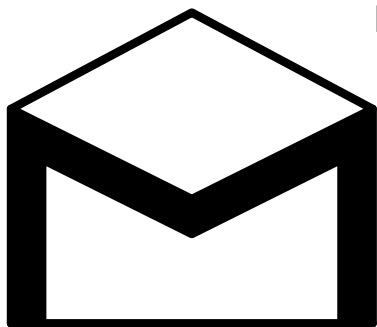


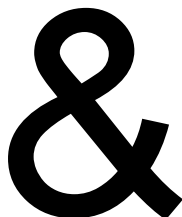
STUDENTSKÝ ČASOPIS A KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ

Ročník XXIV

Číslo 1



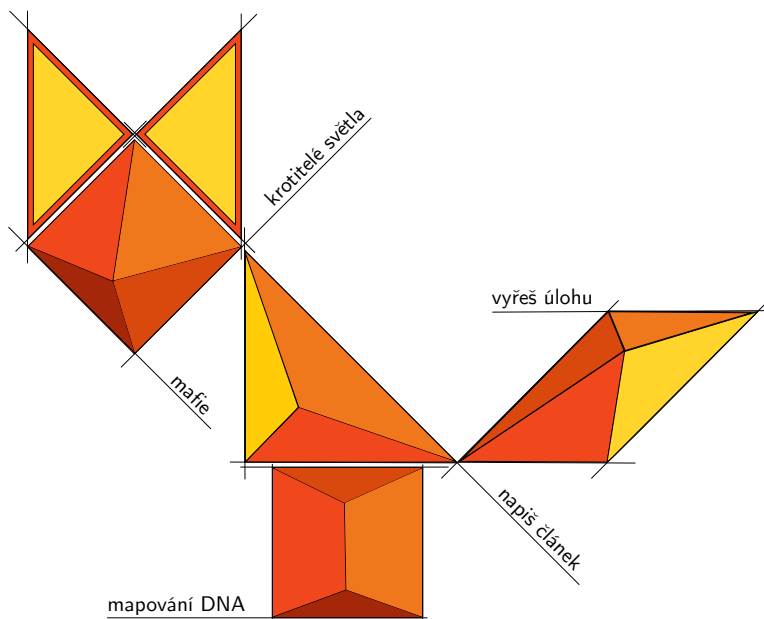
MATEMATIKA



FYZIKA



INFORMATIKA



Uvnitř najdete několik úloh a témat k zamyřlení. Vyřeřte je a pošlete nám je. My vám je opravíme a pošleme zpĕt s dalřím ěíslem, nejzajímavĕjší řeření otiskneme. Nejlepší řeřitele zveme na podzim a na jaře na soustřeření.

Právě čteš časopis M&M, časopis určený pro zvědavé středoškoláky. V jeho rámci se snažíme zábavnou formou prezentovat zajímavé úlohy z matematiky, z fyziky a z obecné i aplikované informatiky. Důraz přitom klademe na to, aby každý mohl o problémech sám uvažovat. A aby mohl poté společně s ostatními sdílet své závěry.

A proč je vlastně řešit? Doufáme, že tě baví přemýšlet. Nás totiž taky, a tak v M&Mku přinášíme zajímavé podněty ze života. Uvažovat o nich je zábava a přitom ti pomohou zdokonalit se v analytickém myšlení a ve formulování myšlenek. Navíc jsme multioboroví, takže si můžeš zkusit i úlohy z oboru, kterým se tak často nezabýváš.

Krom toho pro naše řešitele dvakrát do roka organizujeme soustředění – týden tak skvělý, že zde ani nejde popsat. Ostatně, podívej se na fotky ze soustředění na mam.matfyz.cz/soustredeni nebo se zeptej těch, kteří už na našem soustředění byli.

Jak tedy na to? Podívej se na naše úlohy a témátka a až něco vymyslíš, pošli nám to (na poslední stránce najdeš informace o tom jak). Všechny další důležité informace najdeš na mam.matfyz.cz/jak-resit.

Zadání úloh

Termín odeslání 1. série: 24. 10. 2017

(19. 9. 2017 pro účast na podzimním soustředění)

Jak řešit úlohy

V prvních šesti číslech uveřejňujeme samostatné úlohy. Tyto úlohy bývají trochu těžší než obvyklé školní, jejich řešení často vyžaduje buď hlubší zamyšlení nebo nějaký trik. Středoškolské znalosti by k jejich vyřešení ale měly stačit. Pokud některou z úloh vyřešíš, řešení sepiš tak, aby bylo jasné a pochopitelné, a pošli nám ho. My ho opravíme, okomentujeme a zašleme zpět. V některém z dalších čísel vždy uveřejníme vzorová řešení zadaných úloh.

U každé úlohy je uveden počet bodů za správné řešení. Přiměřenou část z těchto bodů lze získat i za neúplné řešení. A naopak za velmi zajímavé nebo elegantní řešení můžeš dostat i bodovou prémii.

Úloha 1.1 – Šestiúhelník (3b)

Existuje šestiúhelník takový, že všechny jeho vnitřní úhly jsou stejně velké a délky stran jsou 1, 2, 3, 4, 5, 6 (v libovolném pořadí)?

Úloha 1.2 – Modrá kulička (3b)

Určete, z jaké vzdálenosti by musela být pořízena fotografie Zeměkoule, aby vypadala tak, jak je naznačeno na Obrázku 1.

Nezapomeňte kromě samotné vzdálenosti také napsat, jak jste k výsledku dospěli, a zkuste odhadnout nepřesnost vaší metody.



Obrázek 1: Schématické znázornění fotografie Země.

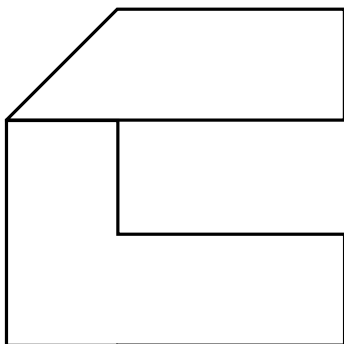
Úloha 1.3 – Přehnuté písmeno (2b)

Někdo vzal velké tiskací písmeno a jednou ho přehnul. Vznikl tak útvar z obrázku 2. Jaké písmeno to bylo, pokud to nebylo velké L?

Úloha 1.4 – Medián dvou množin (4b)

Z hromádky kartiček očíslovaných od 1 do 2^k jsem si vybral m kousků, můj kamarád si poté vylosoval svých n kousků. Chtěli bychom zjistit medián čísel¹ na všech našich kartičkách, ale nevíme, jaká čísla si vylosoval ten druhý. Jak máme postupovat, abychom si mezi sebou museli pro zjištění mediánu předat co nejméně bitů informace? Průběh výměny informací si dohodneme předem, tj. můžeme se například dohodnout, že nejdřív já pošlu své nejmenší číslo, pak kamarád pošle svoje nejmenší číslo atd.

¹Medián z čísel a_1, a_2, \dots, a_n je takové a_i , že skončí přesně uprostřed, pokud čísla seřadíme podle velikosti. Je-li n sudé, pak jsou „prostřední“ prvky dva a medián je jejich průměr. Tedy medián z čísel 1, 4, 2, 5, 1 je 2, medián z čísel 1, 4, 2, 5 je $(4 + 2)/2 = 3$.



Obrázek 2: Jaké písmeno to před ohnutím bylo?

Zadání témat

Jak řešit téma

Vyber si jeden z navrhovaných podproblémů, nebo si vymysli vlastní, který se tématu týká, a vymysli nějaké řešení – úplné či částečné, chatrné či úplně nejlepší. Pak ho hezky sepiš, aby mělo formu článku, připiš závěr a hotový článek nám pošli. Pro inspiraci se můžeš na našem webu podívat na řešení témat z minulých let.

Na příspěvky ostatních můžeš reagovat – rozvíjet je, nebo naopak bořit jejich představy. Proto se hodí poslat i částečná řešení, postřehy, nebo nápady na další podproblémy, které třeba nezvládneš vyřešit sám. Takovéto příspěvky dávají prostor ostatním a mohou je inspirovat.

Téma 1 – Krotitelé světla

Laser je přístroj, který dokáže vytvořit světelný svazek natolik koncentrovaný, že ho lze využít k mechanickým úkonům, např. řezání skla. My s ním sice v této úloze přímo pracovat nebudeme, pokusíme se však jeho vlastnostem přiblížit za pomoci nám dostupných jednodušších mechanismů – odrazu a lomu světla. Naším cílem bude ovládnout světlo a donutit ho vytvořit v prostoru oblast s výrazně vyšší intenzitou.

Nejjednodušším přístrojem, který má tuto schopnost, je optická čočka, která zalamuje rovnoběžné paprsky blízké optické ose do jediného bodu (ohniska). Je možné celý výkon koncentrovat v tomto bodě následně nasměrovat do libovolně tenkého paprsku? Jestliže ne, proč?

Je možné zařídit, aby bylo do ohniska lámáno víc paprsků? Navrhněte uspořádání (stačí ve 2D), při kterém je do ohniska, případně do jediného paprsku, koncentrováno co nejvíce světla z okolí. Můžete uvažovat rovnoměrné osvětlení, nebo naopak předpokládat, že světlo přichází primárně z jednoho konkrétního směru.

Nemusíte se při tom ani držet čočky, zkuste nalézt jiný předmět s podobnými vlastnostmi. Jaký tvar by musel mít povrch objektu, aby lámal do ohniska všechny rovnoběžné paprsky bez ohledu na jejich vzdálenost od optické osy? Popřípadě zkuste nalézt takový předmět, který v sobě udrží paprsek co nejdéle. Může existovat takový předmět, v němž by jednou vlétnuvší paprsek už zůstal?

K výpočtu dráhy každého paprsku využijte zákony odrazu a lomu, můžete uvažovat paraxiální aproximaci (tj. $\sin \alpha = \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ pro malé α), nebo se od ní naopak odchýlit a přemýšlet obecněji. Můžete využít i více různých materiálů s různými indexy lomu. Vítány jsou také jakékoli experimentální realizace vámi vytvořených schémat.

Evžen

Téma 2 – Mapování DNA

Využívat a ohýbat přírodu pro své záměry se lidé snaží snad už celé věky. Ale až v posledních desetiletích se nám dostaly do rukou nástroje, kterými dokážeme manipulovat s těmi nezákladnějšími stavebními kameny života – s DNA. Díky nim dokážeme uměle vytvářet nové organismy nebo třeba velmi přesně předpovídat, jaké zdravotní problémy by toho kterého člověka mohly potkat.

Ale k tomu, abychom mohli DNA upravovat pro naše záměry, je třeba vědět, kde se v ní co nachází. Dnes asi nejjednodušší možností je DNA prostě nasekvenovat – tedy určit jak přesně jdou jednotlivé báze v dané DNA za sebou – a vše vyčíst z řetízku bází. My se ale podíváme na metodu, která nám toho sice o DNA řekne méně, ale zase je mnohem jednodušší. A to na *restrikční mapování*.

Restrikční mapování je založené na použití tzv. *restrikčních enzymů*. To jsou molekuly, které dokážou DNA „rozstříhnout“ v těch místech, která obsahují nějakou konkrétní posloupnost bází (např. enzym EcoRI rozstříhne posloupnost bází GAATTC). Nejdřív tedy DNA pomocí nějakého restrikčního enzymu rozstříháme na kratší kusy – fragmenty. Následně pomocí elektroforézy změříme délky a počty fragmentů a z těchto informací chceme sestavit *restrikční mapu*. To je seznam míst v DNA, ve kterých stříhá daný enzym (restrikčních míst). Pokud máme DNA dlouhou 20000 bází a získáme fragmenty délky 8000, 7000 a 5000 bází, pak restrikční mapa může např. říkat, že enzym stříhá v místě vzdáleném 7000 bází od začátku sekvence a v místě vzdáleném 15000 bází od začátku sekvence.

Z příkladu už je vidět, že jen z délek a počtu fragmentů restrikční mapu nesestavíme – není jasné, jak fragmenty uspořádat. V praxi se proto používají enzymy dva. Nejdřív DNA naštěpíme prvním, pak druhým a pak oběma současně – to nám znemožňuje uspořádat fragmenty úplně libovolně. Stačí to? Zkuste najít netriviální protipříklad dokazující, že ani v tomto případě nemusí být restrikční mapa jednoznačná. Dá se s tím nějak vypořádat? Zkuste vymyslet jiné metody, jak najít restrikční mapu DNA (pro jeden, nebo pro více restrikčních enzymů).

Jak ale vlastně z fragmentů sestavíme restrikční mapu? Inu, pořídíme si na to nějaký program! Zkuste vymyslet algoritmus, který dostane délky a počty fragmentů a sestaví z nich restrikční mapu. Můžete použít variantu se dvěma en-

zymy z předchozího odstavce (které se říká *Double Digest Problem*), nebo nějakou vlastní „stříhací“ metodu. Pokud umíte programovat, můžete svůj algoritmus i naprogramovat a podívat se, jak funguje. K tomu se vám může hodit online nástroj², kterým si můžete nastříhat DNA nebo rovnou vyrobit restriktivní mapu. Pokud byste si chtěli nastříhat nějakou reálnou DNA, můžete využít online databázi DNA³. Nenechte se zastrašit lehce komplikovaným rozhraním obou stránek, časem se na <https://mam.mff.cuni.cz/zadani/temata/> objeví návod, jak je používat.

Pokud se s algoritmy a programováním moc nekamarádíte, můžete se zkusit zaměřit na experimentální část mapování. Jak vůbec takové restriktivní enzymy fungují a jak poznají, kde mají stříhat? Na jakém principu funguje měření délek fragmentů? Dokážeme nějak poznat, kolik je fragmentů dané délky? A jak přesné ono měření vůbec je? Dá se s nepřesnostmi případně nějak vypořádat?

Napadla-li vás nějaká otázka, která zde neoznala, nebojte se nad ní zamyslet a něco k ní poslat. Stejně tak se nebojte napsat, pokud potřebujete pomoci třeba se získáním nějakých zdrojů, ke kterým se nemůžete dostat, nebo máte nějaký dotaz.

$O(N)$ dra

Téma 3 – Mafie jako výpočetní model

Za sedmero horami a sedmero řekami v jednom odlehlém městečku byla mafie. Jak taková mafie vypadá? Skládá se z mafiánů. Žádný mafián samozřejmě z bezpečnostních důvodů nezná všechny ostatní mafiány – každý jich zná jen konstantně mnoho a s těmi si dopisuje. Každý den ráno pošle všem svým známým mafiánům dopis. (Každá dvojice známých mafiánů si tedy každý den pošle dva dopisy – v každém směru jeden.) Všechny dopisy se do večera doručí. Mohli bychom tedy říci, že celá mafie má strukturu souvislého grafu⁴. Vrcholy odpovídají mafiánům a hrany reprezentují to, zda si daná dvojice dopisuje.

Mafiáni by nyní chtěli zjistit něco o tom, jak ta jejich mafie vypadá – třeba kolik jich je. Jediný způsob, jak něco takového zjistit, je pomocí mafiánů, co se znají a posílají si dopisy. Nejdrívě mafiánský boss na předem domluveném místě vylepí algoritmus, který bude popisovat, jak si mají mafiáni posílat dopisy, aby hledanou informaci zjistili. Každý den si pak známí mafiáni mohou vyměnit zprávu. Cílem je, aby na konci každý mafián věděl informaci, na kterou se snažili přijít.

Vymyslete grafové vlastnosti nebo problémy, které by mafiáni mohli řešit, nebo zkuste vyřešit jeden z problémů zmíněných v další části. Určete složitost vašeho algoritmu. Jde nám především o počet dnů, za který v nejhorším případě algoritmus skončí, a součet délek všech zpráv, které si mafiáni vymění. Jak se na každého správného mafiána sluší, má neomezený výpočetní výkon, takže časovou

²<http://www.restrictionmapper.org/>

³<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/nucleotide/>

⁴Pokud nevíte, co se myslí grafem, doporučujeme přečíst si prvních pár odstavců grafové kuchařky zde: <https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/grafy>

složitost v běžném slova smyslu uvažovat nemusíte. Složitosti můžete vyjadřovat v závislosti na počtu mafiánů, průměru grafu mafie (největší vzdálenost mezi dvojicí mafiánů), nebo si můžete vymyslet svůj vlastní parametr. Složitosti určujte asymptoticky⁵.

Inspirovat se můžete následujícími problémy:

- Zjistěte velikost mafie, tedy počet mafiánů, kteří v ní jsou.
- Mafiáni by chtěli co nejvíce omezit počet dopisů, které pošlou. Rozhodli se proto, že si spolu někteří mafiáni přestanou dopisovat. Najděte co nejvíce dvojic, které si spolu mohou přestat dopisovat tak, aby stále mezi libovolnou dvojicí mafiánů existovala cesta.
- Mafiáni by chtěli zjistit, jaký je celkový majetek mafie (vyjádřeno v místní měně). Žádný z mafiánů při tom nechce, aby některý jiný mafián zjistil hodnotu jeho majetku.
- Čas od času potřebuje nějaký mafián o něčem informovat všechny ostatní. To se dělá tak, že předá zprávu všem, se kterými si dopisuje. Každý další mafián pak zprávu přepoše ostatním mafiánům, se kterými si dopisuje (ale jen při prvním přijetí dané zprávy). Zjistěte, jak nejdéle může trvat, než se zpráva dostane ke všem mafiánům.
- Mafiáni by chtěli vědět, kolik nejméně z nich by muselo být zatknuto, aby se mafie „rozpadla“. Tedy aby pak existovali dva mafiáni, mezi kterými nebude existovat cesta vedoucí pouze přes nezatčené mafiány. Jinými slovy chceme spočítat největší k takové, že graf mafie je k -souvislý. Toto by mohlo být zajímavé už pro $k = 2$. (Věřím, že tento problém je poměrně těžký a možná ani nemá efektivní řešení.)

Kuba



⁵Pokud nevíte, co se tím myslí, doporučujeme přečíst odstavec asymptotická složitost v programátorské kuchařce o složitosti: <https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/slozitost/>

Jak poslat řešení

Svá řešení můžeš poslat buď elektronicky na náš e-mail mam@matfyz.cz, nebo poštou na naši adresu. Pokud posíláš řešení elektronicky, věz, že nás daleko více potěší pdfko s textem než vyfocené ručně psané řešení. Každou úlohu pošli v samostatném souboru resp. na samostatném listě A4, aby si úlohy mohli rozdělit různí opravující. Na každý list uveď svoje jméno a číslo úlohy či tématu. K řešení také připoj své jméno, adresu, e-mail, školu a předpokládaný rok maturity. A neboj, tyto údaje budeme využívat pouze pro potřeby MFF UK.



Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence CC BY 3.0. Autory textů jsou, není-li uvedeno jinak, organizátoři M&M.

Kontakty:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: mam@matfyz.cz
Web: <https://mam.matfyz.cz>
FB: casopis.MaM

