

Zadání úloh 1. série – str. 2

Téma 1: Pojd'te pane, budeme si hrát – str. 5

Téma 2: Volební systémy – str. 5 • Téma 3: Kosmický kulečnick – str. 6

Seriál: Užitná teorie grup – str. 6 • Informace o M&M – str. 7

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Milý příteli matematiky, fyziky či informatiky,

právě čteš časopis M&M určený pro zvědavé středoškoláky. V jeho rámci se snažíme zábavnou formou prezentovat zajímavé úlohy z matematiky, fyziky a obecně i aplikované informatiky. Důraz přitom klademe na to, aby každý mohl o problémech sám uvažovat a aby mohl poté společně s ostatními sdílet své závěry.

V průběhu školního roku vychází zpravidla sedm čísel časopisu. V nich najdeš nejrůznější úlohy a témata k zamyslení i zajímavé články. První číslo právě držíš v ruce.

Jak se zapojit do korespondenčního semináře M&M a co všechno ti nabízíme, se dozvíš na straně 7.

Zadání úloh

Termín odeslání první série: 20. 10. 2015

(21. 9. 2015 pro účast na podzimním soustředění)

V prvních šesti číslech uveřejňujeme samostatné úlohy. Tyto úlohy bývají trochu těžší než obvyklé školní a jejich řešení často vyžaduje hlubší zamyslení nebo nějaký trik. Středoškolské znalosti by k jejich vyřešení ale měly stačit. Pokud některou z úloh vyřešíš, pošli nám její řešení. My ho opravíme a zašleme zpět. V některém z dalších čísel vždy uveřejníme vzorová řešení. Praktické informace k posílání tvých řešení najdeš v části *Jak se zapojit*. U každé úlohy je uveden počet bodů za správné řešení. Přiměřenou část z těchto bodů lze získat i za neúplné řešení. A naopak za velmi zajímavé nebo elegantní řešení můžeš dostat i bodovou prémii.

Ještě jedna zatáčka a jsem v bunkru. Výstřel, dávka. Došly náboje. V pravém rohu obrazovky zahlédnu pohyb. Sakra! GAME OVER. . . Petr zlostně uhodil sluchátky na stůl. V tomhle letním dusnu se stejně nedá hrát.

Natáhl se pro sklenici s limonádou, když tu mu pohled padl na nenápadný lístek zastrčený pod klávesnici. Jak se tam dostal? Na papírku stálo ručně načmáráno: „Velevážený Hledači, chceš-li nalézt, po čem toužíš, vydej se na Masarykovo nádraží, na první nástupiště a odpočítej třetí cihlu zprava, pátou odspoda. M.“ Petr nejprve zaváhal – kdo se mohl dostat až k němu do pokoje a podstrčit mu vzkaz? Na druhé straně lístku objevil své jméno a adresu. Sledují ho snad? Ale kdo? A jak? Tohle musí vyřešit! Popadl batoh a vyrazil na nádraží.

Úloha 1.1 – Špionážní družice (4b)

Jakou nejdelší dobu v kuse může družice na kruhové rovinné dráze s výškou 500 km sledovat jedno konkrétní místo na zemském povrchu?

Když Petr dorazil na první nástupiště, vytáhl ze škvíry mezi čtvrtou a pátou cihlou složený list. Než jej však stačil rozbalit, dopadla mu na rameno cizí ruka. „Ahoj, já jsem Tomáš,“ zahlaholil příchozí. „Taky jsi dostal vzkaz od pana M?“

„Já jsem Petr. Neznám žádného pana M, ale dostal jsem od něj lístek, že mám hledat vzkaz na prvním nástupišti.“ „To souhlasí. Tak se pojd'me podívat, co za tím vězí.“

Když Petr s Tomášem papír rozložili, vykoukl na ně další vzkaz: „Vážení Hledači, cesty pravdy jsou křivolaké a vaše se bude ubírat vlakem. Jeho číslo jest rovno odpovědi na následující hádanku. Pak tři zastávky minete a na další vystoupíte. M.“

Úloha 1.2 – Zahradnická (3b)

Lišák Riki se pustil do zahradničení. Má záhonek a pěstuje tři druhy zeleniny: artyčoky, brambory a celer. Na jejich pěstování se ale vztahují určitá pravidla:

1. V záhonku nesmí být dva artyčoky hned vedle sebe.
2. Brambor nemůže růst mezi dvěma stejnými rostlinami.
3. Celer nevyroste, pokud má za jednoho souseda artyčok a za druhého brambor.

Určete, kolika různými způsoby může Riki naplnit svůj záhonek, pokud se mu do něj vejde právě jedna řada s dvaceti rostlinami.

Když se vlak rozjel, vytáhl Tomáš balíček karet a navrhl Petrovi, aby si s ním zahrál hru. Ne ledajakou, ale hru, kterou sám vymyslel a na jejíž pravidla byl náležitě hrdý. V hádání karet byl Tomáš skutečným přeborníkem.

Úloha 1.3 – Hádání karet (3b)

Tomáš má balíček 52 karet (s třinácti různými symboly ve čtyřech barvách). Karty leží na stole lícem dolů a Tomáš vždy zvedne jednu kartu a odloží ji pryč, dokud nedojde balíček. Před odebráním karty ale ještě hádá, jakou má barvu. Dělá to chytře – vždy si tipne barvu, která se vyskytuje nejčastěji ve zbytku balíčku (pokud je jich víc, vybere si mezi nimi podle libosti). Dokažte, že se Tomáš trefí alespoň třináctkrát.

Oba přátelé vystoupili z vlaku a před nimi se otevřelo malebné údolí. Ani už je příliš nepřekvapilo, když na rozcestníku našli špendlíkem připevněnou cedulku s textem Z 3,2 km M. Vydali se tedy západním směrem a po chvíli chůze narázili na tunel. Byl temný a chladný, ale v dálce svítil jeho druhý konec, a tak se rozhodli projít skrz. Náhle sluneční světlo pohaslo, zapadla mříž a z hloubi tunelu se ozval hrobový hlas: „Pravá zkouška odvahy teď čeká vás. Když ve hře společně zvítězíte, sluneční světlo znovu zříté. Pokud však vyhrát nesvedete, v tunelu dlouho si pobudete.“

Úloha 1.4 – Uvěznění (5b)

Strážce zajal oba cestovatele a rozhodl se jim zadat úkol. Pustí je pouze v případě, že se jim podaří úkol splnit.

Nejdříve strážce pozve prvního cestovatele do místnosti, kde před ním na klasické šachovnici (8×8 polí) rozloží mince tak, aby na každém políčku byla právě jedna. Některé umístí nahoru rubem a některé lícem (jinak jsou mince zcela totožné). Poté strážce cestovateli prozradí jedno pole, říkejme mu únikové. Následně musí první cestovatel otočit jednu libovolnou minci. Pak strážce prvního cestovatele odvede a pozve druhého. Jeho úkolem je na základě rozložení mincí na šachovnici poznat, které pole je únikové. Pokud uspěje, jsou oba cestovatelé volní.

Před plněním úkolu si mohou cestovatelé domluvit strategii. Strážce ale jejich rozhovor odposlechne a zvolí rozložení mincí i únikového pole tak, aby pokud možno neuspěli.

Existuje pro cestovatele strategie, aby je strážce vždy pustil? Pokud ano, jaká?

Přátelé vyklopýtali na denní světlo. Z tunelu se za nimi ještě ozval hlas, tentokrát o něco hřejivější než na začátku: „Vaše cesta ještě nekončí, ale o krůček jste blíž, že M znamená Matematik, hledejte jeho skrýš.“

Zadání témat

Témata jsou obecněji zadané problémy. Vždy obsahují nějaké otázky a námět, kudy téma dále rozvíjet, ty ale slouží hlavně pro vaši inspiraci. Téma není jen soubor úloh spojených jednou myšlenkou, nabízí především příležitost se hlouběji ponořit do určitého problému a zkusit vymyslet něco vlastního. To je postup podobný skutečné vědecké práci. Vaše zajímavé příspěvky otiskneme v některém z dalších čísel.

Jak řešit téma

Vyber si jeden z navrhovaných podproblémů, nebo si vymysli vlastní, který se tématu týká (to bývá ohodnoceno zvláštním bodovým bonusem), a vyřeš ho, jako by to byla úloha z čísla. Své řešení pak hezky sepiš, aby mělo formu článku, a článek nám pošli. Pro inspiraci se můžeš podívat na řešení témat z minulých let (na webu).

Podrobné řešení některého z podproblémů bude bodově hodnoceno výrazně lépe, než souhrnný článek krátce zmiňující kdeco bez pokusu o vysvětlení. Navíc můžeš, narozdíl od úlozek, na příspěvky ostatních reagovat – rozvíjet je, nebo naopak bořit jejich představy. Proto se hodí poslat i částečná řešení, postřehy, nebo nápady na další podproblémy, které třeba nezvládneš vyřešit sám. Takovéto příspěvky dávají prostor ostatním a mohou je inspirovat. A protože víc hlav víc ví, můžete na tématech pracovat i ve skupinách.

Téma 1 – Pojdte pane, budeme si hrát

V témátku se budeme zabývat jednou hrou pro dva hráče. Představte si, že s kamarádem napíšete na tabuli bílou křídou všechna přirozená čísla (máte dlouhou tabuli a spoustu křídý). Teď se budete střídat; každý si ve svém tahu nejprve vybere jedno bílé číslo na tabuli a vybarví jej červeně. Následně smaže všechna bílá čísla, která můžeme napsat jako součet několika červených (každé můžeme použít vícekrát). Takže pokud jsme v prvním tahu vybarvili trojku, smažeme $6 = 3 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$, \dots . Jestliže si následně protihráč vybere pětku, smaže $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5$, $11 = 5 + 3 + 3$, \dots . Ten hráč, který musí vybarvit jedničku, prohrává.

Nás by zajímalo, co všechno o této hře můžeme říct. Tak třeba – musí tato hra někdy skončit, nebo je možné, že si budeme barvit stále nová a nová čísla a nikdy nepřestaneme? Pokud hra vždy musí skončit, můžeme nějak omezit počet jejích tahů? Můžeme říci, že hra vždy skončí za méně než tisíc nebo třeba milion tahů? Pokud hra nemusí vždy skončit, zkuste najít nějaký konkrétní průběh takové hry.

Zkusme nyní jednu konkrétní hru rozebrat. První hráč začne s dvojkou a smaže tak všechna sudá čísla. My si následně vybereme pětku a smažeme tak všechna lichá čísla větší než pět ($7 = 5 + 2$, $9 = 5 + 2 + 2$, \dots). Nyní protihráč vybarví trojku a my jsme prohráli. Trojku jsme si však mohli vybrat místo pětky v minulém tahu, pak by na soupeře rovnou zůstala jenom jednička a vyhráli bychom. Pokud v nějaké pozici můžeme vyhrát nezávisle na tazích soupeře, řekneme, že máme vyhrávající strategii (to je případ pozice poté, co soupeř vybarvil dvojkou). Má na začátku nějaký hráč vyhrávající strategii? Pokud ano, jak tato strategie vypadá?

Zabývejte se hrami s konkrétními tahy v úvodu hry. Pro začátek můžete zkusit například pozice, jež vzniknou po vybarvení čísel 4 a 5, popřípadě 4 a 6.

Vašek

Téma 2 – Volební systémy

Již přes pětadvacet let funguje v naší zemi demokracie. Při volbách máme možnost vybrat zástupce z lidu, kteří budou zastupovat naše zájmy. Málokdo se však pozastavuje nad tím, jakým způsobem se hlasy počítají. Zkuste pro začátek zodpovědět následující otázky:

- Jak přesně se počítají hlasy? Podle čeho se přidělují mandáty?
- Jakým způsobem (a jestli vůbec) může způsob počítání hlasů ovlivnit výsledky voleb? Pokuste se zamyslet nad tím, jakému typu stran současný systém nahrává nebo které může znevýhodňovat. Jaká by byla vhodná definice „spravedlivosti“ systému?
- Zkuste vymyslet nebo pozměnit volební systém tak, aby upřednostňoval nějakou skupinu voličů (bez přímého ovlivnění váhy hlasu).

- Co kdyby šlo změnit počet mandátů podle volební účasti nebo až po sečtení hlasů?
- Pokuste se srovnat způsob sčítání hlasů u nás a jinde v zahraničí. Jak by dopadly poslední volby do Poslanecké sněmovny, kdybychom používali jiný volební systém (například ten používaný ve Velké Británii)? Potřebná data najdete na <http://www.volby.cz/pls/ps2013/ps>.

Výsledky by měly být podloženy konkrétními daty a výpočty. Pokud použijete nějaký zdroj, nezapomeňte uvést citaci. Otázky berte jako inspiraci, budeme rádi, když si budete schopni položit i vlastní a hledat na ně odpovědi.

Těšíme se na vaše příspěvky.

Anet

Téma 3 – Kosmický kulečník

Představte si, že se jednoho dne nebo noci podíváte na oblohu a zjistíte, že nějaké těleso sluneční soustavy zmizelo. Sluneční soustava tak, jak ji známe, šlape jako hodinky, a proto bude mít toto zmizení u některých těles větší a u některých menší vliv na Zemi, Slunce a ostatní tělesa.

Vyberte si těleso sluneční soustavy mimo Zemi a Slunce a popište, co by se stalo, kdyby náhle zmizelo. Jakým způsobem se tělesa nejvíce ovlivňují a co se kvůli tomu může změnit? Změní se oběžné dráhy či jiné pohyby těles? Může po takovéto změně nastat dlouhodobější rovnováha, nebo se budou poměry ve sluneční soustavě drasticky měnit? Bylo by možné bez tohoto tělesa nadále žít na Zemi? Všimli by si zmizení pouze astronomové, nebo by mělo nezanedbatelný dopad? Zkuste se zamyslet nad následky, které bychom pocítili na Zemi, i nad dopady na jiné planety nebo Slunce.

Viktor

Seriál: Užitná teorie grup

Letos jsme se rozhodli kromě úloh a témat zařadit i seriál. V tomto čísle vám přinášíme jen krátkou anotaci, v dalších číslech se objeví delší články rozebírající podrobněji určité aspekty teorie grup a problémů, ve kterých se používá. Ke každému článku se bude vázat úloha k řešení, za kterou budete moci získat body stejně jako za ostatní úlohy.

Seriál se bude zabývat teorií grup a jejími aplikacemi, především ve fyzice. Proč zrovna takové téma? Jistě jste se už zamýšleli nad abstraktností některých oblastí matematiky a nedokázali si představit, že by mohly být spojeny s něčím reálným. Stává se ale, že i teorie, u kterých to nikdo nečekal, naleznou využití. Teorie grup je krásným příkladem právě takové situace.

Grupa je matematický objekt tvořený množinou prvků a matematickou operací na těchto prvcích, která splňuje určité podmínky. Příkladem grupy, se kterou jste se již setkali, jsou celá čísla s operací sčítání či racionální čísla bez nuly s operací násobení. Grupy se ale dají zavést i pro menší množiny a složitější operace. Ve fyzice grupy představují nástroj pro popis symetrie v zobecněném slova smyslu.

Příkladem takových zajímavých grup, kterými se v seriálu budeme zabývat, jsou bodové grupy operací symetrie s operací jejich skládání. Ty se dají použít k výpočtu, které energetické přechody se projeví v různých typech spekter určité molekuly, a které nikoli (či jen velmi slabě). Bodové grupy symetrie se používají i v krystalografii pro popis symetrie mřížky. Jiným, mnohem abstraktnějším, příkladem jsou Lieovy grupy, které představují model spojitých symetrií. Takové symetrie ve fyzice popisují symetrie prostoru, času, ale i rovnic popisujících fyzikální zákony, a souvisejí se zachováním určitých veličin (např. symetrie vůči posunu v čase implikuje zákon zachování energie). Fyzikální zákony se pak dají popsat jako důsledek různých symetrií. Pomocí teorie grup se dají i popisovat Platónská tělesa či hledat řešení Rubikovy kostky.

Zuzi

Informace o M&M

Co M&M nabízí

Časopis je zdarma a najdeš v něm úlohy, témata a články. M&M je taky soutěž o věcné ceny a o dort (ten pečou samotní organizátoři a je báječný!). Taky se můžeš dostat na Matfyz bez přijímaček. Ale hlavně, nejlepší řešitele zveme dvakrát do roka na skvělé soustředění!

Jak se zapojit

V průběhu školního roku vychází sedm čísel časopisu. V nich jsou zadané různé podněty k přemýšlení. Pokud tě nějaký z nich zaujme, pokus se najít řešení a poslat nám ho. K řešení přilož prosím také své jméno, adresu, e-mail, školu a rok maturity. Pokud chceš jet na soustředění, uveď prosím i telefon. A neboj, tyto údaje budeme využívat pouze pro potřeby MFF UK. Mimo údajů na výsledkové listině (jméno, škola, ročník) je nebudeme nikde zveřejňovat.

Svá řešení můžeš poslat buď elektronicky na náš e-mail mam@matfyz.cz, nebo poštou na adresu uvedenou na zadní straně. Pokud posíláš řešení elektronicky, věz, že nás daleko více potěší pdfko s textem než vyfocené ručně psané řešení. Každou úlohu prosím pošli v samostatném souboru resp. na samostatném listě A4, aby si úlohy mohli rozdělit různí opravující. Na každý list uveď svoje jméno a číslo úlohy či tématu. Na tvou poštovní adresu ti pak budou zdarma chodit další čísla našeho časopisu a opravená řešení.

Pokud by ses chtěl o M&M dozvědět více, podívej se na naše webové stránky mam.matfyz.cz, kde mimo jiné najdeš podrobná pravidla a archiv všech vydaných čísel z posledních 21 ročníků.

Soutěž

M&M není jen časopis, ale i soutěž. Za všechny došlé úlohy, příspěvky k tématům i články udělujeme body. U každé úlohy je uveden počet bodů za správné řešení. Přiměřenou část z těchto bodů lze samozřejmě získat i za neúplné řešení. U témat a článků žádná horní hranice stanovena není. Za dobrý příspěvek lze získat třeba i

20 bodů. Na základě získaných bodů sestavujeme výsledkovou listinu. Na nejlepší řešitele čekají knihy a deskovky. Autor nejlepšího příspěvku k tématku si bude moci smlsnout na dortu. A přibližně dvacet pět nejúspěšnějších řešitelů zveme dvakrát do roka na soustředění.

Soustředění


Vždy na podzim a na jaře připravujeme pro naše nejlepší řešitele týdenní soustředění. To se obvykle koná někde v blízkosti pěkné přírody. Soustředění je odborné – máme pro vás připraveny přednášky z nejrůznějších oblastí matematiky, fyziky a informatiky. Dost času je věnováno také zajímavým a zábavným hrám, venku i uvnitř. Především je ale soustředění příležitost, jak potkat fajn lidi s podobnými zájmy! Letošní podzimní soustředění se bude konat 10.–18. 10. 2015. Budeme na něj zvát nejlepší řešitele z minulého ročníku, ale i ty, kteří pošlou pěkná řešení úloh a témat z tohoto čísla. Budeme rádi, pokud nám společně se svými řešeními napíšeš, jestli bys na soustředění případně chtěl(a) jet.

Přijímací zkoušky na MFF

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy se rozhodla nejúspěšnějším řešitelům našeho korespondenčního semináře odpustit přijímací zkoušky. Konkrétně se to týká těch, kteří získají za rok alespoň 65 bodů (letos jsme hranici snížili z původních 85 bodů). Ti od nás dostanou „osvědčení úspěšného řešitele“, které pak mohou předložit fakultě.

Pokud máš ještě nějaké otázky, podívej se na náš web, nebo nám rovnou napiš. Kontakt najdeš níže. Těšíme se na tvá řešení!

*Anet, Eliška, Honza, Jethro, Jirka, Kristý, Kuba, Kuba,
Lukáš, Marble, Martin, Matej, Matěj, Miša, O(N)dra,
Pepa, Peťa, Tomáš, Tonda, Vašek, Viktor, xlfđ, Zuzi*

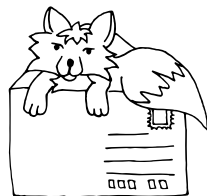
a Riki 

Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: mam@matfyz.cz

WWW: <http://mam.matfyz.cz>



Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy v Praze. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence Creative Commons Attribution 3.0. Dílo smíte šířit a upravovat. Máte povinnost uvést autora. Autory textů jsou, pokud není uvedeno jinak, organizátoři M&M.