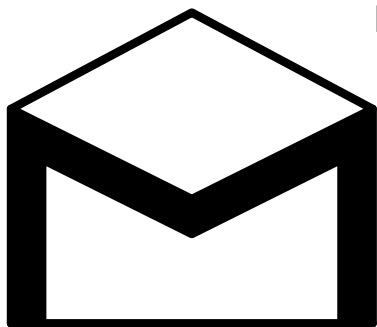


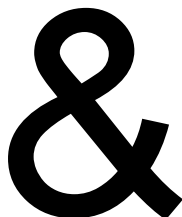
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIV

Číslo 8



MATEMATIKA



FYZIKA



INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik témat a s nimi souvisejících úloh. Zamyslete se nad nimi a pošlete nám svá řešení. My vám je opravíme, pošleme zpět s dalším číslem a ta nejzajímavější z nich otiskneme. Nejlepší řešitele zveme na podzim a na jaře na soustředění.

Milí řešitelé,

předně se moc omlouváme za to, že tvorba posledního čísla nabrala tak velké zpoždění, až bylo předběhnuto číslem prvním. Pokud si i přesto najdete chvílku času na jeho pročetí, vezte, že uvnitř najdete závěrečná shrnutí témat, která jste měli během celého roku možnost řešit, vzorová řešení poslední série úloh a konečně kompletní výsledkovou listinu 24. ročníku. Již v úvodu vám prozradíme, že absolutní vítězkou se stala Doc.^{MM} Kateřina Rosická, následována Dr.^{MM} Jonášem Havelkou a Dr.^{MM} Beátou Hroncovou. Jako nejlepší příspěvek k tématku jsme letos vybrali článek *Optické soustavy bez paraxiální aproximace* od Doc.^{MM} Kateřiny Rosické, který si můžete přečíst v tomto čísle. Prvních 5 řešitelů se může těšit na věcné ceny a Kačka na lahodný dort, který jí organizátoři za její příspěvek upečou.

Závěrem bychom vám chtěli moc poděkovat za váš zájem a aktivitu při řešení M&M. Pevně věříme, že se s vámi se všemi letos znovu potkáme na stránkách tohoto časopisu (a s některými i na dalším soustředění).

Krásný nový školní rok vám přejí

Vaši organizátoři



Řešení témat

Téma 1 – Krotitelé světla

Vážení řešitelé, závěrem k tomuto tématku bych rád poděkoval všem z vás, kteří jste se pokusili o jeho vyřešení, jmenovitě jsou to Pavla Trembulaková a Doc.^{MM} Kateřina Rosická. Druhá ze jmenovaných přispěla svým článkem teprve teď na závěr ročníku, rozebírá v něm dopodrobna výpočty mimo paraxiální aproximaci a nalézá analytický předpis objektů, které směřují paprsky do jediného bodu pomocí jednak odrazu, jednak lomu světla. Dále se zabývá neaproximovaným působením tenké čočky, dokazuje, že jí nejsou lámány do ohniska všechny paprsky rovnoběžné s optickou osou, nýbrž jen ty blízké optické ose. Celkově její příspěvek zodpovídá většinu dosud nezodpovězených otázek, které toto téma přineslo, a zmiňuje sám o sobě vše, co jsem měl v úmyslu v závěrečném shrnutí zmínit já, proto namísto mého tradičního příspěvku k tématku bude tentokrát zveřejněn příspěvek od Doc.^{MM} Kateřiny Rosické v celém svém rozsahu.

Evžen

Optické soustavy bez paraxiální aproximace (20b)

Doc.^{MM} Kateřina Rosická

Zrcadlo koncentrující paprsky do jednoho bodu

V této části příspěvku se pokusím zjistit předpis křivky vykreslené ve 4. čísle analyticky. Jak bylo v tomto čísle uvedeno, lze funkci po segmentech aproximovat lineární funkcí pod úhlem α , pro který musí platit

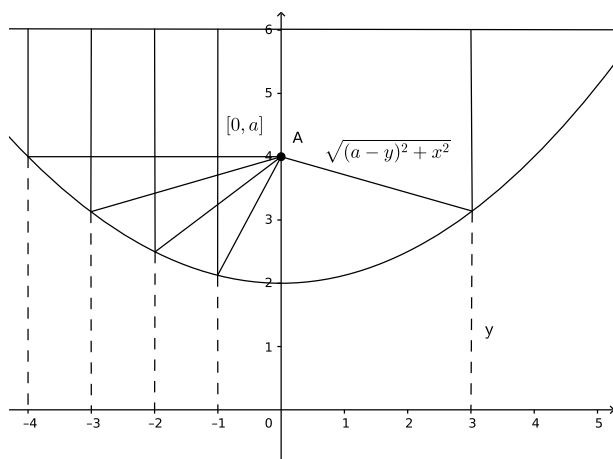
$$\frac{x_n}{a - y_n} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

Tato rovnice musí platit pro každý bod grafu, kde platí $\operatorname{tg} \alpha = y'$ (y' zde značí derivaci y podle x , pozn. red.), proto rozepíšeme $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

$$\frac{x}{a - y} = \frac{2y'}{1 - y'^2} \quad (1)$$

Po upravení rovnice získáváme nelineární neseparovatelnou diferenciální rovnici, čili musíme najít jiný způsob získání hledané funkce, u které potom pouze ověříme, že této diferenciální rovnici vyhovuje.

K získání předpisu hledané funkce popisující tvar zrcadla použijeme Fermatův princip nejkratšího času, který říká, že světelný paprsek jde vždy tou cestou, která vyžaduje nejkratší čas. Protože se světlo pohybuje ve vzduchu, musí v tomto případě urazit co nejmenší dráhu, tedy musí být všechny dráhy, po kterých se pohybuje, stejně dlouhé. Aby tedy všechno světlo po odrazu směřovalo do ohniska, musí být součet vzdálenosti od jedné vodorovné přímky k zrcadlu a od zrcadla k ohnisku všude stejný.



Obrázek 1: Nákres paprsků odrážejících se od zrcadla

Z toho vyplývá, že aby byla vzdálenost zrcadla od osy x a od ohniska stejná, musí platit

$$y = \sqrt{(a - y)^2 + x^2} \quad (2)$$

Nyní z této rovnice vyjádříme předpis funkce.

$$y = \frac{x^2}{2a} + \frac{a}{2} \quad (3)$$

Nakonec ověříme, že funkce (3) splňuje rovnici (1).

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x}{a} \\ L : \frac{x}{a - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{2}} &= \frac{2xa}{a^2 - x^2} \\ P : \frac{2\frac{x}{a}}{1 - \frac{x^2}{a^2}} &= \frac{2xa}{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

Z toho vidíme, že jsme nejenom našli předpis funkce tvaru zrcadla, což bude parabola, ale zároveň jsme výpočet rozšířili i na $y > a$, jelikož rovnice (2) platí i v této oblasti. To, že tvar zrcadla vyšel jako parabola, není náhoda, protože jedna z definic paraboly přímo říká, že parabola je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od přímky a od bodu. Pokud tuto definici rozšíříme do prostoru na vzdálenost od bodu a od roviny, získáme takzvaný *rotační paraboloid*. Tento tvar se díky svým vlastnostem velmi často používá v astronomických dalekohledech, ale také například v reflektorech aut.

Čočka koncentrující paprsky do jednoho bodu

Nyní se budeme zabývat problémem koncentrace všech paprsků do jednoho bodu pomocí lomu světla. Opět využijeme Fermatův princip nejkratšího času, kde platí, že v prostředí s indexem lomu n je světlo n -krát pomalejší, tedy za stejný čas urazí n -krát menší dráhu. Budeme se pokoušet odrazit všechny rovnoběžně přicházející paprsky do bodu $[0,0]$ použitím látky s indexem lomu n , která se v ose zrcadla nachází ve vzdálenosti f od ohniska.

Pro tyto paprsky bude platit, že součet dráhy uražené před lomem a n -násobku dráhy po lomu je pro všechny dráhy stejný, tedy

$$fn = n\sqrt{x^2 + y^2} + (f - y)$$

Úpravou tohoto výrazu dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2(n + 1) - 2fy - f^2(n - 1) + \frac{x^2n^2}{(n - 1)} = 0$$

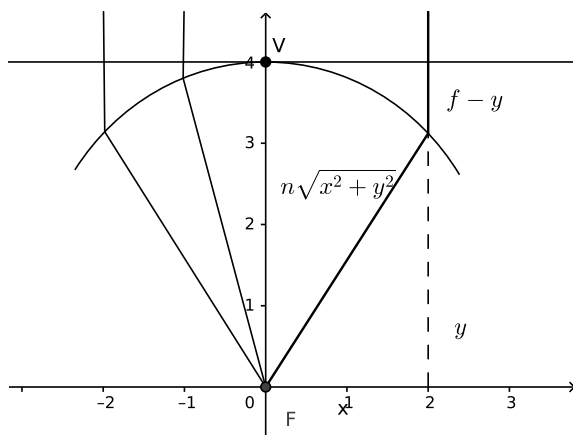
kteřá má dvě řešení pro y , a to

$$y = \frac{f \pm \sqrt{f^2 n^2 + x^2 n^2 \frac{n+1}{n-1}}}{n+1}.$$

Jelikož pro $x = 0$ dle definice musí být $y = f$, bude platit řešení s $+$. Pro lepší představu o tvaru rozhraní vzorec ještě upravíme:

$$\left(y - \frac{f}{n+1}\right)^2 + \frac{x^2}{f^2(n+1)^2} = 1$$

Z této rovnice vidíme, že rozhraní bude mít tvar části elipsy, tedy neexistuje útvar, který by do jednoho bodu pomocí lomu koncentroval rovnoběžné paprsky z celé poloroviny, jako tomu bylo u odrazu, ale pouze z pruhu o velikosti malé poloosy elipsy, tedy pruhu o šířce $f \cdot n$. Všechny paprsky se tedy odráží do ohniska elipsy vzdálenějšího od vrcholu čočky. Pro praktičtější použití ještě můžeme upravit optickou soustavu tak, aby i ohnisko leželo ve vzduchu a ne v prostředí s indexem lomu n , což uděláme přidáním rozhraní, na kterém se paprsky nelámou. Paprsky se nelámou, pokud na rozhraní dopadají kolmo, což znamená, že pokud bude mít rozhraní podobu kružnice se středem v ohnisku, dráha paprsků jím nebude ovlivněna.

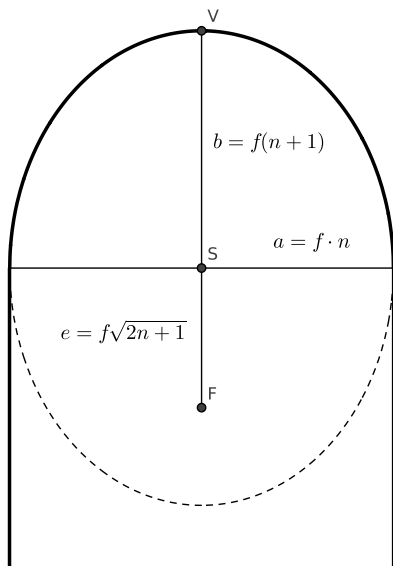


Obrázek 2: Nákres vzdáleností u návrhu koncentrace pomocí lomu světla

Tím jsme zkonstruovali spojnou čočku, která funguje pro paprsky přicházející rovnoběžně s optickou osou i mimo paraxiální aproximaci. V astronomické praxi se ale ke koncentraci paprsků do jednoho bodu používá především parabolické zrcadlo, a to z toho důvodu, že ohnisková vzdálenost této spojné čočky je závislá na indexu lomu, který je pro každou vlnovou délku světla trochu jiný, čili by světlo každé barvy bylo koncentrováno jinde (někdy se této vadě říká *chromatická*

aberrace), zatímco u zrcadla platí zákon odrazu pro všechny vlnové délky stejně, a tak je veškeré světlo koncentrováno na jednom místě.

Tyto výpočty by dokonalé čočky odpovídaly pouze pro koncentraci paprsků z nekonečna do jednoho bodu, k běžnému zobrazování čočkou bez chyby dané paraxiální aproximací by byl potřeba ještě komplikovanější tvar rozhraní. Běžné čočky se však nevyrábějí ve tvaru elipsoidité plochy z technologických důvodů, proto se nyní podívám na běžnou čočku se sférickými povrchy.



Obrázek 3: Náskres elipsy tvořící rozhraní prostředí pro $f = 3,1$ a $n = 1,7$

Lom paprsků na kulové ploše

První optickou soustavou, na kterou se podíváme, je jednoduchá kulová plocha o poloměru r tvořící rozhraní vzduchu s indexem lomu 1 a jiné látky s indexem lomu n .

Výpočet v paraxiální aproximaci

Paprsek dopadá na kulovou plochu ve vzdálenosti h od optické osy soustavy pod úhlem φ_1 , kde se láme pod úhlem φ_2 . Dle Snellova zákona je poměr sinů těchto úhlů roven indexu lomu n , což v paraxiální aproximaci přechází v poměr těchto úhlů.

$$n \approx \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \quad (4)$$

Úhel φ_1 můžeme z podobnosti trojúhelníků v paraxiální aproximaci vyjádřit jako

$$\varphi_1 = \frac{h}{r} \quad (5)$$

Z těchto dvou rovnic vyjádříme úhel lomu $\varphi_2 = \frac{h}{rn}$. Z geometrie vidíme, platí rovnost $\beta = \varphi_1 - \varphi_2$, neboli

$$\frac{h}{f} = \frac{h}{r} - \frac{h}{rn}$$

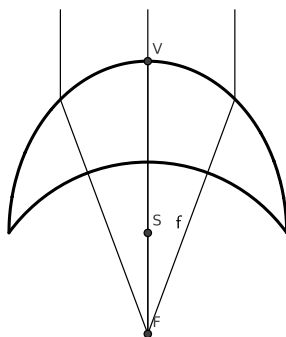
(protože v paraxiální aproximaci platí $\text{tg } \beta \approx \beta$). Z toho už můžeme vyjádřit ohniskovou vzdálenost f

$$f = \frac{rn}{n-1}$$

Výpočet mimo paraxiální aproximaci

Mimo paraxiální aproximaci budeme postupovat stejně, akorát musíme používat přesné vztahy, rovnice (4) se tedy změni na

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = n \quad (6)$$

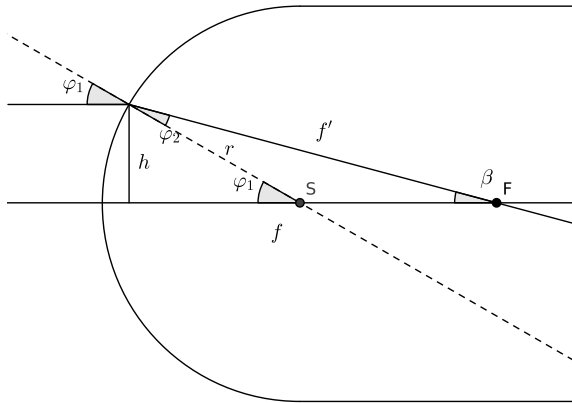


Obrázek 4: Výsledný tvar čočky fungující pro rovnoběžné paprsky mimo paraxiální aproximaci pro $f = 3,1$ a $n = 1,7$

Zároveň pro siny úhlu φ_1 a φ_2 platí obdobně

$$\sin \varphi_1 = \frac{h}{r}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{h}{rn}$$



Obrázek 5: Lom paprsku na kulové ploše

S těmito rovnicemi můžeme vyjádřit sinus úhlu β pomocí součtového vzorce pro sinus.

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \beta &= \frac{h}{r} \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2 n^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} \frac{h}{rn}\end{aligned}$$

Vyjádříme sinus úhlu β jako poměr h a dráhy paprsku od rozhraní po ohnisko f' :

$$\begin{aligned}\frac{h}{f'} &= \frac{h}{r} \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2 n^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} \frac{h}{rn} \\ \frac{h}{\sqrt{h^2 + (f - r + \sqrt{r^2 - h^2})^2}} &= \frac{h}{r} \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2 n^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} \frac{h}{rn}\end{aligned}$$

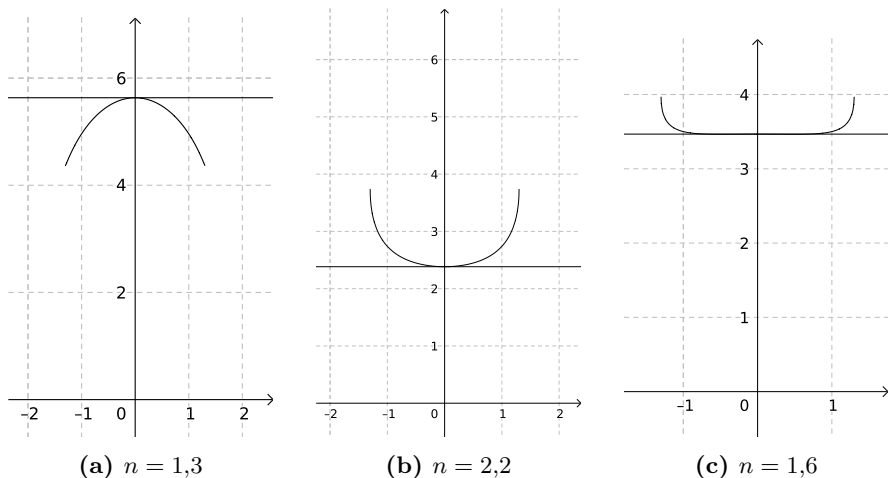
Z toho vyjádříme ohniskovou vzdálenost f :

$$\sqrt{h^2 + \left(f - r + \sqrt{r^2 - h^2}\right)^2} = \frac{rn}{\sqrt{n^2 - \frac{h^2}{r^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}}}$$

$$h^2 + \left(f - r + \sqrt{r^2 - h^2}\right)^2 = \frac{r^2 n^2}{\left(\sqrt{n^2 - \frac{h^2}{r^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}}\right)^2}$$

$$f = \sqrt{\frac{r^2 n^2}{\left(\sqrt{n^2 - \frac{h^2}{r^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}}\right)^2} - h^2} + r - \sqrt{r^2 - h^2}$$

Jak vidíme, vzdálenost, do které se paprsek zlomí, je poměrně složitou funkcí vzdálenosti od optické osy h . Pokud si funkci necháme vykreslit pro různá r a n , zjistíme, že poloměr ovlivňuje pouze „velikost“ křivky a její posun po ose y , zatímco změny indexu lomu mají na tvar křivky velký vliv. Pro nízké indexy lomu se paprsky vzdálené od optické osy lámou blíže k čočce než vypočtené ohnisko v paraxiální aproximaci (obrázek 6a), zatímco pro velké indexy lomu se tyto paprsky lámou ve větší vzdálenosti od čočky než vypočtené ohnisko (obrázek 6b). Ke zlomu mezi těmito situacemi dochází přibližně na indexu lomu $n = 1,6$, kde je paraxiální aproximace nejpřesnější na největším prostoru.



Obrázek 6: Závislost ohniskové vzdálenosti na vzdálenosti paprsku od optické osy

Jak je tedy z obrázků patrné, přesnost paraxiální aproximace pro danou čočku velmi silně závisí na parametrech dané čočky, tedy nelze jednoznačně říct, v jaké vzdálenosti dosahuje dané přesnosti.

Ověření limity

Nyní ověříme, že pro paprsky blízké ose můžeme použít paraxiální aproximaci, a to spočítáním limity $f(h)$ pro h jdoucí do nuly.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \sqrt{\frac{r^2 n^2}{\left(\sqrt{n^2 - \frac{0}{r^2}} - \sqrt{1 - \frac{0}{r^2}}\right)^2} - 0} + r - \sqrt{r^2 - 0}$$

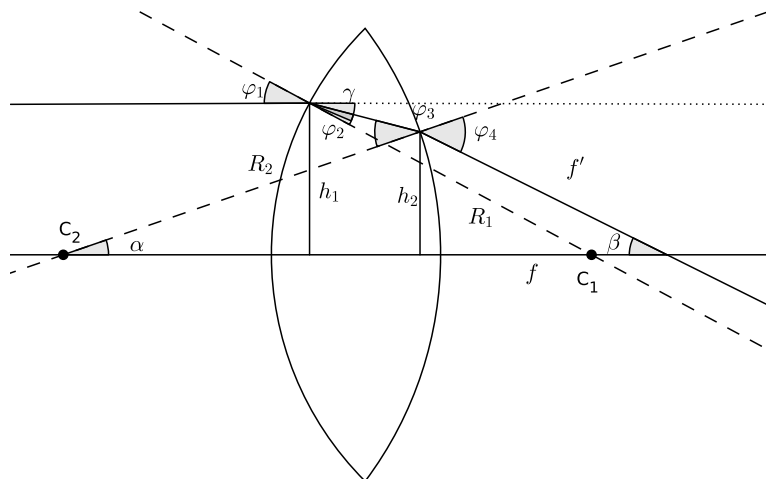
$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \sqrt{\frac{r^2 n^2}{(n-1)^2}} + r - r$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \frac{rn}{n-1}$$

Z toho vidíme, že pro malé vzdálenosti od optické osy opravdu platí daná aproximace a všechny paprsky přicházející z nekonečna se lámou do ohniska.

Průchod paprsků tenkou čočkou

Nyní se podíváme na to, jak láme paprsky mimo paraxiální aproximaci dokonale tenká čočka, čili ze dvou používaných aproximací ponecháme pouze jednu, a to předpoklad nulové tloušťky čočky, proto budeme uvažovat $h_1 = h_2 = h$.



Obrázek 7: Lom paprsků na tenké čočce

Výpočet v paraxiální aproximaci

V tomto případě platí obecně pro velikosti úhlů rovnice:

$$\gamma = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (7)$$

$$\varphi_4 = \alpha + \beta \quad (8)$$

$$\varphi_3 = \alpha + \gamma \quad (9)$$

V paraxiální aproximaci zároveň platí pro oba lomy Snellův zákon:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \approx n \quad (10)$$

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_3} \approx n \quad (11)$$

Zároveň můžeme vyjádřit i úhly pomocí goniometrických aproximací:

$$\beta \approx \frac{h}{f} \quad (12)$$

$$\varphi_1 \approx \frac{h}{R_1} \quad (13)$$

$$\alpha \approx \frac{h}{R_2} \quad (14)$$

Z této soustavy rovnic už dokážeme vyjádřit ohniskovou vzdálenost f :

$$\begin{aligned} \beta &= \varphi_4 - \alpha \\ \frac{h}{f} &= n\varphi_3 - \frac{h}{R_2} \\ \frac{h}{f} &= n(\alpha + \gamma) - \frac{h}{R_2} \\ \frac{h}{f} &= n\left(\frac{h}{R_2} + \varphi_1 - \frac{\varphi_1}{n}\right) - \frac{h}{R_2} \\ \frac{h}{f} &= n\left(\frac{h}{R_2} + \frac{h}{R_1} - \frac{h}{nR_1}\right) - \frac{h}{R_2} \\ \frac{1}{f} &= (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ f &= \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \end{aligned}$$

Což je vzorec pro ohniskovou vzdálenost čočky dohledatelný v učebnicích fyziky. Tento vzorec neplatí pouze pro dvojjvypuklou čočku, pro kterou byl odvozen, ale i pro ploskovypuklou nebo dvojdutou, tedy pro všechny spojky i rozptylky.

Výpočet mimo paraxiální aproximaci

Pro výpočet mimo paraxiální aproximaci můžeme první skupinu vzorců použít v nezměněném tvaru, ale Snellův zákon přejde do poměru sinusů úhlů a poměr vzdáleností dá rovněž sinus úhlu.

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = n \quad (15)$$

$$\frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3} = n \quad (16)$$

$$\sin \beta = \frac{h}{f'} \quad (17)$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{h}{R_1} \quad (18)$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{R_2} \quad (19)$$

Klíčem ke spočítání ohniskové vzdálenosti jako funkce h je vyjádření f' , protože podle Pythagorovy věty platí vztah $f = \sqrt{f'^2 - h^2}$. Úhel β můžeme vyjádřit jako rozdíl dvou úhlů, proto můžeme spočítat jeho sinus pomocí součtového vzorce pro sinus z rovnice (8):

$$\begin{aligned} \frac{h}{f'} &= \sin \varphi_4 \cos \alpha - \cos \varphi_4 \sin \alpha \\ \frac{h}{f'} &= n \sin \varphi_3 \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_2^2}} - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi_3} \frac{h}{R_2} \\ f' &= \frac{1}{n \frac{\sin \varphi_3}{h} \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_2^2}} - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi_3} \frac{1}{R_2}} \end{aligned} \quad (20)$$

$$(21)$$

Nyní potřebujeme vyjádřit sinus úhlu φ_3 opět pomocí součtového vzorce pro sinus z rovnice (9).

$$\begin{aligned} \sin \varphi_3 &= \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \\ \sin \varphi_3 &= \frac{h}{R_2} \cos \gamma + \sin \gamma \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_2^2}} \end{aligned} \quad (22)$$

K dosazení do této rovnice potřebujeme ještě spočítat sinus úhlu γ , který zjistíme pomocí součtového vzorce z rovnice (7).

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \gamma &= \frac{h}{R_1} \sqrt{1 - \frac{h^2}{n^2 R_1^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_1^2}} \frac{h}{n R_1} \end{aligned} \quad (23)$$

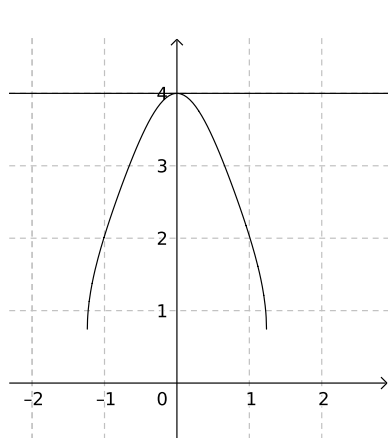
Nyní už můžeme vyjádřit ohniskovou vzdálenost f jako funkci h . Vzhledem k tomu, že všechny rovnice (20), (22) a (23) jsou poměrně složité, nebudeme pro přehlednost dosazovat.

$$f = \sqrt{\left(\frac{1}{n \frac{\sin \varphi_3}{h} \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_2^2}} - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi_3} \frac{1}{R_2}}\right)^2 - h^2}$$

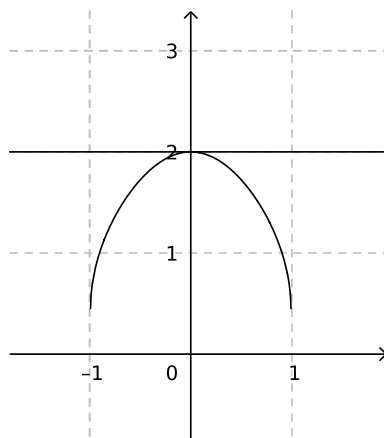
$$\sin \varphi_3 = \frac{h}{R_2} \cos \gamma + \sin \gamma \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_2^2}}$$

$$\sin \gamma = \frac{h}{R_1} \sqrt{1 - \frac{h^2}{n^2 R_1^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_1^2} \frac{h}{n R_1}}$$

Tato funkce se pro kladné hodnoty poloměrů R_1 a R_2 , tedy pro spojnou čočku, chová stále podobně, viz grafy závislosti ohniskové vzdálenosti na vzdálenosti od optické osy (vodorovná čára ukazuje výsledek v paraxiální aproximaci), obrázky 8a, 8b. Na druhou stranu u záporných poloměrů, tedy u rozptylky, je závislost komplikovanější a silně závisí na volbě počátečních parametrů, viz obrázky 9a a 9b.

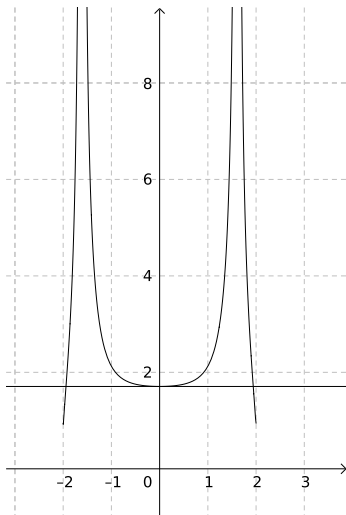
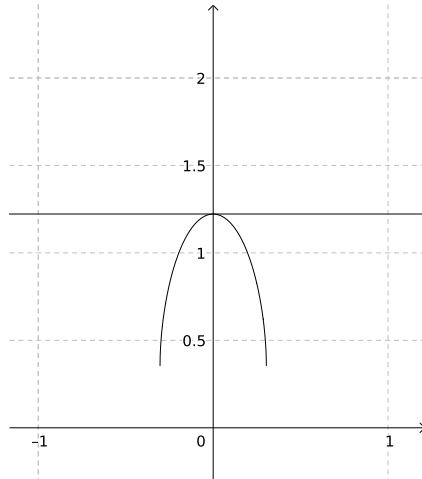


(a) $R_1 = R_2 = 2,4$ a $n = 1,3$



(b) $R_1 = R_2 = 2,4$ a $n = 1,6$

Obrázek 8: Závislost ohniskové vzdálenosti na vzdálenosti paprsku od optické osy

(a) $R_1 = R_2 = -2,1$ a $n = 1,6$ (b) $R_1 = -4,4$, $R_2 = -0,4$ a $n = 1,3$ **Obrázek 9:** Závislost ohniskové vzdálenosti na vzdálenosti paprsku od optické osy

Ověření limity

Nakonec, stejně jako v předchozím případě, ověříme, že pro h jdoucí k nule přechází výraz do vzorců platných v paraxiální aproximaci.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \sqrt{\left(\frac{1}{n \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi_3}{h} \right) \sqrt{1 - \frac{0^2}{R_2^2}} - \sqrt{1 - n^2 \lim_{h \rightarrow 0} (\sin^2 \varphi_3) \frac{1}{R_2}}} \right)^2 - 0^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \frac{1}{n \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi_3}{h} \right) - \sqrt{1 - n^2 \lim_{h \rightarrow 0} (\sin^2 \varphi_3) \frac{1}{R_2}}}$$

Musíme tedy vypočítat vnitřní limity:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi_3}{h} = \frac{1}{R_2} \lim_{h \rightarrow 0} (\cos \gamma) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \gamma}{h} \right) \sqrt{1 - \frac{0^2}{R_2^2}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi_3}{h} = \frac{1}{R_2} \lim_{h \rightarrow 0} (\cos \gamma) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \gamma}{h} \right)$$

Limitu $\sin^2 \varphi_3$ spočítáme vynásobením výsledku h^2 , což je 0, tedy bude platit i

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin^2 \varphi_3 = 0$$

Opět dopočítáme vnitřní limity:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \gamma}{h} = \frac{1}{R_1} \sqrt{1 - \frac{0^2}{n^2 R_1^2}} - \sqrt{1 - \frac{0^2}{R_1^2}} \frac{1}{n R_1}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \gamma}{h} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{n R_1}$$

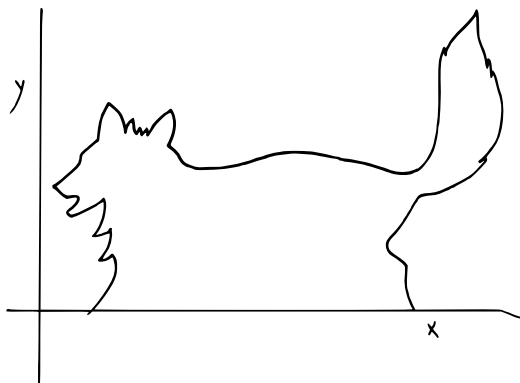
Limita cosinu úhlu γ by se spočítala pomocí limity sinu jako $\lim_{h \rightarrow 0} \cos \gamma = \sqrt{1 - \lim_{h \rightarrow 0} \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - 0} = 1$. Nyní můžeme již zpětně dosadit a zjistit výsledek:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi_3}{h} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{n R_1}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \frac{1}{n \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{n R_1} \right) - \sqrt{1 - n^2 0} \frac{1}{R_2}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \frac{1}{(n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

Po použití limity jsme dostali výsledek stejný jako při výpočtu v paraxiální aproximaci, tedy paraxiální aproximace je pro paprsky blízké ose platná.



Téma 3 – Mafie jako výpočetní model

K tomuto tématku přišel jediný příspěvek, a to od Dr.^{MM} Jonáše Havelky. Ve svém článku navrhnul najít na grafu mafiánů kostru. Pomocí toho se mu podařilo alespoň z části spočítat mafiány, omezit přímou komunikaci mezi nimi při zachování doručitelnosti dopisů a spočítat, jak dlouho trvá rozeslat zprávu všem ostatním mafiánům. Ostatní problémy zůstaly nevyřešené.

Téma 4 – Odmocniny

V průběhu roku jsme chtěli řešit funkce odpovídající odmocnině pro jiné matematické operace než je násobení. Na začátku jsme zadali jako příklad skládání permutací. Chtěli jsme vědět, zda je možné pro každou permutaci p najít jinou permutaci q , která po složení sama se sebou dá p , tj. $q \circ q = p$. Bc.^{MM} Martin Zimen ve svém článku začal vyřešením otázky, které permutace jsou odmocninou identity. Dospěl k závěru, že jsou to všechny permutace s cykly řádu nejvýše 2. Martin též vyřešil, za jakých podmínek existuje odmocnina pro libovolnou permutaci a jak ji nalézt.



Kolik je permutací s cykly řádu nejvýše 2, zůstalo jako otevřený problém, který vyřešil Mgr.^{MM} Radek Olšák ve svém krátkém příspěvku. Radek i Martin došli k tomu, že to je stejné jako počet párování na n vrcholech, Radek pak pokračuje následujícím výpočtem: „Pro pevný počet párů k je počet takových párování $\frac{n!}{2^k \cdot k! \cdot (n-2k)!}$. Protože nejdříve vezmeme všechny permutace n prvků, pak to podělíme 2^k , čímž se zbavíme závislosti na pořadí prvků v párech. Dále vydělíme výsledek $k!$, čímž se zbavíme závislosti na pořadí párů a nakonec ještě $(n-2k)!$, čímž se zbavíme závislosti na pořadí prvků, které nejsou popárované. Tohle sečteme přes všechny možné počty párů k (což je od 1 do $\lfloor n/2 \rfloor$) a dostaneme n -tý prvek posloupnosti.

A pokud by vás zajímalo, co všechno o této posloupnosti svět ví, tak je to posloupnost A000085¹ na OEIS.“

Já k tomu už jen doplním (pro ty, co se nechystají pročítat zmíněnou stránku OEIS), že tato posloupnost je známá také jako telefonní² či involuční čísla. Telefonní proto, že udávají počet způsobů, jak (ne)propojit telefonní síť, když každý telefon může být spojený pouze s jedním dalším. Zároveň však tato čísla udávají počet permutací, které jsou involuce, tedy takové permutace, které jsou samy sobě inverzní. Involuce je totiž zobrazení, které když aplikujeme dvakrát po sobě, tak dostaneme identitu, neboli takové f , že $f(f(x)) = x$ pro všechna x z definičního oboru. Právě involuce jsou pěkným příkladem odmocniny pro různé identity (tedy nejen pro tu na permutacích). Doporučuji se podívat na anglickou wikipedii na stránku věnovanou involuci³, najdete tam mnoho pěkných příkladů funkcí, které mají takovou vlastnost.

Pěkný začátek školního roku přeje

Anet

¹<https://oeis.org/search?q=A000085>

²[https://en.wikipedia.org/wiki/Telephone_number_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Telephone_number_(mathematics))

³[https://en.wikipedia.org/wiki/Involution_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Involution_(mathematics))

Téma 5 – Dají se přeprogramovat živé organismy?

S koncem ročníku se uzavírá i téma o genetickém inženýrství. Jeho cílem bylo přiblížit obor trochu mimo hlavní zaměření semináře, který s ním ale může mít některé společné body. K tématu přišlo nové řešení od Dr.^{MM} Jonáše Havelky, který se zabýval shrnutím metod, jak vpravit cílovou DNA do různých typů buněk přes fyzické bariéry a jak navíc zacílit na konkrétní místo v genomu. Článek poskytuje pěkný vstup do problému a doporučuji ho k nahlédnutí.

Mimo to téma obsahovalo i některé praktičtější problémy a samotnou práci se sekvencemi. Programátorsky zaměření řešitelé se mohli podívat na některé volně dostupné programy a zhodnotit, v čem by se daly vylepšit (ať už vyložené konkrétní funkcí nebo teoretickými úvahami o tom, jaké funkce navíc by byly užitečné). Co se samotného bioinženýrského designu týče, dalo by se třeba navázat na otázky o CRISPR/Cas systému (který zmiňuje i Jonáš teoreticky). Přestože je metoda vcelku nová, má takový dopad, že během chvíle vznikl například program CRISPOR, který nám pomáhá najít správné cíle pro náš CRISPR systém – v praxi totiž nemáme úplně neomezenou volnost. Na závěr tématu zde nastíním, jak by třeba mohlo vypadat takové řešení:

Hypotetické praktičtější řešení by se mohlo zaměřit na online nástroj CRISPOR a nejdříve prostudovat dostupné funkce a manuál. Řešitel by pak pomocí nějakého genomového nástroje, třeba na NCBI, našel gen nebo jeho regulační sekvenci (třeba promotor), který chce změnit. Příkladem může být třeba promotor jednoho genu na rajčeti (nebo jiném organismu), pomocí kterého budeme regulovat produkci genu. Řešitel si najde sekvenci a vloží do CRISPORu. Vybere ze seznamu, že chce cílit na rajče, a kterou variantu Cas chce použít. Řešitel by komentoval svůj výběr Cas proteinu. Například nejznámější Cas9 umí cílit jenom na sekvence, za kterými těsně následuje NGG (přičemž N znamená jakákoliv báze a GG jsou dva guaniny), to je takzvaná PAM sekvence. Rozstřížení sekvence se pak stane 2-3 nukleotidy před tímto místem. Jiné Cas proteiny ale mohou cílit jinde nebo třeba stříhat jen jeden řetězec ze dvou (kombinací dvou takových CRISPRů se dá mnohem přesněji zacílit na konkrétní místo). Některé modifikace ani neštípou DNA, jak diskutuje Jonáš. Výsledek CRISPORu je jedna velká (celkem přehledná) tabulka. Na začátku nám ukáže, kde všude nalezl NGG sekvence a jaké CRISPRy by nám k nim pasovaly. V tabulce pak komentuje, jestli jsou sekvencí nějaké potenciální problémy. Například jestli je možné použít tuto sekvenci s různými často používanými promotory jako pU6 (i CRISPR musí mít nějakou regulaci, aby vůbec vznikl, je to přece RNA, která vzniká z DNA). Zásadní je také specifita našeho CRISPRu. Nástroj nám ukáže skóre a doporučí, abychom nebrali skóre menší než určitá hodnota. Také nám ukáže všechna další místa v genomu mimo naši sekvenci, na která bychom mohli omylem (nebo v kuriózních případech dokonce záměrně) zacílit, a zhodnotí, jak moc je tento omyl pravděpodobný (má na to dvě různá měření, o kterých se píše více v manuálu). Zabývá se jenom sekvencemi, které mají maximálně 4 jiné nukleotidy (ostatní „off-targets“ nám už pravděpodobně nehrozí). Řešitel by si tedy ze seznamu vybral

několik CRISPRů, které cílí na jeho vyhlédnuté místo (třeba zrovna u promotorů úplně přesně nevíme, jak je chceme změnit a kde, prostě jenom chceme dosáhnout změn na tomhle úseku a snad vyrobíme pro naše účely užitečnější promotor, například silnější). Takže by si třeba vybral několik CRISPRů pokrývajících rovnoměrně celý úsek, které nebudou cílit dost přesně nikam jinam v genomu. Pak by se dalo dál diskutovat o tom, odkud objednat samotné DNA, jak na něj „nalepit“ regulační sekvence a poskládat dohromady (třeba pomocí Golden Braid) do jedné jednotky (společně s naším Cas proteinem a třeba fluorescenčním proteinem, abychom naše modifikovaná semínka poznali) a dostat do rajčete. I jen malá část popsané navrhovací bioinformatické fáze by mohla být kompletním řešením, vysoce hodnoceným za navržení problému, jeho rozebrání a zvládnutí.

Budu ráda za komentáře, proč vás konkrétně třeba téma nezaujalo, jestli bylo příliš mimo téma semináře nebo moc těžké.

Lucka



Do buňky a ještě dál pro život++ (5,2b)

Dr.^{MM} Jonáš Havelka

Lidé se už od pradávna zabývali genetickou modifikací, když vybírali rostliny, které lépe vydržely a křížili je mezi sebou. Tato metoda je velmi obtížná, jelikož ji lze provádět jen mezigenačně a nemáme jistotu, zda se vůbec geny přenesou. Navíc u lidí je z etického hlediska naprosto nemyslitelná a navíc stejně musíme nějak modifikované geny do předka dostat. Proto musíme umět gen dostat přímo do již žijící buňky.

Abychom se dostali do buňky, potřebujeme překonat dva problémy. Tím prvním je bariéra jako membrány a stěny (první část), tím druhým pak správné umístění (viz druhá část).

Do buňky

Když se řekne překonej nějakou bariéru, lidem se často vybaví nějak ji obejít, přeskochit. . . , ale smůla, buňka je bariérou obalena celá, tudíž chceme skrz. Při takovém slovu už nabíhají myšlenky na něco destruktivnějšího, například propíchnout,

prořezat se, či prostřelit. A skutečně i takové metody fungují, nejintuitivnější jsou asi „skleněné mikrokapilární injekční pipety“ (mikroinjekce), kterými se přímo do buněk vpraví DNA. Ty se ale nedostanou přes buněčnou stěnu, proto se nejčastěji využívají u živočišných buněk. K řezání, třeba i přes buněčnou stěnu, je asi nejpodobnější metoda silikon karbidových vláken (mikrovlákna z uhlíku a křemíku). Tzv. gene gun, neboli genová pistole, je pak zástupcem střelby, kdy je na mikrozmíčka kovů (často zlatých) nanesen gen a urychlením je pak přímo vystřelen do buňky. Takové destruktivní zacházení s buňkami (jako injekce, řezání a rozstřílení) vede samosebou k velkému poškození buněk, které jsou pak již neschopné regenerace. Zároveň je úspěšnost nízká, např. u gene gun „jen“ 10%.

Potřebujeme se dostat do buňky nějakým jemnějším způsobem. U bakterií, základních organismů, a poté i rostlin, kde se nejčastěji gen. modifikace provádí, nám v tom zabraňují hned dvě zásadní překážky, buněčná stěna a membrána. Buněčnou stěnou se prokousáme relativně snadno, třeba za pomoci vápenatých kationtů (Ca^{2+}), například chloridu vápenatého (CaCl_2). Na membránu lze jít také s pomocí chemie (např.: polyethylenglykol, polyaminy, lipidy), ale častěji je to pomocí tepelného šoku, který je ideální pro vkládání plasmidů (DNA bakterií, která není součástí „hlavní“ DNA). Takto lze donutit bakterii vyrábět některé látky, které se uměle nedají napodobit, obvykle hormony jako např. inzulin. Další možností narušení je pak elektrický šok, který vytvoří v membráně póry, kterými DNA vnikne dovnitř. Póry se rychle zacelí a buňka může dál fungovat s přidanou DNA.

Poslední a v podstatě nejlepší, avšak často obtížnou, možností je využít přístroje již přírodou vytvořené, tedy bakterie a viry. Z virů se využívají třeba bakteriofágové, kteří jsou přímo stavěni na napadání bakterií, a proto se využívají pro přenos již vloženého genu mezi bakteriemi. Některé bakterie jsou taktéž uzpůsobeny napadání buněk, například *Agrobacterium* způsobují v rostlinách nádory. Už z toho vědci jednoduše odvodili, že umí manipulovat s geny. Tato bakterie je zaměřená na rostliny, za to však umí vložit gen s větší než 30% šancí...

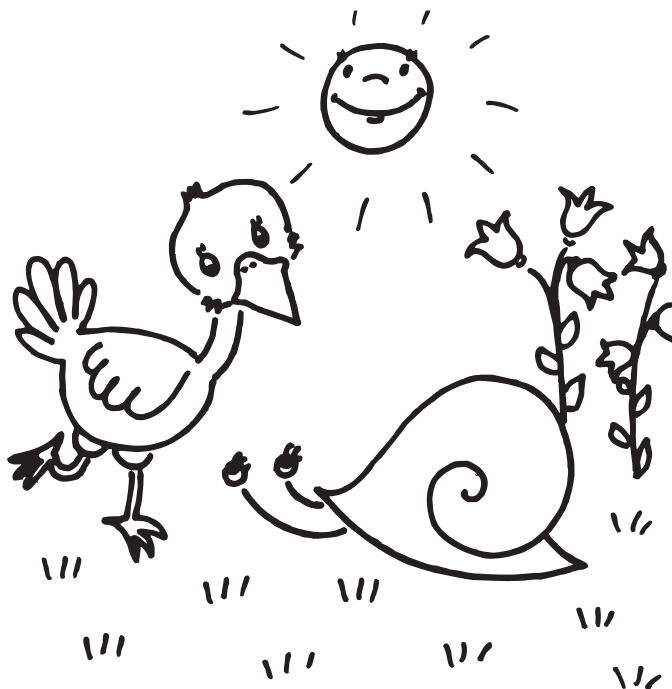
A ještě dál

Jak již bylo zmíněno dalším problémem je jak DNA do genomu správně umístit. Nejstarším relativně přesným způsobem je metoda ZFN (Zinc Finger Nucleases), jež je pojmenována podle „zinkových prstů“, což jsou proteiny ve tvaru prstu, jež mají v sobě navázaný zinek. Tím pádem se dobře váží na DNA a RNA, tedy je můžeme použít jako naváděcí médium. Seřadí se za sebou v požadované sekvenci a na konec se připojí proteiny, které DNA roztrhnou v daném místě na dvě vlákna (ZFN leží v tu chvíli z obou stran DNA). Nevýhoda je avšak ta, že tyto proteiny často dosednou i na sekvenci, kterou nehledáme, tudíž je to velmi nepřesné.

Další možnou variantou je použít jiných proteinů s podobnými vlastnostmi: TALEN (Transcription Activator-Like Effector Nucleases), která pracuje téměř stejně jako ZFN, akorát používá jiné a přesnější proteiny. V dnešní době má převahu dokonce i nad lepší metodou CRISPR (viz dále), jelikož je mnohem více

ozkoušená⁴. Jelikož to nejsou žádné jedovaté látky, tak ji navíc lze použít téměř na všem, od bakterií, přes rostliny, myši, až po člověka.

Dnes asi nejlepším způsobem orientace na genu je CRISPR metoda (nazvána podle části DNA „Clustered Regularly Interspaced Short Palindromic Repeats“ v bakteriích), kde se používá proteinu CAS-9 (CRISPR associated protein 9), který má původně na práci přerušení škodlivého genomu viru v bakterii podle naváděcí RNA, kterou má u sebe. Tu mu můžeme vyměnit a měnit tak sekvenci, po které CAS gen rozstříhne a určit tak přímo pozici. Už to je užitečné, ale kromě toho pomocí tohoto proteinu modifikovaného o další řetězce můžeme dělat všechno možné, jako třeba světelně označovat výskyty nějaké sekvence, zapínat a vypínat geny upravením sekvencí, přepisovat DNA do RNA, nebo naopak tomuto předpisu bránit. Velký význam má tento nástroj například pro léčbu rakoviny, jelikož když se CRISPR/Cas9 naučí rozpoznat rakovinotvorné DNA, můžeme zničit buňky rakoviny, ale ostatní nechat být.



⁴Poznámka vedoucího tématka: Je možné, že tato informace bude už mírně zastaralá, jelikož TALEN už se zřídka vyskytují i v bakalářských přenáškách, zatímco CRISPR je v poslední době moderní ve velké většině laboratoří z oboru, zejména díky velmi snadnému a nenákladnému použití a adaptaci na nové cíle.

Pro život++

Genetické modifikace jsou sice složité, avšak v poslední době se stávají dostupnějšími a dostupnějšími, tedy například plodiny lze už docela dobře chránit před škůdci tím, že je naučíme vyrábět si jed. Největší využití ale najdou nejspíše ve zdravotnictví, kde snad časem budou likvidovat i nejhorší nemoci.

Naše technologie jsou ale zatím dosti omezené, jelikož modifikace proběhne jen s určitou pravděpodobností a rozhodně si nemůžeme být jisti, jestli udělá přesně to, co chceme⁵. Věci jako oprava rakovinové buňky jsou možná dost blízko, ale například na úpravu celého těla nemůžeme ani pomýšlet, protože bychom museli provést úpravu už v embryonálním stavu a u toho zatím ani nejsme schopni rozeznat, co jaká část DNA dělá. . .

Při genetické modifikaci se musíme dostat do buňky, na což existují způsoby od hrubé síly až po samotnou přírodu, která tyto mechanismy už vytvořila. Poté správně umístíme gen pomocí látek, které rozpoznají určité sekvence a nakonec modifikujeme. Avšak zatím nemáme tak vyspělé technologie, abychom mohli napáchat nějakou globální škodu, tedy proč nejít do laboratoře a rovnou nezačít modifikovat? Hodně štěstí. . .

Zdroje

http://www.molbio.upol.cz/stranky/vyuka_new/BAM/09_Geneticke_transformace_obilovin.pdf
<https://cs.wikipedia.org/wiki/Elektroporace>
<https://cs.wikipedia.org/wiki/Plazmid>
https://www.wikiskripta.eu/w/Genetick%C3%A9_modifikace
<https://biogen.cz/transfekce>
https://cs.wikipedia.org/wiki/Agrobacterium_tumefaciens
<https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2015/05/crispr-presna-strelba-geneticke-cile.html>
<https://biogen.cz/crispr-technologie>
https://en.wikipedia.org/wiki/Transcription_activator-like_effector_nuclease
https://is.muni.cz/el/1431/jaro2017/Bi8090/Editace_genomu_2017.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/TAL_effector
<https://en.wikipedia.org/wiki/CRISPR>
https://cs.wikipedia.org/wiki/Zinkov%C3%BD_prst
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5316914/>

⁵Poznámka vedoucího tématka: Ale můžeme výsledek velmi dobře zkontrolovat.

Řešení úloh 6. série

Úloha 6.1 – Dvojhvězda Sirius

(4b)

Zadání:

Hvězdy Sirius A o hmotnosti 2,3násobku hmotnosti Slunce a Sirius B o neznámé hmotnosti tvoří dvojhvězdu. Předpokládáme, že se obě hvězdy pohybují po kružnicích okolo společného těžiště. Z dvojhvězdy bychom pozorovali vzdálenost Země–Slunce pod úhlem $0,376''$ (úhlové vteřiny). Sirius A je pozorovatelný pouhým okem jako jedna z nejjasnějších hvězd. Každoroční měření při stejné poloze Slunce–Země–Sirius ukazují, že Sirius A kmitá kolem své střední polohy na noční obloze s periodou 50 let a maximální výchylkou $2,3''$. Jakou hmotnost má hvězda Sirius B?



Řešení:

První otázkou, na kterou je třeba odpovědět, je otázka vzdálenosti dvojhvězdy Sirius a sluneční soustavy. Pozorujeme-li vzdálenost Slunce od Země pod úhlem $\alpha = 0,376''$, potom můžeme uvážit jednoduchý pravoúhlý trojúhelník ZST , kde Z je Země, S je Slunce a T je těžiště dvojhvězdy. Tento trojúhelník svírá úhel α u vrcholu T . Víme, že $|ZS| = 1$ AU (astronomická jednotka), a proto vzdálenost $|TZ| = \cotg \alpha \cdot |ZS| \doteq 549000$ AU.

Se známou vzdáleností můžeme sestavit obdobný trojúhelník ZAT , kde A je Sirius A. Vzdálenost $|ZA|$ již známe a dle zadání víme, že úhel $\beta = 2,3''$ je svírán u vrcholu Z . Proto platí $|AT| = \tg \beta \cdot |TZ| = \tg \beta \cotg \alpha \cdot |ZS| \doteq 6,12$ AU = r_A .

Dále známe periodu oběhu $T = 50$ let. Nyní už se můžeme pustit do skládání pohybových rovnic. Označíme vzdálenost Siria B od těžiště dvojhvězdy r_B a $r_A + r_B = r$. Pro pohyb po kružnici okolo těžiště platí, že dostředivá síla je rovna

přitažlivé gravitační síle mezi hvězdami. Tato rovnost platí pro každou z hvězd. Můžeme tedy napsat dvě rovnice

$$m_A \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_A = G \frac{m_A m_B}{r^2},$$

$$m_B \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_B = G \frac{m_A m_B}{r^2}.$$

Pouhým podělením těchto rovnic dostaneme vztah $m_A/m_B = r_B/r_A$. Z toho je možné získat i celkovou vzdálenost mezi hvězdami jako

$$r = r_A + r_B = r_A(1 + m_A/m_B) = r_B(1 + m_B/m_A).$$

Tedy $r_A = r m_B / (m_A + m_B)$. Po dosazení r_A do první rovnice je vidět, že

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = G \frac{m_A + m_B}{r^3}.$$

Nyní známe vzdálenost mezi hvězdami:

$$(r_A + r_A m_A / m_B)^3 = r^3 = G \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 (m_A + m_B).$$

Chceme-li vyřešit pro m_B , dostaneme kubickou rovnici

$$(m_A + m_B)^2 = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \frac{G}{r^3} m_B^3 = C m_B^3$$

pro hodnoty $m_A = 2.3 M_\odot$ (hmotnosti Slunce) a $C \doteq 10,9 M_\odot^{-1}$. Tu můžeme vy počíst numericky za pomoci programů jako je Wolfram alpha. Výsledná hmotnost je $m_B = 0,999 M_\odot$. Sirius B je tedy přibližně stejně hmotný jako naše Slunce.

Ondra

Úloha 6.2 – Hamiltonovská úloha (4b)

Zadání:

Mějme kouzelnou krabičku, která umí pro libovolný graf s n vrcholy v čase $\mathcal{O}(n^7)$ rozhodnout, jaký nejmenší počet listů může mít jeho kostra (a pokud graf není souvislý, ohlásí nekonečno). Navrhněte algoritmus, který určí, zda v zadaném grafu existuje hamiltonovská kružnice. Během řešení smíte využívat kouzelnou krabičku. Snažte se najít co nejrychlejší algoritmus (v nejhorším případě).

Hamiltonovská kružnice je kružnice na všech vrcholech grafu, která je podgrafem zadaného grafu. Jinými slovy hledáme posloupnost (permutaci) všech vrcholů grafu takovou, že mezi každými dvěma po sobě jdoucími vrcholy existuje hrana a navíc existuje hrana mezi posledním a prvním vrcholem dané posloupnosti.

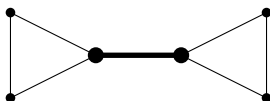
Řešení:

Pokud v grafu⁶ existuje Hamiltonovská kružnice, tak existuje kostra se dvěma listy – stačí z oné kružnice odebrat libovolnou hranu. Grafy známé jako cesty nám ale ukazují, že to není postačující podmínka.



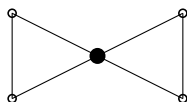
Obrázek 10: Cesta na čtyřech vrcholech (P_4)

Dobrý další krok je zkusit z grafu odebírat hrany. Pokud existuje hrana, jejímž odstraněním se graf rozpadne na dvě komponenty souvislosti, tak graf zjevně nemůže mít Hamiltonovskou kružnici, protože bychom nutně potřebovali přes tuto hranu přejít dvakrát. V teorii grafů se taková hrana označuje jako most.



Obrázek 11: Most v grafu

Podobně můžeme zkusit odstraňovat i vrcholy, čímž detekujeme takzvané artikulace. Existence artikulace také vylučuje existenci Hamiltonovské kružnice a jedná se o silnější podmínku. (Každý graf s mostem má artikulaci, ne všechny grafy s artikulací mají most.)



Obrázek 12: Graf s artikulací

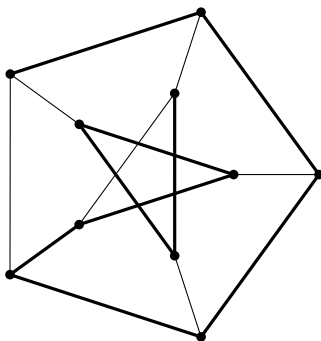
Bohužel, ani nepřítomnost artikulace nezaručuje, že graf má Hamiltonovskou kružnici. Petersenův graf je často protipříkladem pro různá tvrzení. Všimněte si, že má kostru se dvěma listy a že neobsahuje most.

Také neobsahuje artikulace a po odstranění kteréhokoliv vrcholu má pořád kostru se dvěma listy. Navzdory tomu ale neobsahuje Hamiltonovskou kružnici.

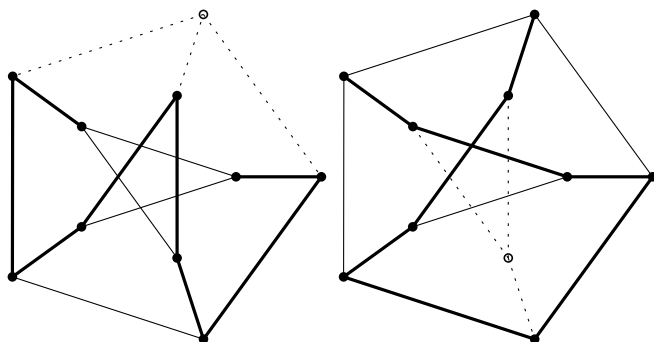
Všimněme si, že bychom potřebovali zajistit, aby ty dva listy naší kostry vzájemně sousedily. Pokud tomu tak bude, tak je následně můžeme spojit a získat kružnici. Toho můžeme docílit tak, že odstraníme hranu a na oba její krajní vrcholy přidáme listy.

Ještě musíme uvážit to, že tento postup funguje pouze pokud vybereme hranu, která na nějaké Hamiltonovské kružnici leží. K tomu nám ale stačí jen zkusit

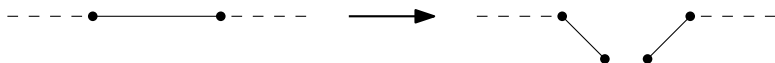
⁶Nevíte-li, čím se zabývá teorie grafů, doporučujeme si přečíst článek v KSPí kuchařce na <https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/grafy/>



Obrázek 13: Petersenův graf se zvýrazněnou kostrou



Obrázek 14: I po odebrání vrcholu má Petersenův graf kostru se dvěma listy



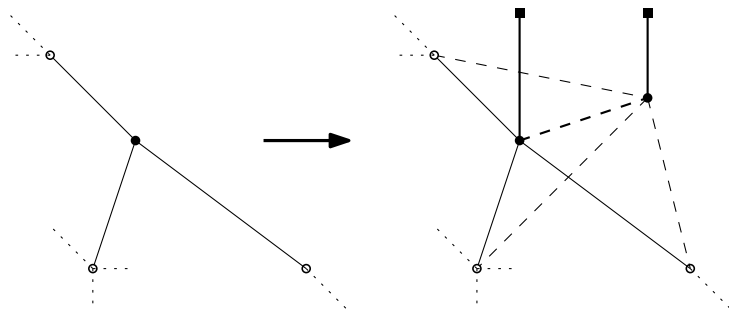
Obrázek 15: Nahrazení hrany dvěma listy

všechny hrany vedoucí z libovolného vrcholu. Dokonce můžeme jednu hranu vynechat. Pro většinu grafů si pak ještě můžeme pomoci výběrem vrcholu s nejnižším počtem hran, ale v nejhorším případě budeme krabičku používat řádově n -krát, tedy celkový čas⁷ bude $\mathcal{O}(n^8)$. Pokud alespoň jednu hranu můžeme nahradit popsáním způsobem tak, že existuje kostra se dvěma listy, tak graf má Hamiltonovskou kružnici.

Lze to však udělat i rychleji! Když nás napadne správný trik, dá se celá úloha vyřešit na jedno jediné použití kouzelné krabičky, čímž dosáhneme časové složitosti $\mathcal{O}(n^7)$. Trik spočívá v tom, že zdvojíme libovolný vrchol (včetně hran z něj vedou-

⁷Pokud vás zajímá složitost algoritmů, doporučujeme kuchařku od našich kamarádů z KSP: <https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/slozitost/>

cích) a z obou kopií tohoto vrcholu uděláme ještě po jednom „tykadle nahoru“ (přilepíme ke každému jeden nový list). Rozmyslete si, že nový graf má kostru o 2 listech právě tehdy, když původní graf má Hamiltonovskou kružnici.



Obrázek 16: Zdvojení vrcholu a přidání tykadel

Pro zajímavost: Kostra se dvěma listy se označuje jako Hamiltonovská cesta. Na rozdíl od hledání Eulerovských tahů (které jsou permutacemi hran, ne vrcholů) je nalezení Hamiltonovské cesty nebo kružnice NP-úplný (tedy pro počítače nejspíše neprakticky těžký) problém. I proto je naše krabička magická. :-)

Matej

Úloha 6.3 – Kristý peče (3b)

Zadání:

Kristý peče velikonoční cukroví. Protože ho nechce upéct moc, peče od každého druhu maximálně jeden plech.

Teď právě peče linceká slepovaná kolečka taková, že v horním dílku je vykrojená hvězdička. Aby se jí to dobře dělalo, tak na plech vykrojí $n \times m$ dílků a z obvodových dílků navíc vykrojí hvězdičku.

Jaké má zvolit n a m tak, aby jí po slepení žádný kousek nezbyl?



Řešení:

Lze snadno vyvodit, že na pekáči $n \times m$ je $2n + 2m - 4$ obvodových dílků a $(n - 2)(m - 2)$ středových dílků. Zadání pak lze interpretovat jako rovnici:

$$2n + 2m - 4 = (n - 2)(m - 2)$$

Úpravou tohoto lze získat vztah mezi n a m :

$$n = 4 + \frac{8}{m - 4}$$

Kromě tohoto vztahu nám úloha klade jedinou podmínku, a to $n, m \in \mathbb{N}$. To jistě nemůže být splněno při $m > 12$. Všechny zbývající možnosti lze vyzkoušet jednu po druhé dosazováním $m = 1, \dots, 12$ do vztahu výše uvedeného. Tím odhalíme obě dvě možná řešení úlohy v podobě neuspořádaných dvojic přirozených čísel: $\{5, 12\}$ a $\{6, 8\}$.

Evžen

Úloha 6.4 – Hra o život (5b)

Zadání:

Kuba si vymyslel následující hru: začíná tak, že na nekonečnou čtvercovou mřížku rozmístí n prvků do nějakých n různých čtverečků. Nyní se hra vyvíjí podle následujících pravidel: v každém kole bude na pozici $[x, y]$ maximálně jeden prvek, a to právě tehdy, když v předchozím kole byli na pozicích $[x, y]$, $[x + 1, y]$, $[x, y + 1]$ alespoň dva prvoci. Kuba si všiml, že ať už prvoky na začátku rozmístí jakkoli, ze záhadných důvodů mu jeho prvočí populace vždy nakonec vymře.

a) *Dokažte, že každá prvočí populace vymře po nějakém konečném počtu kol. (3b)*

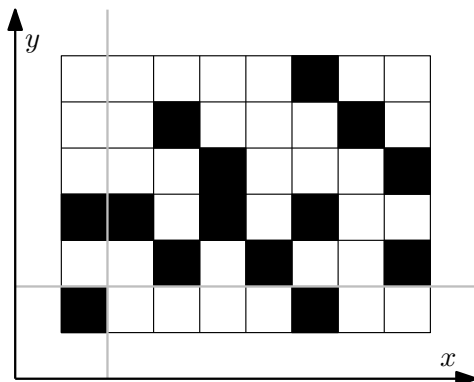
b) *Dokažte, že každá prvočí populace vymře po nejvýše n kolech. (2b)*

Příklad: Pokud Kuba rozmístí tři prvoky na souřadnice $[1, 2]$, $[2, 1]$ a $[2, 2]$, po prvním kole bude mít stále tři prvoky na souřadnicích $[1, 1]$, $[1, 2]$ a $[2, 1]$. V dalším kole bude žít jen jeden prvek na souřadnici $[1, 1]$ a ve třetím kole celá populace vymře.

Řešení:

Pro získání tří bodů stačilo následující pozorování: uvážíme-li nějaký obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné s osami čtvercové mřížky a který zároveň obsahuje všechny prvoky, celá prvočí populace bude po celou dobu své existence uzavřena v tomto obdélníku. To proto, že každý čtvereček mimo tento obdélník může mít nejvýše jednoho souseda uvnitř obdélníku a prvek na něm tedy nikdy nevznikne.

Na druhou stranu po prvním kroku zřejmě v pravém horním čtverečku takového obdélníku žádný prvek být nemůže; pravý a horní soused tohoto čtverečku



Obrázek 17: Indukční vyprazdňování obdélníka

jsou totiž mimo obdélník. Dále v následujícím kroku nemůže být prvek ani ve čtverečku nalevo od tohoto rohového čtverečku, neboť opět jeho pravý a horní sousední čtvereček jsou zaručeně prázdné. Opakováním této úvahy dostáváme, že je-li délka jednoho řádku velkého obdélníku M , po M krocích bude jeho horní řádka prázdná. Úvahu pak můžeme znovu postupně opakovat pro následující řádky a dostáváme, že je-li počet řádků N , po $M \cdot N$ krocích všichni prvoci vymřou. Tím je vyřešena první podúloha.

Délky stran velkého obdélníku vůbec nezávisí na počtu prvků, pro vyřešení druhé úlohy tento postup tedy nestačí. Podúlohu dokážeme matematickou indukcí podle počtu prvků n . Pro $n = 1$ tvrzení jistě platí.

Uvažme nyní opět obdélník, který na začátku obsahuje všechny prvoky, tentokrát ale uvažme ten nejmenší. Takový obdélník ve své dolní řádce jistě obsahuje alespoň jednoho prvoka (jinak by šel zmenšit), tedy ve zbytku obdélníku je nejvýše $n - 1$ prvků. Díky pravidlům hry nejsou zbylí prvoci nijak ovlivněni prvoky v první řádce a tudíž na ně můžeme aplikovat indukční předpoklad. Tím dostáváme, že po $n - 1$ krocích je celý obdélník kromě dolní řádky prázdný. Obdobnou úvahou ale dostaneme, že po $n - 1$ krocích je prázdný celý obdélník kromě prvního sloupečku. Jediné políčko, které tak po $n - 1$ krocích není nutně prázdné, je rohové políčko vlevo dole. Potenciální prvek na tomto políčku ale jistě umře v příštím, n -tém kole.

Na závěr si povšimněme, že existují konfigurace n prvků takové, že prvoci vymřou právě po n kolech – např. když jsou na začátku všichni prvoci za sebou na jedné řádce.

Poř.	Jméno	R.	\sum_{-1}	Úlohy						\sum_0	\sum_1
				r1	r2	r3	r4	t1	t4		
37.	K. Hloušková	2	4,5			1,0				1,0	4,5
38.	K. Tauchmanová	4	4,2							0	4,2
39.	A. Hollmannová	1	4,0							0	4,0
40.	J. Kaifer	2	3,8							0	3,8
41.	R. Líbal	2	3,5							0	3,5
42.	M. Kripner	3	3,2							0	3,2
43.–44.	B. Kopčák	2	3,0							0	3,0
	R. Wágner	4	3,0							0	3,0
45.	K. Kamenářová	3	2,7							0	2,7
46.	Š. Sulanová	2	2,5							0	2,5
47.–48.	K. Levíčková		2,0							0	2,0
	Bc. ^{MM} Z. Lüköová	3	15,1							0	2,0
49.	L. Urbanová	4	0,0							0	0

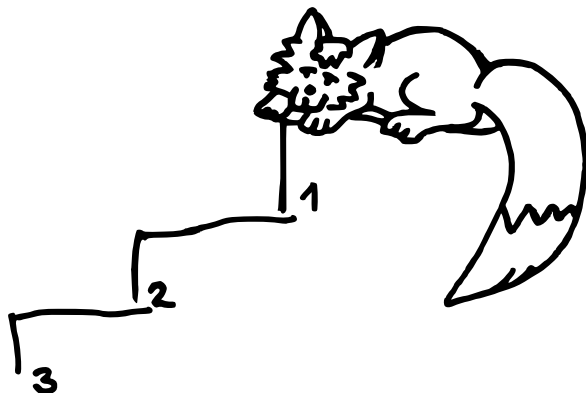
Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Výsledková listina 24. ročníku

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Číslo							Σ_1
				3	4	5	6	7	8		
1.	Doc. ^{MM} K. Rosická	3.	116,8	8,7	10,0	11,2	6,9	12,5	31,0	80,3	
2.	Dr. ^{MM} J. Havelka	2.	91,4	21,6	7,4	8,2	14,0	13,5	13,7	78,4	
3.	Dr. ^{MM} B. Hroncová	3.	75,2	5,9	2,0	10,2	7,0	8,3	3,0	36,4	
4.	Dr. ^{MM} K. Balej	3.	80,4	5,9	2,0	5,2	10,0	3,0	7,0	33,1	
5.	Mgr. ^{MM} R. Olšák	3.	48,4	5,1	8,0	5,0	5,0	0	3,5	26,6	
6.–7.	Mgr. ^{MM} M. Kalousková	2.	25,5	6,0	13,0	0,5	0	6,0	0	25,5	
	Mgr. ^{MM} E. Vítková	2.	25,5	8,0	0	0	8,0	0	9,5	25,5	
8.	Dr. ^{MM} O. Buček	4.	65,0	7,6	7,7	0	9,5	0	0	24,8	
9.	Dr. ^{MM} Z. Urbanová	4.	51,2	10,7	6,0	0	6,0	0	0	22,7	
10.	Dr. ^{MM} L. Kundratová	3.	60,7	5,5	3,0	0	6,0	3,5	0	18,0	
11.	Dr. ^{MM} K. Čížková	4.	50,0	10,5	5,0	1,9	0	0	0	17,4	
12.	Doc. ^{MM} A. Mlezivová	4.	121,4	5,2	0	7,7	3,0	0	0	15,9	
13.	Bc. ^{MM} M. Zimen	3.	14,0	0	0	0	6,0	8,0	0	14,0	
14.	Mgr. ^{MM} B. Požár	4.	44,6	7,7	0	0	6,0	0	0	13,7	
15.	Mgr. ^{MM} M. Holubička	2.	34,8	4,5	0,5	0,0	0,0	4,5	3,0	12,5	
16.	Bc. ^{MM} J. Ponc	4.	12,2	7,7	0	4,5	0	0	0	12,2	
17.	Bc. ^{MM} J. Löffelman	4.	11,1	11,1	0	0	0	0	0	11,1	
18.–19.	Mgr. ^{MM} M. Bukvaj	2.	24,0	11,0	0	0	0	0	0	11,0	
	Bc. ^{MM} F. Kmječ	2.	18,4	6,0	0	2,0	3,0	0	0	11,0	
20.	Mgr. ^{MM} J. Růžička	3.	32,7	7,5	0	0	3,0	0	0	10,5	
21.	Bc. ^{MM} M. Boček	Z8.	10,4	3,9	0	0	1,5	5,0	0	10,4	
22.	Mgr. ^{MM} J. Domes	3.	24,9	8,3	0	0	0	0	0	8,3	
23.	Mgr. ^{MM} O. Gonzor	1.	21,7	5,5	0	2,0	0	0	0	7,5	
24.	Mgr. ^{MM} J. Suchánek	4.	42,2	7,1	0	0	0	0	0	7,1	
25.	Dr. ^{MM} F. Čermák	4.	58,7	5,0	0	2,0	0	0	0	7,0	
26.	D. Saracino	4.	6,7	6,7	0	0	0	0	0	6,7	
27.	P. Trembulaková	4.	6,5	6,5	0	0	0	0	0	6,5	
28.	A. Trojanová	3.	6,0	6,0	0	0	0	0	0	6,0	
29.	A. Foglarová	3.	5,6	5,6	0	0	0	0	0	5,6	
30.–31.	Mgr. ^{MM} A. Neubauerová	4.	22,5	5,5	0	0	0	0	0	5,5	
	R. Strnadlová	4.	5,5	0	0	5,5	0	0	0	5,5	
32.	Bc. ^{MM} V. Procházka	4.	14,3	5,3	0	0	0	0	0	5,3	
33.	Dr. ^{MM} L. Vincenová	4.	50,5	5,0	0	0	0	0	0	5,0	
34.	M. Bučková	1.	4,9	1,9	3,0	0	0	0	0	4,9	
35.–36.	Mgr. ^{MM} L. Bujnovská	4.	22,9	4,8	0	0	0	0	0	4,8	
	Bc. ^{MM} T. Poláková	4.	11,1	4,8	0	0	0	0	0	4,8	

Poř.	Jméno	R.	Číslo							\sum_1
			\sum_{-1}	3	4	5	6	7	8	
37.	K. Hloušková	2.	4,5	0	0,9	1,1	0	1,5	1,0	4,5
38.	K. Tauchmanová	4.	4,2	3,5	0,7	0	0	0	0	4,2
39.	A. Hollmannová	1.	4,0	4,0	0	0	0	0	0	4,0
40.	J. Kaifer	2.	3,8	2,5	0	0	1,3	0	0	3,8
41.	R. Líbal	2.	3,5	0	0	0	0	3,5	0	3,5
42.	M. Kripner	3.	3,2	3,2	0	0	0	0	0	3,2
43.–44.	B. Kopčák	2.	3,0	0	0	0	0	3,0	0	3,0
	R. Wágner	4.	3,0	3,0	0	0	0	0	0	3,0
45.	K. Kamenářová	3.	2,7	0	0	0	0	2,7	0	2,7
46.	Š. Sulanová	2.	2,5	2,5	0	0	0	0	0	2,5
47.–48.	K. Levíčková		2,0	2,0	0	0	0	0	0	2,0
	Bc. ^{MM} Z. Lüköová	3.	15,1	0	2,0	0	0	0	0	2,0
49.	L. Urbanová	4.	0,0	0	0	0,0	0,0	0	0	0,0

Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 3.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M.

Kontakty:

M&M, OPMK, MFF UK E-mail: mam@matfyz.cz
 Ke Karlovu 3 Web: mam.matfyz.cz
 121 16 Praha 2 FB: [casopis.MaM](https://www.facebook.com/casopis.MaM)

