoděb 4.B	66	32	24	26	0	82	148
4.–5.	Dr. Jan Mysliveček	GKJB 2.A	27	10	14	28	11	63	90
	Dr. Aleš Přivětivý	GPard 4.?	0	13	17	20	10	60	60
6.	Dr. Jan Holeček	GKJB 2.A	0	14	26	6	10	56	56
7.	Mgr. Štěpánka Kučková	GArab 3.E	0	12	12	17	7	48	48
8.	Dr. Jan Fátor	?	26	22	11	0	13	46	72
9.	Bc. Ivana Čapková	SPŠE 4.B	0	5	13	13	5	36	36
10.	Dr. Ondřej Přibyla	?	36	24	10	0	0	34	70
11.	Mgr. Vlastimil Křápek	GBrno 4.C	0	15	4	13	0	32	32
12.–13.	Dr. David Holec	GKJB 2.A	31	16	12	2	0	30	61
	Mgr. Jaroslav Jánský	GKJB 2.A	0	21	9	0	0	30	30
14.	Dr. Jitka Spoustová	?	30	17	5	6	0	28	58
15.	Mgr. Jiří Lísal	Gymn 4.A	0	14	7	6	0	27	27
16.	Mgr. Jarmila Mulačová	GMB	0		5	11	9	25	25
17.	Mgr. Milan Orlíta	GUhHra ?.A	0	12	12	0	0	25	25
18.	Mgr. Radomír Budínek	GHod 7.A	0	24	0	0	0	24	24
19.	Dr. Václav Račanský	GKJB 2.A	56	23	0	0	0	23	79
20.	Mgr. Milena Svobodová	?	21	10	2	10	0	22	43
21.	Bc. Andrej Pavlík	GTrenč 1.r	0	8	10	0	0	18	18
22.–23.	Dr. Tomáš Klír	?	38	14	0	0	0	14	52
	Bc. Kateřina Nováková	GMnich	0	6	4	4	0	14	14
24.	Bc. Barbora Vostrovská	GJKT 4.A	0	12	0	0	0	12	12
25.	Jitka Krouželová	septima B	0	5	3	1	0	9	9
26.	Mgr. Jiří Roubínek	GŽďár 4.A	40	6	2	0	0	8	48
27.	Lucie Petráčkové	SPŠST 3.L	0	0	0	0	6	6	6
28.	Bc. Zuzana Rychnová	?	9	5	0	0	0	5	14
29.–30.	Svatava Vyvialová	?	0	4	0	0	0	4	4
	Ondřej Škoda	?	0	3	1	0	0	4	4
31.	Petra Habrovanská	?	0			0	3	3	3
32.	Pavel Železný	?	0	0	2	0	0	2	2

Pokud budete mít jakékoli dotazy k semináři, směrujte je na některou z těchto adres:

Robert Špalek, Elplova 30, Brno, 628 00, 0602/435 889

Matouš Jiráček, V Zátíší 670, Mnichovice, 251 64,