

Řešení úloh 5. série – str. 2

Řešení úloh 6. série – str. 10 • Téma 1: Papírová letadélka – str. 16

Mgr.^{MM} Dominika Jochcová: Analýza letu letadélka – Dodatek A – str. 16

Téma 2: Tvorba draka – str. 21 • Téma 3: Reakce v miskách – str. 21

Mgr.^{MM} Jan Pokorný: Vizualizace fotosyntézy – str. 23

Téma 4: Dopad meteoritu – str. 24 • Téma 5: Pokrytí šachovnice – str. 24

Dr.^{MM} Jan Škvára: Nový rozměr – str. 24 • Téma 6: Výtahy – str. 30

Časopis M&M a stejnojmenný korespondenční seminář je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či informatiku. Během školního roku dostávají řešitelé zdarma čísla se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Naši milí řešitelé,

školní rok je skoro za námi a tak nastal čas ukončit i letošní ročník M&M.

Ročník to byl opravdu vydařený. Letos vás, řešitelů, bylo skutečně hodně a došlých řešení jakbysmet. Vaším článkům, rozborům tématů a vyřešeným úlohám jsme se i my pilně věnovali. A zde je závěrečné shrnutí:

Jednoznačně nejlepší řešitelkou 21. ročníku je Prof.^{MM} Markéta Calábková, která nasbírala 83 bodů. Ze všech příspěvků k tématům nejvíce oceňujeme články Mgr.^{MM} Dominiky Jochcové k Papírovým letadélkům. Srdečně blahopřejeme. Slíbený dort už se peče – sledujte náš Facebook a zjistíte víc!

I další věcné ceny už se nemůžou dočkat, až se dostanou ke svým řešitelům. Než k tomu ale dojde, otočte na další stránky a podívejte se na vzorová řešení úloh páté a šesté série a na shrnutí letošních tématů. A až je dočtete, bude tomuto ročníku skutečně konec.

Vám všem, kteří jste řešili, děkujeme za vaši přízeň a za píli a těšíme se na vás zase v září. Věříme, že těšit se budete i vy – na příští rok jsme si přichystali několik drobných vylepšení a celý korespondenční seminář dostane nový kabátek. Uvidíte v září!

Přejeme vám krásné a slunné prázdniny.

Vaši organizátoři

Řešení úloh 5. série

Úloha 5.1 – Kulatý stůl

(4b)

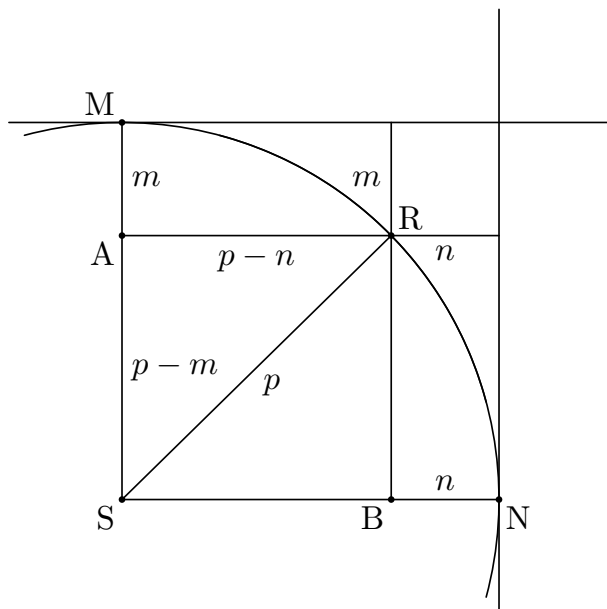
Zadání:

Kruhový stůl o poloměru p je přiřazen k rohu místnosti. Na kraji stolu je nalepená žvýkačka, která je ve vzdálenosti m od jedné stěny a n od druhé stěny, kde $m, n \leq p$. Navíc jsou m a n přirozená čísla a p je prvočíslo. Dokaž, že jedno z čísel m a n je druhá mocnina přirozeného čísla.

Řešení:

Označme M dotyk stolu s tou zdí, která je ve vzdálenosti m od žvýkačky, a N dotyk stolu s druhou zdí. Dále označme S střed stolu, R bod, kde je nalepena žvýkačka a konečně A a B paty výšek z R na úsečky SM a SN . Snadno vidíme, že $|SA| = |SM| - |MA| = p - m$ a $|SB| = |SN| - |NA| = p - n$ a $|RS| = p$. Trojúhelník ABS je pravoúhlý a Pythagorova věta nám dává vztah $p^2 = (p - m)^2 + (p - n)^2$. Říkejme mu naše rovnice.

Pokud je p rovno dvěma, musí být m i n rovny jedné a $1 = 1^2$. Pokud je p liché, právě jedno z čísel m a n je taky liché. Předpokládejme tedy (BÚNO), že je to třeba n . Pokud v naší rovnici roznásobíme závorku $(p - n)^2$, dostaneme vztah $(2p + n)n = (p - m)^2$. Protože p je prvočíslo a n je liché, jsou čísla $2p$ a n nesoudělná a proto i čísla $2n + p$ a n jsou nesoudělná. Jejich součin se ale rovná druhé mocnině přirozeného čísla, takže musí být obě čísla $2p + n$ a n také druhé mocniny přirozeného čísla. Tím dostáváme náš závěr. Ještě dodám, že se úloha dá



Obrázek 1: Stůl se žvýkačkou z úlohy 5.1

také řešit přes tento známý fakt: každá Pythagorejská trojice (tj. trojice celých čísel splňující naši rovnici) má tvar $(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$ pro nějaká celá čísla a a b . Touto metodou dostaneme dokonce obecnější tvrzení – můžeme vynechat předpoklad, že p je prvočíslo.

Pepa

Úloha 5.2 – Výběr

(3b + 1b)

Zadání:

Máme posloupnost N celých čísel. Chceme najít co nejdelší souvislou podposloupnost, která má součet dělitelný třemi. Vaším úkolem je:

1. Vymyslet co nejefektivnější algoritmus vzhledem k délce posloupnosti N .
2. Dokázat, že hledaná podposloupnost bude mít délku alespoň $N/3$ (zaokrouhleno dolů).

Bonusový bod získáte, pokud vymyslíte algoritmus pro hledání podposloupnosti, která má součet dělitelný K , kde K je libovolné přirozené číslo.

Řešení:

Jako první dokážeme, že hledaná podposloupnost má délku alespoň $N/3$, zaokrouhleno dolů. Rozdělme si tedy posloupnost na třetiny – není-li N dělitelné

třemi, můžeme jeden nebo dva poslední prvky zahodit tak, aby bylo. Pro každou třetinu si pak spočítáme součet a vezmeme jeho zbytek po dělení třemi. Označme si zbytky postupně jako a, b, c . Rozeberme možné případy:

1. $a = 0, b = 0$ nebo $c = 0 \Rightarrow$ odpovídající třetina je hledanou podposloupností,
2. $a = b = c \Rightarrow$ součet celé posloupnosti je dělitelný třemi,
3. třetina se zbytkem jedna sousedí s třetinou se zbytkem dva \Rightarrow tyto dvě třetiny mají součet dělitelný třemi.

Snadno nahlédneme, že pokud nenastanou první dvě možnosti, pak nutně musí nastat třetí možnost, tedy hledaná podposloupnost bude mít vždy délku alespoň $N/3$ zaokrouhleno dolů.

A nyní algoritmus. Jelikož se algoritmus pro dělitelnost obecným K od toho pro trojku liší jen v jedné části, popíšeme algoritmus rovnou pro obecné K , a potom na správném místě ukážeme rozdíl oproti tomu pro trojku.

Prvním krokem algoritmu bude spočítat *prefixové součty*. To je posloupnost, označme si ji p_i , pro i od nuly do N , splňující

$$p_i = \sum_{j=1}^i a_j,$$

kde a_j je j -tý člen zadané posloupnosti, p_0 definujeme jako nulu. Hodnota p_i je tedy součet prvních i -členů zadané posloupnosti. Všimněme si, že libovolný součet $\sum_{k=i}^j a_k$ můžeme vyjádřit jako $p_j - p_{i-1}$. Stačí nám tedy najít i a j tak, že $p_j - p_i$ je dělitelné K , a navíc rozdíl $j - i$ je největší možný.

Triviální řešení by bylo vzít všechny možné dvojice i a j , otestovat rozdíl odpovídajících prefixových součtů na dělitelnost K a z vyhovujících dvojic nakonec vzít tu s největším rozdílem. Takových dvojic je ale řádově N^2 , takže algoritmus by běžel v $\mathcal{O}(N^2)$. Půjdeme na to tedy fikaně.

Povšimněme si, že aby bylo $p_j - p_i$ dělitelné K , musí mít p_j stejný zbytek po dělení K jako p_i . Stačí tedy pro každý možný zbytek najít první a poslední prefixový součet s tímto zbytkem, a poté už jen z těchto dvojic vybrat tu, která odpovídá nejdelší podposloupnosti.

Jak rychlý náš algoritmus bude? Inu, na spočtení prefixových součtů stačí jednou projít posloupnost, tedy $\mathcal{O}(N)$. První výskyt f_i a poslední výskyt l_i zbytku i pak taktéž najdeme jedním průchodem zadanou posloupností. Přitom však máme několik možností.

Hodnoty f_i a l_i si můžeme ukládat do dvou polí \mathbf{F} a \mathbf{L} délky K , které na pozici i budou mít f_i , resp. l_i . Spočítání \mathbf{F} a \mathbf{L} tedy bude trvat $\mathcal{O}(N)$, jejich následné projití a nalezení maxima pak $\mathcal{O}(K)$. Celkem tedy algoritmus poběží v čase $\mathcal{O}(N + K)$ a s touž pamětí. To je dobré, pokud je K malé, například pro $K = 3$.

Pokud ovšem je $K > N$, pak některé zbytky ani v posloupnosti nebudou a budeme na ně plýtvat pamětí a časem. Můžeme tedy obětovat trochu času a

f_i a l_i si udržovat v nějaké dynamické datové struktuře, třeba ve vyhledávacím stromu¹. Tím se nám paměťová složitost zmenší na $\mathcal{O}(N)$, stejně jako čas potřebný k nalezení maxima. Zaplatíme za to ale časem $\mathcal{O}(N \log N)$ na spočítání f_i a l_i , jelikož na stromu trvají operace vkládání a hledání $\mathcal{O}(\log N)$ (ve stromu nikdy nebude více než N prvků).

Další možnost je spokojit se s tím, že algoritmus nebude rychlý vždy, ale v průměru. Pak můžeme použít hashovací tabulku, čímž se dostaneme na průměrný čas $\mathcal{O}(N)$ a stejnou paměť.

Možná vás napadlo, že místo hledání maxima až po spočtení hodnot f_i a l_i můžeme maximum počítat průběžně. Tím nám zmizí ono $\mathcal{O}(K)$ a máme vyhráno... Inu, ne tak docela. Pořád si potřebujeme zapamatovat hodnoty f_i – speciálně potřebujeme poznat, zda už jsme hodnotu f_i spočítali, nebo ne. Běžný způsob je inicializovat pole na nějakou danou hodnotu, třeba -1 – což stojí $\mathcal{O}(K)$ času. Existuje však (poněkud komplikovaný) způsob, jak i bez toho poznat, zda už jsme nějakou hodnotu do paměti zapsali, nebo ne². To už je ale spíše pro zajímavost...

$\mathcal{O}(N)$ dra

Úloha 5.3 – Kytarová (3b)

Zadání:

Pokud kolíček u naladěné struny D povolíme o 180 stupňů, bude znít tónem C. O kolik stupňů bychom museli kolíček přitáhnout, abychom získali E? Předpokládejte, že při ladění platí elementární Hookův zákon.

Řešení:

Nejprve se podíváme na to, jak spolu souvisí hudební tóny a frekvence zvuku. Lidské smysly fungují často tak, že vnímaná změna o pocitově stejný krok neodpovídá při vyjádření související fyzikální veličinou přičtení nebo odečtení, ale vynásobení nebo vydělení stejným koeficientem. Můžeme si toho všimnout u intenzity světla³, hlasitosti⁴, a podobně to platí i u výšky tónů. U hudby navíc chceme, aby spolu znějící zvuky ladily. Spojením požadavků na soulad tónů a vytvoření souvislé stupnice vzniklo mnoho různých hudebních ladění, každé s trochu jinými vlastnostmi a trochu jinými vztahy mezi tóny a frekvencí.

Kytara se standardně ladí v rovnoměrně temperované ladění, čemuž odpovídá i rozložení pražců. Toto ladění dělí oktávu⁵ na geometrickou řadu šesti tónů, resp. 12 půltónů. Vyjdeme tedy z něj a změna o jeden tón bude tedy odpovídat vynásobení či vydělení frekvence koeficientem $\sqrt[6]{2} \doteq 1,1225$.

¹O vyhledávacích stromech, hashování a dalších šikovných způsobech jak si organizovat data se může dočíst na <http://ksp.mff.cuni.cz/encyklopedie/kucharky/> v sekci *Datové struktury*.

²Jak to udělat můžete najít třeba na research.swtch.com/sparse

³Rozdíl 15 W mezi 25wattovou a 40wattovou žárovkou je výrazný, ale pokud stejných 15 W přidáme ke 100wattové žárovce, změny si téměř nevšimneme.

⁴Decibel je logaritmická jednotka, takže zvýšení hlasitosti o 20 dB není přičtení nějaké hodnoty intenzity, ale její zdvojnásobení.

⁵Změna o jednu oktávu je změnou frekvence buďto na polovinu, nebo na dvojnásobek.

Tím máme vyřešenou hudební část. Pokud si jednotlivé frekvence na počátku, po povolení a po utažení kolíčku označíme f_D , f_C a f_E , bude platit vztah

$$f_D : f_C = f_E : f_D = \sqrt[6]{2}.$$

Zbývá fyzika kmitající struny. Odvození vztahu pro frekvenci je trochu komplikovanější a pro případné zájemce by neměl být problém najít jej ve spoustě jiných zdrojů,⁶ takže zde uvedeme jen výsledek:

$$f = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

kde L je délka napnuté části struny, F je síla, která ji napíná, a μ délková hustota (hmotnost jednoho metru struny).

Pokud budeme strunu na kytarě napínat, délka se nezmění (délkou struny je vzdálenost krajních bodů, mezi kterými je napnutá), síla poroste úměrně protažení napnuté části (Hookův zákon zmíněný v zadání) a délková hustota bude klesat, protože na stejnou napnutou délku zbývá méně materiálu struny (část struny, kterou jsme namotali, není součástí napnuté délky L).

Protože se délka L nemění, můžeme pro poměr dvou frekvencí, například konkrétně f_C a f_D , psát

$$\left(\frac{f_C}{f_D}\right)^2 = \frac{F_C}{F_D} \cdot \frac{\mu_D}{\mu_C}.$$

Struna napnutá silou F_D bude po povolení části o délce x z válečku napínána silou $F_D - kx$, kde k je (neznámá) konstanta struny související s modulem pružnosti materiálu a tvarem vnutí struny. Analogicky po namotání délky y na váleček bude síla $F_D + ky$. Délková hustota se při povolení změní z původního μ_D na hodnotu $\mu_D \cdot (1 + x/L)$, při povolení pak na $\mu_D \cdot (1 - y/L)$.

Po dosazení máme pro povolení struny:

$$(1 - \alpha x) \cdot \frac{1}{1 + x/L} = \left(\frac{f_C}{f_D}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

kde α značí podíl k/F_D . Obdobně můžeme pro přitažení struny od tónu D k tónu E napsat:

$$(1 + \alpha y) \cdot \frac{1}{1 - y/L} = \left(\frac{f_E}{f_D}\right)^2 = \sqrt[3]{2}.$$

Tím jsme získali soustavu dvou rovnic. Pro vyřešení úlohy chceme vyjádřit y pomocí x , ale v rovnicích je stále příliš mnoho neznámých parametrů. Pokud se podíváme na jmenovatele zlomků $(1 + x/L)$ a $(1 - y/L)$, můžeme si všimnout, že jsou blízce jedničky.

⁶Anglicky například na Wikipedii: https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrating_string.

Pro představu jejich vlivu odhadněme změnu délky struny na 15 mm (otočení kolíčku o průměru 10 mm o 180°) při celkové délce 70 cm. Tím získáme hodnoty zlomků 1,02 a 0,98, které můžeme v prvním přiblížení skutečně považovat za rovné jednotce, a rovnice zjednodušit na

$$1 - \alpha x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad 1 + \alpha y = \sqrt[3]{2}.$$

Po vyjádření α :

$$\alpha = \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{y} \cdot (\sqrt[3]{2} - 1).$$

A dalšími úpravami získáme

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{1 - 1/\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2} \doteq 1,26.$$

Strunu tedy musíme pro přeladění z tónu D na tón E napnout 1,26násobně více, než kolik jsme ji povolovali pro získání tónu C. Vyjádřeno úhlem otočení kolíčku je to 230° .⁷

Marble

Úloha 5.4 – Spací pořádek (3b + 1b)

Zadání:

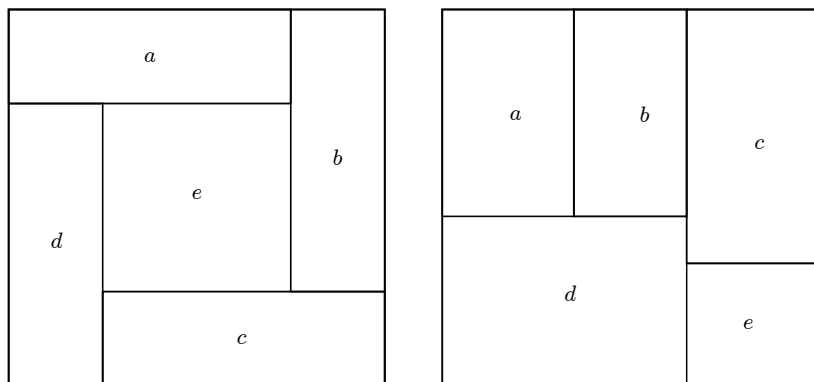
Sestrojte pět obdélníků se stranami nabývajícími hodnoty 1 až 10, přičemž každou délku je možno použít pouze jednou. Udělejte to tak, aby se z nich dal sestavit čtverec. Uveďte čtyři různé sady takových obdélníků a jejich poskládání do čtverce. Bonusový bod dostanete, pokud dokážete, že více různých poskládání neexistuje.

Řešení:

V prvním kroku se zamyslíme nad možným uspořádáním obdélníků do čtverce. Obecně máme uspořádání s jedním obdélníkem uprostřed a ostatními na kraji, třemi obdélníky při jedné straně a dvěma při protilehlé straně, čtyřmi obdélníky při jedné straně a jedním při protilehlé a konečně pěti obdélníky při obou protilehlých stranách.

Ukážeme, že při naší podmínce na délky stran jiné uspořádání než s jedním obdélníkem uprostřed nemůže nastat. Názorně je to vidět z obrázku 2 vpravo. Máme 3 obdélníky (a , b , c) přiléhající (bez újmy na obecnosti) k horní straně čtverce, zbytek musí vyplnit obdélníky d a e . Tedy existuje strana obdélníka (d nebo e), která sousedí se dvěma stranami obdélníků a , b a c . Aby tato strana byla rovná, musí se výška těchto obdélníků rovnat (oba přiléhají k horní straně čtverce),

⁷Kvůli zanedbání změny hustoty bude skutečné x o trochu menší a y naopak větší. Pokud vyjdeme z výše uvedeného odhadu 2% chyby pro každou z těchto hodnot, měl by být správný poměr asi o 4% vyšší a potřebný úhel otočení se bude blížit k 240° .



Obrázek 2: Příklady uspořádání obdélníků do čtverce

což je spor s tím, že každé dvě strany jsou různě dlouhé. Stejnou myšlenku použijeme při vyvracení ostatních uspořádání.

Dále zjistíme, jaký obsah může hledaný čtverec mít. Nejmenší možný obsah dostaneme násobením největších rozměrů s nejmenšími:

$$10 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 110$$

Naopak největší obsah získáme násobením největších rozměrů mezi sebou:

$$10 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 190$$

Odmocněním a zaokrouhlením na horní (respektive dolní) celou část vyjde, že délka strany čtverce je mezi jedenácti a třinácti.

Pro další úvahy si označíme délky jednotlivých stran v jediném možném uspořádání jako na obrázku 3. Pro stranu čtverce \check{c} musí strany obdélníků splňovat následující podmínky:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= \check{c} \\ d_1 + c_1 &= \check{c} \\ a_2 + d_2 &= \check{c} \\ b_2 + c_2 &= \check{c} \end{aligned} \quad (1)$$

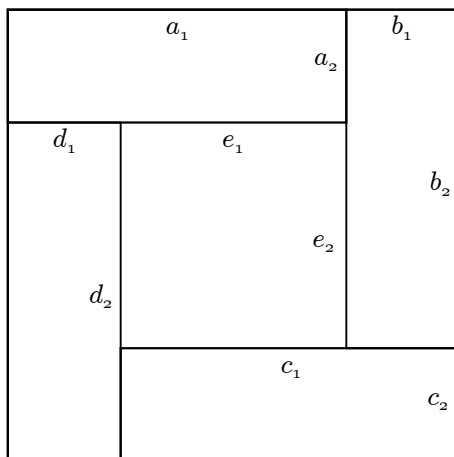
$$\begin{aligned} d_1 + e_1 + b_1 &= \check{c} \\ a_2 + e_2 + c_2 &= \check{c} \end{aligned} \quad (2)$$

Příklad nyní vyřešíme pro každou délku strany čtverce zvlášť.

Případ $\check{c} = 11$

Nejdříve najdeme všechny dvojice čísel z množiny $\{1, \dots, 10\}$, které mohou řešit rovnice (1):

$$\{10, 1\}, \{9, 2\}, \{8, 3\}, \{7, 4\}, \{6, 5\}$$



Obrázek 3: Značení stran obdélníků

a také všechny trojice, které splňují (2):

$$\{8, 2, 1\}, \{7, 3, 1\}, \{6, 4, 1\}, \{6, 3, 2\}, \{5, 4, 2\}$$

V trojicích hledáme disjunktní dvojice (délky stran se nemohou opakovat). Taková tam je jen jedna: $\{7, 3, 1\}$, $\{5, 4, 2\}$. V této šestici čísel nyní zkusíme najít dvojici splňující (1) tak, aby jeden člen z dvojice byl v první trojici a druhý ve druhé trojici (obdélník musíme vybrat takto, protože sice nemusí mít strany se součtem 11, ale zbylá dvě čísla z trojic budou přiléhat ke straně čtverce, a tedy potřebujeme, aby doplněk do 11 k těmto číslům zůstal nepoužitý) – tak dostaneme rozměry obdélníka uprostřed. Jediným řešením je dvojice $\{7, 4\}$, máme tedy $e_1 = 7, e_2 = 4$ (řešení s prohozenými indexy bude stejné, jen otočené o 90°). Podle rovnice (2) dosadíme do dalších proměnných: $b_1 = 1, d_1 = 3, a_2 = 5, c_2 = 2$ nebo $b_1 = 1, d_1 = 3, a_2 = 2, c_2 = 5$. To je vše, neboť opačným dosazením do první rovnice získáme jen stejná řešení otočená o 180° .

Z těchto údajů už můžeme dopočítat zbylé proměnné a získat celá řešení:

$$a_1 = 10, a_2 = 5, b_1 = 9, b_2 = 1, c_1 = 8, c_2 = 2, d_1 = 3, d_2 = 6, e_1 = 7, e_2 = 4$$

$$a_1 = 10, a_2 = 2, b_1 = 1, b_2 = 6, c_1 = 8, c_2 = 5, d_1 = 3, d_2 = 9, e_1 = 7, e_2 = 4$$

Případ $\check{c} = 12$

Přípustná řešení (1) jsou: $\{10, 2\}, \{9, 3\}, \{8, 4\}, \{7, 5\}$. Obdélník uprostřed tedy musí mít rozměry $e_1 = 6$ a $e_2 = 1$. Z řešení (2) nás tedy zajímají jen trojice obsahující buď 1, nebo 6: $\{9, 2, 1\}, \{8, 3, 1\}, \{7, 4, 1\}, \{6, 4, 2\}$. Jediná trojice obsahující 6 je $\{6, 4, 2\}$ a jediná s ní disjunktní je $\{8, 3, 1\}$. Pro tyto trojice ale neexistuje

žádné řešení, jelikož buď $e_2 + c_2 = 4 = d_2$, nebo $e_2 + a_2 = 4 = b_2$, což je ve sporu s tím, že 4 dosadíme za b_1 nebo d_1 z první trojice.

Případ $\check{c} = 13$

Řešení (1) vychází: $\{10, 3\}$, $\{9, 4\}$, $\{8, 5\}$, $\{7, 6\}$. Uprostřed tedy musí být obdélník 1×2 . Trojice, které řeší (2) a zároveň obsahují buď 1, nebo 2:

$$\{1, 3, 9\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 5, 7\}, \{2, 3, 8\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 6\}.$$

Disjunktní jsou následující dvojice trojic:

$$\{\{1, 5, 7\}, \{2, 3, 8\}\}, \{\{1, 3, 9\}, \{2, 4, 7\}\}, \{\{1, 3, 9\}, \{2, 5, 6\}\}, \{\{1, 4, 8\}, \{2, 5, 6\}\}.$$

Dvojice $\{\{1, 5, 7\}, \{2, 3, 8\}\}$, $\{\{1, 3, 9\}, \{2, 4, 7\}\}$, $\{\{1, 4, 8\}, \{2, 5, 6\}\}$ však musíme vyloučit ze stejného důvodu, jako v případě se stranou délky 12. Z trojic $\{1, 3, 9\}$ a $\{2, 5, 6\}$ dostáváme analogicky jako v případě se stranou délky 11 následující dvě řešení:

$$a_1 = 4, a_2 = 5, b_1 = 9, b_2 = 7, c_1 = 10, c_2 = 6, d_1 = 3, d_2 = 8, e_1 = 1, e_2 = 2$$

$$a_1 = 4, a_2 = 6, b_1 = 9, b_2 = 8, c_1 = 10, c_2 = 5, d_1 = 3, d_2 = 7, e_1 = 1, e_2 = 2$$

Celkem jsme tedy získali čtyři řešení a jelikož jsme o všech ostatních variantách ukázali, že nemohou nastat, jsou to řešení opravdu všechna. Úlohu bylo možné vyřešit i pomocí programování. Je škoda, že jsme žádné takové řešení nedostali.

Anet

Řešení úloh 6. série

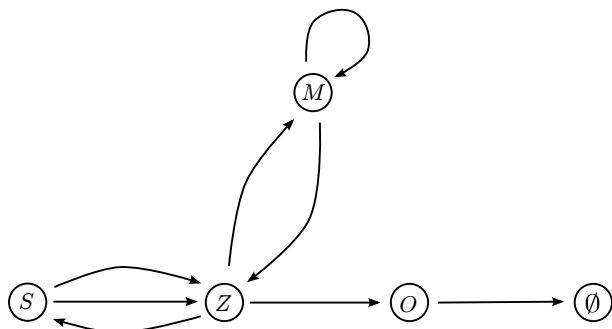
Úloha 6.1 – Barevné klíče a dveře (4b)

Zadání:

V místnosti je právě N barevných dveří (některé dveře mohou mít stejnou barvu, ale nemusí). Za každými dveřmi krom jedné je barevný klíč a jeden takový klíč má navíc Alenka v ruce. Klíč dokáže odemknout vždy jen dveře stejné barvy, jakou má on sám (je-li takových více, pak dokáže odemknout libovolné z nich), ale zámky jsou zrezlé a po odemčení se klíč v zámku zasekne a nejde vyndat (Alenka tedy nemůže mít u sebe nikdy více než jeden klíč). Na každých dveřích je navíc napsáno, jaký klíč se za nimi nachází (nebo že tam klíč není). Najděte algoritmus, který Alence poradí jak postupovat, když chce odemknout všechny dveře, nebo jí řekne, že to není možné. A jelikož je Alenka podezřívavá, tak nezapomeňte pořádně vysvětlit, proč váš algoritmus opravdu funguje.

Řešení:

Nejjednodušší způsob, jak najít správný postup, je vyzkoušet všechny možnosti. Můžeme to udělat například prohledáváním do hloubky. Pokud si můžeme vybrat,



Obrázek 4: Graf pro situaci se dvěma starorůžovými dveřmi za nimiž je zelený klíč; třemi zelenými dveřmi – za prvními je starorůžový klíč, za druhými modrý klíč a za třetími oktarínový klíč; dvěma modrými dveřmi – za prvními je modrý klíč, za druhými je zelený klíč a oktarínovými dveřmi, za nimiž není žádný klíč. Alenka začíná se starorůžovým klíčem v ruce.

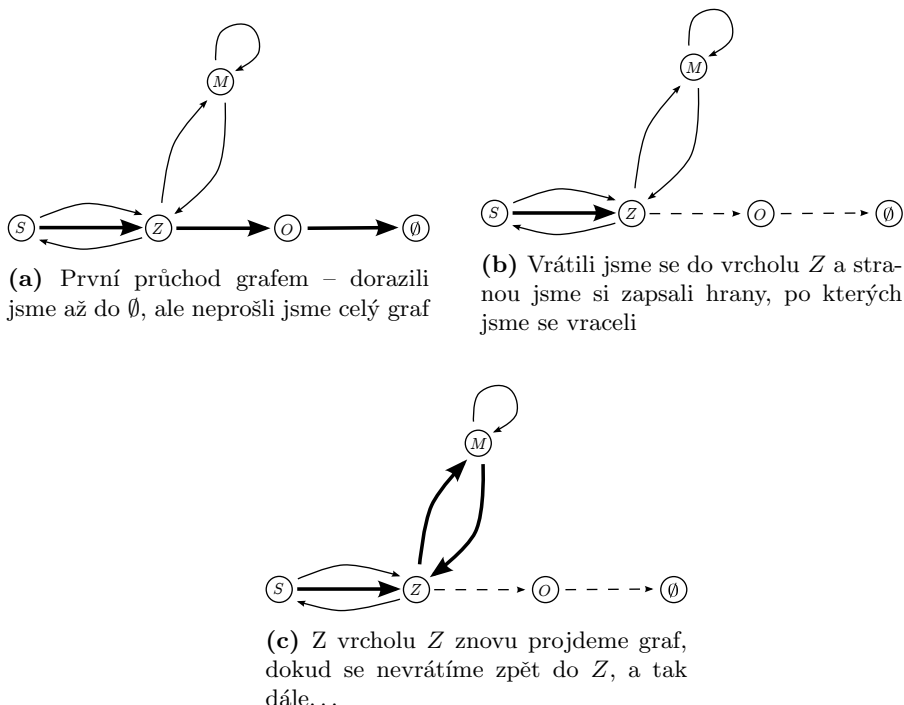
kteří dveře odemknout, tak odemkneme libovolné z nich (samozřejmě vybíráme jen z těch, které jsme ještě během cesty nepoužili). Dostaneme-li se v nějakou chvíli do slepé uličky, pak se vrátíme zpět k nejbližšímu místu, kde jsme se rozhodli, a zkusíme jiné dveře. Pokud už jsme zkusili v daném místě všechny možnosti, pak se vrátíme ještě o rozhodnutí zpět, a tak dále. Ve finále tedy buď narazíme na správnou cestu, nebo projdeme všechny možnosti a zjistíme, že taková cesta neexistuje.

Nevýhodou ovšem je, že v nejhroším případě můžeme udělat řádově 2^N kroků. Pojdme tedy toto řešení zlepšit. Všimněme si, že potřebujeme vlastně informace typu „Mám klíč barvy B , klíče kterých barev mohu získat?“. Sestavíme si tedy orientovaný multigraf⁸ – vrchol B bude odpovídat stavu „mám klíč barvy B “, hrana z B do C pak odpovídá dveřím barvy B za nimiž je klíč barvy C – přičemž za každé takové dveře musí být v grafu jedna hrana.

Naším cílem je nalézt v tomto grafu *Eulerovský tah* (pro zkrácení ET), tedy „cestu“, která projde všechny hrany (dveře) právě jednou a začne ve vrcholu S (barva klíče, který má Alenka na začátku) a skončí ve vrcholu \emptyset (vrchol odpovídající tomu, že Alenka nemá žádný klíč). Je zřejmé, že ET existuje pouze tehdy, když je graf slabě souvislý (mezi vrcholy u a v existuje cesta z u do v nebo naopak) a když do každého vrcholu vede stejně hran, jako z něj hran vychází, s výjimkou S , ze kterého vychází o hranu více než vchází, a \emptyset , kde je tomu naopak (tj. pro každou barvu je stejně klíčů jako dveří). Obě tyto vlastnosti dokážeme zkontrolovat v lineárním čase vůči počtu dveří.

Předpokládejme tedy, že náš graf splňuje předchozí podmínky. Nejdříve pro-

⁸Neděs se tohoto výrazu, orientovaný graf jsou v podstatě jen body (vrcholy) spojené šipkami (hranami); předpona multi znamená, že mezi dvěma vrcholy může vést více než jedna hrana a že může vést hrana z vrcholu do něj samého



Obrázek 5: Zpracování grafu z obrázku 4 algoritmem

chážíme graf z S rovnou za nose, dokud můžeme (tedy procházíme do hloubky, dokud to jde). Skončit můžeme jen tak, že dojdeme do \emptyset , jinak by nebyla splněna druhá podmínka. Pokud jsme prošli všechny hrany, pak jsme vyhráli a máme ET. V opačném případě máme nějaký tah T . Ten můžeme rozdělit na UvW , kde v je první vrchol od konce, ze kterého vedou neprojité hrany. Po W se vrátíme zpět do v a W si přitom ukládáme stranou jako konec tahu – ten už se nezmění – a poté jej mažeme (tedy vlastně návrat při prohledávání do hloubky). Jakmile jsme ve v , tak můžeme pokračovat dále po zatím neprojitých hranách (což odpovídá zkoušení nové možnosti v prohledávání do hloubky). Jsou-li splněny předchozí podmínky, pak se zase někdy vrátíme do v a celý postup opakujeme, dokud neprojdeme celý graf. Jak je vidno, tento algoritmus poběží lineárně vůči počtu dveří (na každou hranu sáhneme jen dvakrát – když ji poprvé přidáme a pak když ji mažeme).

$\mathcal{O}(N)$ dra

Úloha 6.2 – Homogenní oslava (3b)

Zadání:

Na oslavě se sešlo třicet lidí, z nichž každý znal právě 6 jiných (známosti jsou

vzájemně). Řekneme, že trojice lidí je homogenní, pokud se každý dva lidé z trojice znají, nebo pokud se naopak žádní dva neznají. Kolik nejvíce homogenních trojic může být na oslavě?

Řešení:

Představme si oslavu jako 6-regulární⁹ graf G o 30 vrcholech (a 90 hranách). Pro začátek nás bude zajímat počet homogenních trojic obsahujících námi vybraný vrchol u . V zájmu lehkého zobecnění si označíme p počet vrcholů a q počet hran.

Zaveďme si následující značení a pojmy:

- $N(u)$ je množina všech vrcholů sousedících s u v G
- $d(u)$ je stupeň vrcholu¹⁰ u v G
- $t(u)$ je počet dvojic vrcholů vw takových, že uv , uw a vw jsou hrany v G ¹¹
- \bar{G} je graf komplementární k G – \bar{G} obsahuje hranu uv právě pokud ji G neobsahuje.
- $\bar{N}(u)$, $\bar{d}(u)$, $\bar{t}(u)$ definujeme stejně jako $N(u)$, $d(u)$, $t(u)$, ale za použití \bar{G}

Všimněme si, že $t(u)$ je počet hran mezi vrcholy z $N(u)$ v G (analogicky pro $\bar{t}(u)$). Dále platí $|N(u)| = d(u) = 6$ a $|\bar{N}(u)| = p - d(u) - 1 = 23$. Nyní si zadefinujeme $D(u)$ jako $\sum_{v \in N(u)} d(v)$, analogicky zadefinujeme i $\bar{D}(u)$. Z toho, že je G 6-regulární, plyne, že $D(u) = 6 \cdot 6 = 36$ pro každý vrchol u . Z 6-regularity G taktéž vyplývá, že \bar{G} je 23-regulární, tedy $\bar{D}(u) = 23 \cdot 6 = 138$.

Buď u libovolný vrchol. Pak pro každý vrchol v z G platí, že buď $v = u$, nebo $v \in N(u)$, nebo $v \in \bar{N}(u)$. Tedy v součtu $D(u) + \bar{D}(u) + d(u)$ se vyskytne $d(v)$ pro každý vrchol právě jednou – buď jako člen v součtu $D(u)$ (pokud $v \in N(u)$), nebo jako člen součtu $\bar{D}(u)$ (pokud $v \in \bar{N}(u)$), nebo jako $d(u)$ (pokud $v = u$). Součet $D(u) + \bar{D}(u) + d(u)$ je proto přesně roven součtu stupňů všech vrcholů. A konečně, součet stupňů všech vrcholů je dvakrát počet hran – každá hrana do toho součtu přispěje právě dvakrát – jednou za každý konec. Tedy $D(u) + \bar{D}(u) + d(u) = 2q$.

K $D(u)$ přispívá $d(u)$ konců hran vedoucích z $N(u)$ do u a $2t(u)$ konců hran vedoucích mezi vrcholy v $N(u)$. Zbývajících $D(u) - d(u) - 2t(u)$ konců hran náleží k hranám vedoucím z $N(u)$ do $\bar{N}(u)$

Množina $\bar{N}(u)$ obsahuje $p - d(u) - 1$ vrcholů. Potenciálně tedy mezi nimi může vést až $(p - d(u) - 1) \cdot (p - d(u) - 2)/2$ hran. Víme ale, že právě $\bar{t}(u)$ hran tam není – ty jsou v \bar{G} . K $\bar{D}(u)$ tedy přispívá $(p - d(u) - 1)(p - d(u) - 2) - 2\bar{t}(u)$ konců hran vedoucích mezi vrcholy v $\bar{N}(u)$. Zbývajících $\bar{D}(u) - (p - d(u) - 1)(p - d(u) - 2) + 2\bar{t}(u)$ konců hran náleží hranám vedoucím z $N(u)$ do $\bar{N}(u)$

Tudíž

$$D(u) - d(u) - 2t(u) = \bar{D}(u) - (p - d(u) - 1)(p - d(u) - 2) + 2\bar{t}(u),$$

⁹To jest, z každého vrcholu vede právě šest hran.

¹⁰Stupeň vrcholu je počet jeho sousedů

¹¹Jednoduše řečeno, $t(u)$ je počet trojúhelníků obsahujících vrchol u

z čehož můžeme vyjádřit pro nás zajímavý součet

$$\begin{aligned} t(u) + \bar{t}(u) &= (D(u) - \bar{D}(u) - d(u) + (p - d(u) - 1)(p - d(u) - 2))/2 \\ &= (D(u) - (2q - D(u)) + (p - d(u) - 1)(p - d(u) - 2))/2 \\ &= D(u) - q + (p - d(u) - 1)(p - d(u) - 2)/2. \end{aligned}$$

U našeho grafu pro každý vrchol vyjde stejný výsledek (je 6-regulární) $36 - 90 + (30 - 6 - 1)(30 - 6 - 2)/2 = 199$. No a jelikož máme 30 takových vrcholů a každá trojice by byla započítána třikrát (jednou pro každý její vrchol), kýžený výsledek je $199 \cdot 30/3 = 1990$.

Matej

Úloha 6.3 – Souboj s deštěm (3b)

Zadání:

Máte nekonečně tenkou desku z cukru. Nesete si ji domů pod úhlem α , když tu zrovna začne pršet pod úhlem β . Kapky deště se pohybují rychlostí v . Jak rychle musíte jít, aby se vám deska nerozpustila?

Řešení:

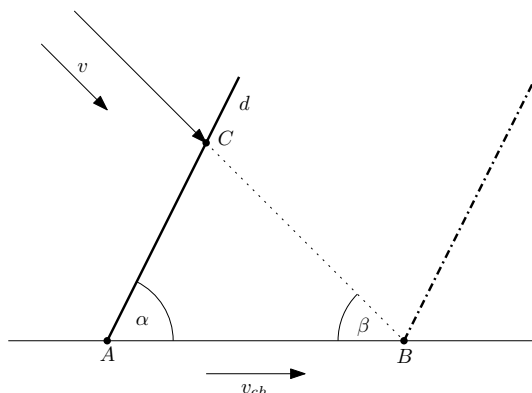
Ve většině řešení byla zmíněna správná myšlenka, že je potřeba, aby deska „uhýbala“ kapkám, které se k ní blíží, ale nedohnala kapky, které jsou pod ní. Protože všechny kapky padají stejně rychle a rovnoběžně, stačí nám vybrat si jednu kapku, která by dopadla na desku, pokud by se deska nehýbala. Pohybem desky musíme zajistit, aby byla tato kapka stále stejně daleko od desky, protože pokud by se vzdálenost snižovala, pak by na desku dopadla nějaká kapka, která byla na začátku k desce blíže. Pokud by se naopak vzdálenost zvyšovala, „dohnali“ bychom nějakou kapku, která byla pod deskou (pokud deska je v pohybu, tak takové kapky existují).

Snažíme se tedy udržovat konstantní vzdálenost mezi vybranou kapkou a deskou. Kapka letí pod úhlem β rychlostí v , desku neseme pod úhlem α . Pokud máme kapku těsně před dotykem v bodě C , během jejího pádu na zem v bodě B musíme spodní konec desky přesunout z bodu A do bodu B . Nyní použijeme sinovou větu a získáme vzdálenost, o kterou musíme desku posunout:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} &= \frac{|BC|}{\sin(\alpha)} \\ |AB| &= \sin(\pi - \alpha - \beta) \cdot \frac{|BC|}{\sin(\alpha)} \end{aligned}$$

Čas letu kapky a posouvání desky je stejný, tedy

$$\begin{aligned} \frac{|BC|}{v} &= \frac{|AB|}{v_{ch}} \\ v_{ch} &= v \cdot \frac{|AB|}{|BC|} \end{aligned}$$



Obrázek 6: Schéma kapky padající na pohybující se desku

Nyní už stačí jen dosadit a spočítat výsledek:

$$v_{ch} = v \cdot \frac{\sin(\pi - \alpha - \beta) \cdot \frac{|BC|}{\sin(\alpha)}}{|BC|} = v \cdot \frac{\sin(\pi - \alpha - \beta)}{\sin(\alpha)}$$

Zbývá ještě zmínit speciální případy. Pokud máme desku pod stejným úhlem jako déšť, tedy $\alpha = \pi - \beta$, pak nesmíme s deskou nijak hýbat. Ke stejnému závěru dojdeme i použitím vzorce, v němž nám trojúhelník ABC degeneruje na případ $\beta = \pi - \alpha$, $\gamma = 0$, a tudíž i z něj vyjde nulová rychlost. Pokud máme desku vodorovně, tedy $\alpha = 0$, pak nám libovolně rychlý pohyb nepomůže, vždy nám nějaká kapka na desku dopadne a rozpustí ji, vzorec v tomto případě má nulu ve jmenovateli, tudíž ho zde nelze použít.

Jethro

Úloha 6.4 – Výkonný vřhač (3b)

Zadání:

Uřčete průměrný výkon vřhače koule, který při hodu zrychlí kouli o hmotnosti $7,26 \text{ kg}$ z klidu na rychlost $14,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Doba od začátku pohybu do upuštění koule je $0,16 \text{ s}$. Experimentálně sami odhadněte vertikální vzdálenost mezi počáteční polohou koule a polohou, kdy koule opouští ruku.

Řešení:

K této úloze jsme obdrželi hned několik naprosto správných řešení. Pro ty, kterým se do ní nechtělo, a nebo uvažovali jinak, ho teď rozebereme.

Průměrný výkon P je definován jako celková práce W dělená celkovým časem t . Čas známe, takže musíme zjistit energii, kterou vřhač kouli dodal. Urychlil ji na rychlost $v = 14,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, jak víme ze zadání – takže jí dodal kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Ale navíc, jak bylo také naznačeno v zadání, vrhač kouli zvedne o nějakou výšku h , dodá jí tedy potenciální energii v tíhovém poli Země

$$E_p = mgh.$$

Onu výšku h jste měli sami určit, nejlépe experimentálně. Vzhledem k tomu, že je povolených vícero technik vrhání koulí (podle toho, jak moc se ve startovní pozici předkláníte a jestli, resp. jak moc, v koncové pozici vyskakujete), se vaše výsledky nacházely v širokém rozpětí od 50 cm do 1 m.

Průměrný výkon vrhače tedy je

$$P = \frac{1/2 mv^2 + mgh}{t} = 4,7 \text{ až } 4,9 \text{ kW}.$$

Někteří z vás se snažili počítat vykonanou práci podle vztahu $W = F/s$, ten ale platí jen pro *rovnoměrně* zrychlený pohyb, což vrh koulí rozhodně není. Tito řešitelé se dobrali také přibližně o třetinu vyšších výkonů.

Zuzka

Řešení témat

Téma 1 – Papírová letadélka

Na závěr ročníku bych ráda poděkovala řešitelům, kteří k tomuto tématu poslali nějaký příspěvek. Ať už byl kratší či rozsáhlejší, zabýval se jedním podproblémem zmíněným v zadání, či se zamýšlel nad tématem po svém. Na poslední chvíli nám dorazil ještě článek Mgr.^{MM} Dominiky Jochcové, který zde otiskujeme. I přes jisté nedostatky je velmi zajímavý. Autorka v něm předkládá experiment s letadélky, jejichž náběžná hrana není zanedbatelná. Ráda bych obzvláště pochválila návrh experimentu promyšlený tak, aby testoval její domněnku a vyloučil co nejvíc jiných vlivů!

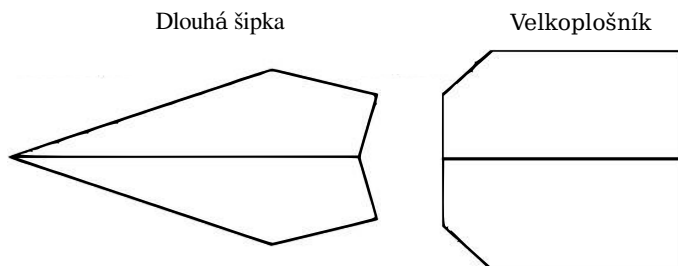
Zuzka

Analýza letu letadélka – Dodatek A (6b)

Mgr.^{MM} Dominika Jochcová

Na základě komentáře odborné redakce jsem se rozhodla pokračovat ve zkoumání letových vlastností papírových letadélek, tento článek publikuji jako shrnutí dalších poznatků navazujících na téma č. 1 – Papírová letadélka. Zaměřuji se na vznik a projevy vztlakové síly u modelů letadélek s zanedbatelným profilem křídel.

Poznámka redakce: Opět zde nastávají problémy v terminologii „vztlakové síly“, „vztlaku“ a „aerodynamických sil“ obecně.



Obrázek 7: Srovnání dlouhé šipky a velkoplošníku

Srovnávání doletu – vysvětlení

Odporovou sílu lze aproximovat vztahem

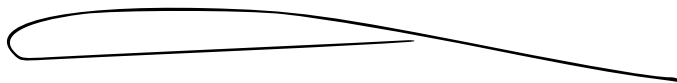
$$F_o = 1/2C_\rho Sv^2,$$

kde S je v tomto případě průmět plochy do vodorovné roviny, C je konstanta charakterizující daný tvar a povrch obtékaného tělesa (součinitel odporu), v je rychlost a ρ je hustota vzduchu.

Poznámka redakce: Zde je chybně interpretován rozklad sil do jednotlivých směrů. Ve škole nás učili, že můžeme síly rozkládat jako součet dvou na sebe kolmých vektorů, a pak z toho vycházet pro jejich skládání. To skutečně lze, ale jen s těmi silami – nikoli s veličinami, na nichž tyto síly závisí, jako je v tomto případě plocha S . Pokud chceme získat část odporové síly, která míří vzhůru, musíme nejprve spočítat odporovou sílu s plochou, na které skutečně závisí, tj. průmětem kolmým na směr pohybu, a pak teprve sílu rozložit na vodorovnou a svislou složku.

Jako obecný předpoklad pro maximalizaci doletu byla v minulém článku uvedena podmínka pro vyvážení letadélka – aerodynamický střed se nachází při letu zhruba v oblasti těžiště. Experiment zdánlivě ukázal, že je tento předpoklad chybný, protože velkoplošník měl obecně větší dolet než dlouhá šipka, ale nemělo by být opomenuto, že součinitel odporu (je určen tvarem obtékaného tělesa) ačkoliv jsou obsahy nosných ploch obou modelů zhruba stejné, tvarově se podstatně liší. V případě modelu dlouhá šipka okolní vzduch obtéká ve vodorovném průřezu relativně úzký šestiúhelník, u modelu velkoplošník je obtékán šestiúhelník podstatně „širší“ (má menší obvod, viz obr. 7). Okolní vzduch bude lépe obtékat relativně užší objekty, to má za následek, že dlouhá šipka spadne relativně rychleji, a stihne tedy urazit menší dráhu. Kdežto velkoplošník při letu plachtí právě díky vhodně tvarované nosné ploše.

Dalším důvodem, proč velkoplošník doletěl dál, je stabilizační zařízení – obdoba vingletů, které u velké šipky chybí.



Obrázek 8: Průřez křídlem tupoplošníku

Vztlakové vlašťovky

V nepřeborném množství typů papírových letadel jsou i takové, kde profil náběžné hrany křídel není zanedbatelný – u těchto modelů bychom neměli zanedbat ani vztlakovou sílu vznikající na základě rozdílných tlaků na svrchní a spodní plochu křídla. Tento rozdíl tlaků je způsobený rozdílnými rychlostmi proudění vzduchu nad horní a pod dolní plochou křídla. Rozdíl rychlostí vzniká v důsledku asymetrického tvaru křídla – horní plocha je víc klenutá, dolní plocha méně zakřivená. Vzduch, který obtéká křídlo, má kolem horní plochy delší dráhu než v dolní části, z Bernoulliho rovnice vyplývá, že při vyšší rychlosti proudící tekutiny je tlak na okolí nižší – křídlo je „tlačeno“ vzhůru. Tento článek shrnuje výsledky experimentu, který měl zjistit, jak velký význam má vztlaková síla u některých typů papírových letadel.

Vztlakový tupoplošník A

Poznámka redakce: Kvůli černobílému tisku jsme bohužel nemohli fotografie tupoplošníků zveřejnit v časopise. Najít je můžete na našem webu v sekci Témata.

Pro tyto účely byl vytvořen model, který byl podle charakteristického tvaru pojmenován vztlakový tupoplošník A a B, viz obrázek, návod na složení přiložen ve zdrojích (youtube tutoriál). Náběžná hrana křídla je v nejširším místě okolo 3,5 mm široká a na koncích (myšleno ve směru letu) je jen jedna vrstva papíru, průřez křídla vypadá zhruba jako na obrázku 8. Vztlakový tupoplošník A je typ kluzáku, u kterého se těžiště nachází za aerodynamickým středem (viz kapitola 1.3 Klouzavý let minulého článku), při letu tedy dochází k „houpání“.

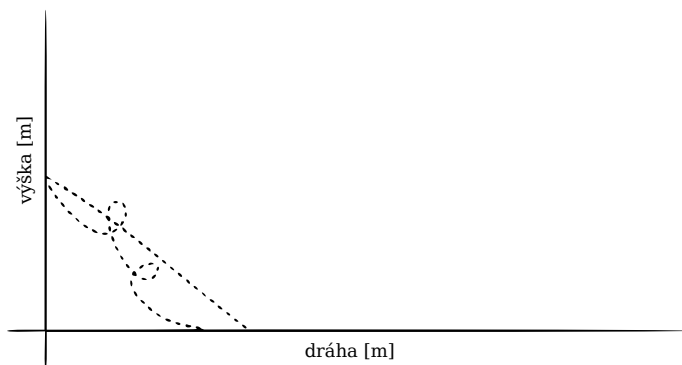
Přibližnou trajektorii letu znázorňuje graf na obr. 9; patrné jsou stoupavé tendence modelu krátce po vypuštění.

Nevztlakový tupoplošník A

Pro zjištění, zda jsou stoupavé tendence při letu skutečně způsobené vztlakovou silou – danou zanedbatelným profilem křídla, byl sestaven model nevztlakový tupoplošník A. Tento model je kopií vztlakového tupoplošníku, ale slepováním (nikoli skládáním) je zajištěné, že profil křídel bude zanedbatelný. Je nutné, aby byl model vyvážený stejně jako vztlakový tupoplošník – polohu těžiště určíme podle návodu v minulém článku, kapitola 1.2.1. *Tíhová síla* z minulého dílu (nebo jej můžeme určit experimentálně, což bude rychlejší), musíme vhodným způsobem docílit, aby bylo těžiště nevztlakového tupoplošníku umístěno stejně (např. můžeme vhodně kápnout trochu lepidla). Zároveň je důležité, aby hmotnost obou modelů byla shodná (nebo alespoň co nejpodobnější). Z grafu vidíme,



Obrázek 9: Graf přibližné trajektorie vztlakového tupoplošníku A



Obrázek 10: Graf převládajících trajektorií letu nevztlakového tupoplošníku A

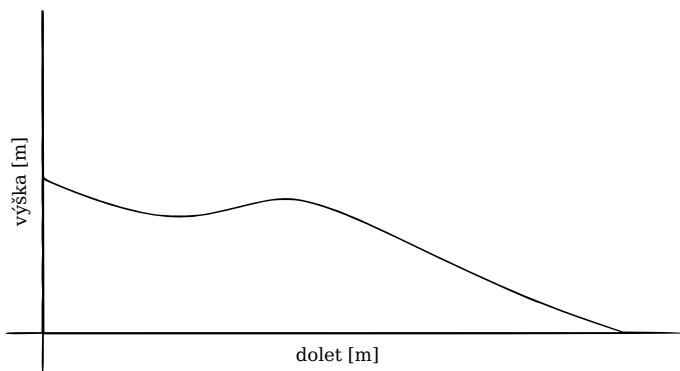
že u letu nevztlakového tupoplošníku převládaly dvě hlavní tendence – chaotický vířivý let a let po trajektorii aproximovatelné úsečkou.

Vztlakový tupoplošník B

Jako další model pro testování působení vztlakové síly u papírových letadel byl vytvořen vztlakový tupoplošník B. Popis konstrukce je uvedený ve zdrojích. Jedná se taktéž o typ kluzáku s polohou těžiště za aerodynamickým středem, model je podstatně zatížen v přední části, maximální profil křídla se pohybuje okolo 4,5 mm.

Závěr

Výsledky mého měření mě úplně nepřesvědčily o důležitosti působení vztlakové síly u papírových letadel, myslím, že by bylo vhodné experiment opakovat s více



Obrázek 11: Graf trajektorie letu vzlakového tupoplošníku B

kopíemi modelu nevzlakový tupoplošník A (pro účel tohoto měření byly sestaveny pouze dva). Špatné letové vlastnosti tohoto modelu byly pravděpodobně způsobené i deformacemi materiálu, ke kterým došlo následkem lepení. Každopádně si myslím, že vzlaková síla je i u takových systémů, jako je vlašťovka ve vzduchu, nezanedbatelná, o čemž mě přesvědčil let tupoplošníku B. V souvislosti s tématem vzlakové síly a různých typů tvarů křídel ještě nebylo v tomto článku zmíněné prohnutí křídel, které také podstatně ovlivňuje let z hlediska stoupavých a klesavých tendencí. Vždyť i konstruktéři prvních letadel nevěděli, jakou výhodu má rozšíření profilu křídla na specifických místech, inspiraci hledali nejprve v přírodě, tedy u létavých ptáků a kopírovali typické prohnutí ptačích křídel.

Poznámka redakce: Tady je míchán vliv vzlakové síly (závisí na objemu, vzorec autorka neuvedla: $F_v = \rho V g$) a aerodynamické síly dle Bernoulliho rovnice. Navíc je tu operováno se špatně definovanou odporovou silou. Takže není zcela jasné, co že to u papírových letadélek není zanedbatelné.

Závěrem bych chtěla dodat, že popis konkrétního letu určitého modelu vlašťovky není z mého pohledu vůbec jednoduchý, hlavně díky neznalosti výchozích podmínek.

Papírový bumerang

Na úplný závěr příkládám své video¹², ve kterém je testován model papírového letadélka, který se při určitém způsobu hodů vrátí zpět. Tento typ bumerangu je ideální pro fanoušky papírových letadélek, kteří se z důvodu omezení pohybového aparátu (nebo nadměrné lenosti) nezládají neustále honit za svými papírovými skládačkami.

¹²https://youtu.be/N5-u7fzf_E8

Zdroje

How to Make an AWESOME boomerang paper airplane | Psychotic Cyclone (Tri Dang) [online]. 2014 [cit. 2015-06-05].

Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=f2BzZG9Y54Y>

How to make a Paper Airplane that flies FAST | Trident (Tri Dang) [online]. 2014 [cit. 2015-06-05]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=GHRwTfoqUBU>

Analýza letu letadélka [online]. 2014 [cit. 2015-06-05]. Dostupné z: <http://mam.mff.cuni.cz/index.php?s=temata&cislo=1&prisp=jochcova1>

Téma 2 – Tvorba draka

K tvorbě draka přišel opět příspěvek od Prof.^{MM} Markéty Calábkové. Markétě se podařilo rozluštit, jaké různé tvary mohou mít čtyřúhelníky, pokud máme dány délky a pořadí stran. Zjistila, že máme tři možnosti. Pro čtyři stejné délky dostaneme obrázek z příspěvku v minulém čísle, pro deltoid či kosodélník dostaneme dvě kružnice nalepené na sebe ve dvou bodech a pro čtyřúhelníky s jednou výrazně delší stranou (např. 5,2,2,2) dostaneme pouhou kružnici. V případě, že zakážeme křížení a překrývání stran, rozpadají se naše spleené kružnice na oddělené oblouky, které už nevypadají tak hezky. Nakonec se Markéta na chvíli poohlédla po pětiúhelnících a vyslovila hypotézu, že odpovídající obrázky budou vypadat jako torus nebo několik torů, které se dotýkají v několika kružnicích. A to pro Tebe může být námětem k zamyšlení na dlouhé prázdninové večery. Ty obrázky, na které jsme narazili ke konci roku, se nazývají konfigurační prostory¹³ (mnohoúhelníků). Kromě matematiky se s nimi můžete potkat například v robotice a na internetu o nich najdete mnoho zajímavého.

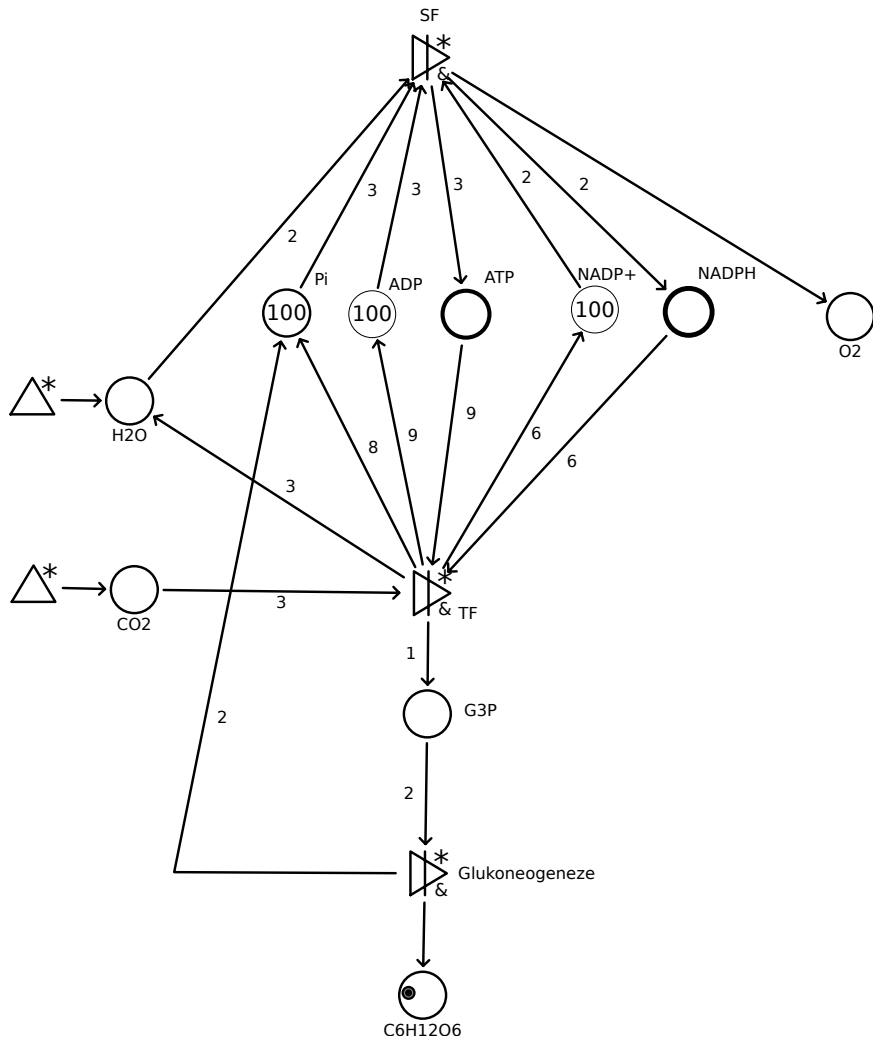
Pepa

Téma 3 – Reakce v miskách

K tomuto tématku v průběhu roku přišlo několik zajímavých schémat. Viděli jsme mimo jiné fungující buněčné dýchání mitochondrií, citrátový cyklus a fotosyntézu. Jsem rád, že alespoň pár řešitelům se tento interaktivní pohled na metabolismus buňky líbil. Sice jsme se nedostali dost daleko k tomu, abychom mohli začít spojovat jednotlivé kousky metabolismu, ale to nevadí. Půjďe mi, že ač k tomu nebyl určen, tak systém Machinations posloužil k usnadnění náhledu do fungování reakcí, které probíhají všude kolem nás. Prý se některým z vás podařilo Machinations využít i k vysvětlování látky spolužákům. Ačkoliv ročník i tématko již skončilo, nástroj Machinations bude i nadále dostupný a i já od vás rád uslyším o vašich úspěších v kreslení schémat a v případě potřeby poradím.

Matej

¹³anglicky configuration spaces



Obrázek 12: Schéma fotosyntézy od Mgr.^{MM} Jana Pokorného

Vizualizace fotosyntézy

(6b)

Mgr.^{MM} Jan Pokorný

V rámci tématka jsem se rozhodl vytvořit vizualizaci procesu fotosyntézy. Vzhledem k tomu, že fotosyntéza je velmi složitý proces, rozhodl jsem se, že model bude poměrně schematický.

Fotosyntéza je název chemického procesu, který probíhá v buňkách zelených rostlin v organelách chloroplastech. Vstupními látkami jsou oxid uhličitý a voda, získané z okolního prostředí, výstupní látkou je pak glukóza, případně jiný cukr, který pak může rostlina dále zpracovat. Vedlejším produktem reakce je kyslík. Na procesu se podílí mnoho fotosyntetických barviv a dalších pomocných chemických látek.

Fotosyntézu můžeme rozdělit do dvou fází: světelné a temnostní. Světelná fáze může probíhat pouze za přítomnosti světla (fotolýza vody pomocí energie zachyceného fotonu), zatímco temnostní může probíhat i bez ní.

V levé části modelu vstupuje do systému voda a oxid uhličitý. Voda poté vstupuje do světelné fáze, kde proběhne fotolýza: uvolněný kyslík je vypuštěn do ovzduší, vodík je použit k přeměně nízkooenergetické sloučeniny NADP⁺ na NADPH s vyšší energií. Získaná energie je taktéž uložena ve formě tvorby ATP z ADP a organického fosfátu P_i.

Poznámka redakce: Zde je na místě vysvětlit, jak je to s těmi vysoko/nízkooenergetickým sloučeninami a ukládáním energie do molekul. Na první pohled by se mohlo zdát, že vytvořením vazby (např. mezi ADP a P) spotřebujeme energii, kterou pak rozbitím vazby získáme zpět. Ve skutečnosti je tomu přesně naopak, při vzniku vazby se energie uvolňuje – to je důvod, proč vůbec vazby vznikají, atomy se chtějí dostat do stavu s nižší energií. Tedy pokud chceme získat energii z ATP, musíme nejdříve trochou energie rozbit vazbu mezi ADP a P a mezi H a OH ve vodě a následně se při vzniku vazeb mezi P a H a ADP a OH uvolní větší množství energie, než jsme na začátku museli investovat. Ono „ukládání“ energie funguje naopak. To, že je molekula „vysokoenergetická“, znamená, že pokud jí rozložíme za správných podmínek, tak získáme energii.

V temnostní fázi je spotřebováván vzdušný oxid uhličitý. Pomocí energie získané ve světelné fázi a vodíků z NADPH je vytvořen glycerinaldehyd-3-fosfát, což je sloučenina literaturou obecně uváděna jako produkt fotosyntézy – rostlinou může být přímo využit jako zdroj energie, nebo může být pomocí procesu glukoneogeneze přeměněn na cukr. Stojí za zmínku, že ve schématu jsou dvojice látek s nižší/vyšší energií značeny stejnou barvou¹⁴, ale látka s vyšší energií je vyznačena tučným okrajem.

¹⁴Bohužel se nám barvičky do tisku propašovat nepodařilo, nicméně se jedná o dvojice ATP/ADP a NADPH/NADP⁺

Téma 4 – Dopad meteoritu

K tomuto tématu přišly pouze dva příspěvky, a to od Mgr.^{MM} Kláry Stefanové a Mgr.^{MM} Markéty Doležalové. Klára rozebírala katastrofické scénáře dopadu opravdu velkých meteoritů do vody a na souš. Provedla i přibližné výpočty energie dopadlých těles a na nich založila odhady vlivu jejich dopadu na život na Zemi. Některá tvrzení byla vzhledem k dostupným informacím až příliš odvážná, ale i takové „chyby“ jsou užitečné, pomáhají totiž formulovat další otázky, kterými se v rámci tématu dá zabývat. Přejeme vám dostatek odvahy do příštího ročníku.

Zuzka

Téma 5 – Pokrytí šachovnice

Na závěr tématu nám přišel rozsáhlý článek od Dr.^{MM} Jana Škváry, který navrhuje netvořit obrazce z neohrožených polí šachovnice, ale naopak z ohrožovaných. Podle počtu figur, kterými je pole ohrožováno, pak určí jeho barvu. Vzhledem k rozsahu článku ho zde navzdory jeho kvalitě neotiskujeme celý. Kompletní text včetně autorových programů pro simulaci vzniklých útvarů naleznete na našem webu na stránce tématu.

Kuba

Nový rozměr

(15b)

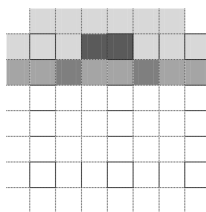
Dr.^{MM} Jan Škvára

Úvod

Ačkoli zadání tohoto tématu doporučuje zabývat se tvary, které vzniknou z těch polí šachovnice, která nejsou ohrožena žádnou figurou, je možné úkol přijmout tak, abychom řešili naopak útvary vzniklé z ohrožených polí, neboť při tomto pohledu na věc na šachovnici vznikne negativ obrazce, který by podle zadání vzniknout měl. Jeho tvar, který nás zajímá, tedy bude stejný, a obrazce se budou lišit pouze v použitých barvách, které zadání nezvažuje.

Právě díky této změně v zadání jsem u další práce mohl uplatnit svůj názor, že „ANO“ a „NE“ nejsou postačující, někdy ani správné, odpovědi. Namísto nich dávám přednost slovům „MOŽNÁ“, „ASI“, „NEJSPÍŠ“ apod., neboť jedině pomocí nich se dá vyjádřit míra pravdivosti daného výroku. Stejně tak i u polí na šachovnici se nehodlám nechat uspokojit prostou informací, zda je políčko ohroženo, či nikoli, a tak jsem se rozhodl v tomto tématu uvažovat také fakt, kolik různých šachových figur se během následujícího tahu může na dané políčko přesunout. Tuto informaci jsem na šachovnici vyznačil tak, že jsem na rozdíl od svých předchůdců, kteří se omezili pouze na černou a bílou barvu, začal využívat různé odstíny šedi a to tak, že čím je políčko tmavší, tím více figur ho v danou chvíli ohrožuje.

Pro lepší představu o mé myšlence přináším obrazec, který vznikne při takovém rozestavení šachových figur, při kterém obvykle začíná hra (upozorňuji, že jde o figury našeho protihráče, takže všechny stojí na protější straně šachovnice).



Při hře podle klasických šachových pravidel by sice první dvě řady neměly být ohroženy vůbec, neboť jsou plně obsazeny figurami stejné barvy, které se přece navzájem vyhazovat nemohou, avšak já jsem se rozhodl v zájmu estetičnosti vzniklých obrazců pravidla lehce změnit. Figury jednoho hráče se pak mohou vzájemně vyhazovat, z čehož vyplývá, že může být ohroženo i takové pole, na němž některá figura stojí (pokud někomu má změna pravidel připadat nesmyslná, může uvažovat, že každá ze základních šestnácti figur patří jinému hráči a figury dvou různých hráčů se už vyhazovat mohou).

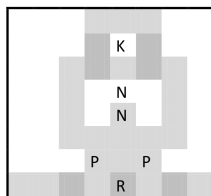
Tuto změnu jsem udělal proto, že pokud v oblasti, kde je více polí ohrožených více figurami vedle sebe (jen těžko by se dal takovýto shluk vytvořit bez figurky uvnitř něj), stojí šachová figurka, tak by při hře podle oficiálních pravidel políčko s figurkou bylo vybarveno čistě bíle bez ohledu na barvu okolí. Toto políčko by pak tvořilo příliš ostrý kontrast s tmavým okolím a při tvorbě složitějších a esteticky zajímavějších obrazců by mohlo vypadat špatně. Tomu se však vyhneme, pokud ohrozíme i zmíněnou figurku a políčko pak je možné zabarvit podobným odstínem jako jeho bezprostřední okolí.

(...)

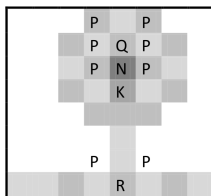
Nové útvary

Tím, že jsme začali využívat víc než jen dvě různé barvy pro políčka šachovnice, jsme si otevřeli cestu k vytvoření mnohem složitějších a zajímavějších obrazců. V této kapitole bych chtěl předvést některé z těch, které na první pohled připomínají konkrétní předmět. Obecné útvary, které mohou vzniknout, budu řešit v následující kapitole.

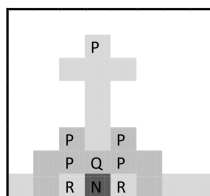
Jako demonstraci možností tvorby, které se nám otevírají při novém pohledu na zadané téma, předvedu například



dům...



... strom...



... či hrob.

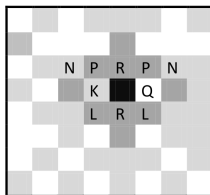
Využití figury jsou v obrázku vyznačeny pomocí běžně využívaných značek, jimiž se figury značí podle počátečních písmen v jejich anglických názvech: K král, Q dáma, B střílec, N jezdec, R věž a P pěšec.

Obecné útvary

Na rozdíl od předchozí kapitoly se tentokrát budu zabývat obrazci, které sice nepřipomínají žádný objekt z reálného světa, avšak mají určitý význam pro pochopení obecných vlastností tvarů, které vůbec mohou vzniknout. Několik takových jevů a speciálních obrazců jsem vybral a rozhodl se u každého z nich zamyslet nad tím, zda a za jakých podmínek může vzniknout, pokusit se najít vhodné rozestavení základních šachových figur a případně dokázat, že obrazec vzniknout skutečně nemůže.

Nejohroženější políčko

Žádné políčko nemůže být za využití základní sady figurek ohroženo více než deseti figurkami, protože ohrožení může přicházet jedině ze dvou svislých směrů, dvou vodorovných, čtyř diagonálních a dvou ze směru pohybu jezdců. Toto maximální ohrožení nastane například v následující situaci:



Snadno odvodíme, že při použití libovolného počtu hracích figur, kdy mohou být na šachovnici více než dva jezdcí, je možné ohrožit políčko až z osmi směrů pohybu jezdců, tudíž je možné pak dosáhnout míry ohrožení až 16. Dále se však zatím budeme zabývat pouze obrazci vzniklými při využití základní sady.

(...)

Nejméně ohrožená políčka

Ted' mě nezajímají zcela neohrožená políčka. Mnohem zajímavější jsou taková, která jsou ohrožena právě jednou figurkou, což sice působí na první pohled velmi snadně, avšak v praxi se jen málokdy najde takové rozložení figur, aby žádné políčko nebylo ohrožováno více než jednou z nich. Nás zajímá, jaké podmínky musí být splněny, aby kterémukoli políčku nekonečně velké šachovnice příslušela míra ohrožení 0 nebo 1, a jaké útvary v těchto případech mohou na šachovnici potom vzniknout.

Nejprve si zavedeme několik nových pojmů. *Polem působnosti figury* budeme nazývat množinu všech políček šachovnice, na která se v následujícím tahu může

daná figura přesunout. Toto pole může být buďto *nekonečné* (např. u dámy, věže, střelce) nebo *omezené* (král, pěšec, jezdec). V případě nekonečného pole působnosti jedné figury ho může druhá figura *omezit* tím způsobem, že si do něj stoupne (první figura ji nemůže přeskočit, takže se na políčka za druhou figurou nedostane). Nakonec rozdělíme pohyby, které jsou figury schopny vykonat, na *přímé* (vodorovné a svislé), *diagonální* a *koňské*, které však uvažovat nebudeme, neboť jsou pokaždé omezené.

Máme-li na celé šachovnici jedinou figurku, je náš úkol splněn, neboť žádné pole nemůže být omezeno více než jednou figurou. Zato pokud k ní přidáme nejméně jednu další figuru, může se na šachovnici objevit několik políček spadajících do polí působnosti obou figur. Tato políčka pak mají míru ohrožení 2. Míru ohrožení můžeme nyní definovat též jako počet polí působnosti, do nichž příslušné políčko spadá. Pojďme se zamyslet nad tím, v kterých případech se pole působnosti těchto dvou figur nepřekryjí.

Všimněme si, že pro každou figuru s nekonečným polem působnosti platí, že může-li se neomezeně pohybovat jedním směrem, může se též neomezeně pohybovat opačným směrem i oběma směry kolmými na ten první, takže její pole působnosti se skládá z nejméně dvou na sebe kolmých přímk. Setkají-li se na jedné šachovnici dvě figury s nekonečným polem působnosti, musejí se přímky tvořící jejich pole působnosti někde protnout. Jsou-li nejméně dvě z těchto přímk rovnoběžné, průsečíky budou dva, v opačném případě jsou čtyři. Dámu, jejíž přímky tvořící pole působnosti k sobě nejsou pokaždé kolmé, uvažujeme jako věž a střelce na stejném políčku (tedy rozebereme zvlášť přímky pro věž a zvlášť přímky pro střelce).

Průsečík zmíněných přímk však ještě nemusí nutně znamenat překrytí polí působnosti figur. Pokud neuvažujeme omezení polí působnosti, k překrytí nedojde jedině v případě dvou střelců, jejichž přímky tvořící pole působnosti se střetávají v bodě mezi čtyřmi políčky namísto středu políčka. Tento případ v dalších úvahách vynecháme.

V případě omezení některých polí působnosti z důvodu zamezení jejich překrytí je potřeba dodržet některá pravidla:

1. Z každé protínající se dvojice přímk, musí být nejméně jedno pole působnosti omezeno.
2. Omezení musí nastat na některém bodě spojnice průsečíku přímk a figurky příslušející k omezené přímce.
3. Figurka zprostředkovávající omezení musí mít omezené pole působnosti (v případě neomezeného je potřeba ji též omezit) a nesmí být schopna se pohybovat ve směru k figuře, jejíž pole působnosti právě omezuje (jinak by se pole působnosti překryla).
4. Kterákoli figurka může omezovat pole působnosti nejvýše jedné další figury (každou omezenou figurou je totiž automaticky ohrožena).

Speciálním případem omezení jsou dvě figurky s nekonečným polem působnosti stejného typu (tj. dvě věže či dva střelci), které se ohrožují navzájem ze vzdálenosti 1. Jejich přímkové značící pole působnosti jsou pak buďto rovnoběžné, nebo se protínají uprostřed políčka, na němž stojí jedna z figur, tudíž je i toto políčko ohroženo pouze jednou figurou.

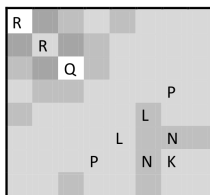
Zmíněná pravidla pro omezení pole působnosti některé figury jsou pouze nutnými podmínkami pro to, aby žádnému políčku nepřipadla míra ohrožení 2 nebo víc. Při omezování je potřeba dodržovat ještě mnoho dalších podrobných pravidel závislých na konkrétní situaci a tedy stěží vyjmenovatelných v této krátké práci.

Poslední podstatná informace k tomuto tématu, kterou zmíním, je, že pole působnosti, která jsou omezená vždy (tedy jezdec, král, pěšec), už více omezit nelze (když do nich postavíme hrací figuru, pole má stále stejný tvar). Jejich tvar je tedy neměnný a to zároveň specifický pro daný typ figury. Mohli bychom si ověřit, že není možné omezit nekonečné pole působnosti tak, aby mělo stejný tvar jako některé omezené a zároveň aby přitom každé políčko šachovnice bylo ohroženo nejvýš jednou figurou. Na základě tohoto faktu mě napadá myšlenka, že známe-li tvar výsledného obrazce, v němž jsou všechna políčka neohrožena nebo ohrožena stejnou měrou o hodnotě 1, existuje algoritmus, pomocí něhož dokážeme jednoznačně stanovit polohu i typ každé využité figurky s omezeným polem působnosti, popřípadě totéž stanovit u úplně všech využitých figurek. To by znamenalo, že každý takovýto obrazec je možné vytvořit pouze jedním způsobem. Tuto domněnku se mi však už nepodařilo ověřit, a tak jsem ji dále nerozvíjel.

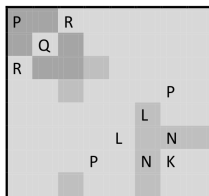
Ohrožená šachovnice

Vraťme se ke klasické šachovnici 8×8 a pokusme se najít takové rozestavení figur, při kterém bude každé políčko šachovnice ohroženo.

V této oblasti jsem navázal na práci Prof.^{MM} Markéty Calábkové, jejíž článek uveřejněný v šestém čísle časopisu M&M se mimo jiné zabýval právě touto problematikou a přinesl dokonce rozestavení figur, při kterém to možné je. Problém však je v tom, že její pojetí šachovnice na rozdíl od mého uvažovalo všechna políčka s figurou jako automaticky ohrožená (jinak by rozestavení figur fungovat nemohlo, neboť její figury se navzájem ohrožovat nemohly). Když jsem tedy rozestavení figur zmíněné ve zveřejněném článku zapsal do mého programu, zjistil jsem, že výsledný obrazec vypadá takto:



tedy že políčko s věží a políčko s dámou ve skutečnosti žádná další figura neohrožuje. Proto jsem její rozestavení lehce poopravil tím, že jsem přeházal věže a dámu a dodal pěšce vlevo nahoru. Získal jsem tak rozložení figur, při němž jsou ohrožena všechna políčka šachovnice včetně těch, na nichž stojí figury:



Ani s tímto rozestavením se však nehodlám spokojit. Na začátku práce jsem se rozhodl zvažovat také míru ohrožení každého políčka, proč bych ji tedy nemohl uplatnit i na tento případ? Vyvstává potom otázka: Existuje rozestavení figur, při němž je celá šachovnice ohrožena homogenně (tj. všem políčkům přísluší stejná nenulová míra ohrožení)?

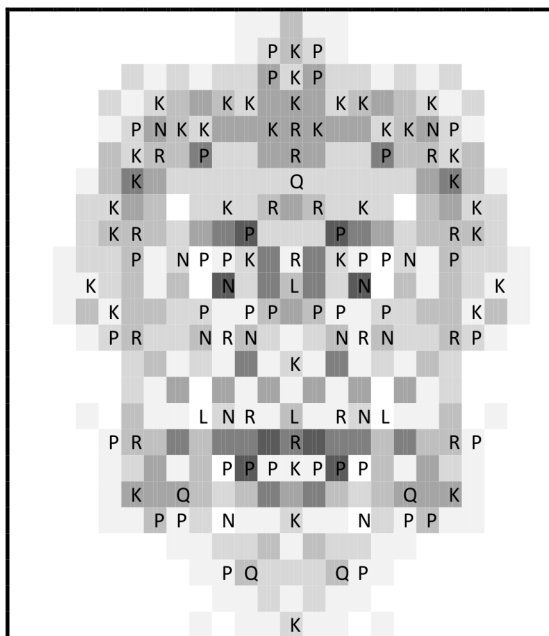
Odpovědí je, že to možné není! Za využití informací odvozených v předchozí podkapitole si můžeme vyzkoušet, že se při každém rozestavení figurek, které ohrozí celou šachovnici, musí některá dvě pole působnosti překrývat, tudíž už vytvoří políčko ohrožené minimálně dvěma figurami. Stejnou hodnotu ohrožení by pak měla mít i všechna ostatní políčka.

Když potom každé figuře připíšeme takovou hodnotu, kolik ohrožuje políček, tak by součet hodnot všech figur na šachovnici musel být roven $2 \cdot 64 = 128$. Když se však zamyslíme nad tím, kolik políček by mohla každá figura maximálně ohrozit, pokud by byla na šachovnici sama, tak zjistíme, že dáma může mít hodnotu nejvíce 27, každá věž nejvíce 14, střelec 13, král 8 a pěšák 2. Když potom sečteme maximální možné hodnoty všech šachových figur v základním balíčku, zjistíme, že součet je roven 111, což je ostře menší než 128, takže nikdy nemůže nastat situace, kdy je každé pole šachovnice ohroženo dvěma nebo více figurami.

(...)

Téměř obecná šachovnice

V této poslední kapitole se chystám všechny dosavadní poznatky zobecnit na šachovnici větší než-li je klasická 8×8 . (...) Základní principy při tvorbě obrázců zůstávají stejné. Jediný podstatný rozdíl je, že máme tentokrát k dispozici mnohem větší plochu, která obsahuje mnohem více políček a je tak možné vytvářet obrázky v mnohem lepším rozlišení. Na šachovnici se pak mohou objevit i takové legendy, jako Lišák Riki, Mona Lisa nebo Honza Škvára.



Obrázek 14: Dr.^{MM} Jan Škvára: Šachový autoportrét

Téma 6 – Výtahy

K našemu lehkému zklamání dorazily k tomuto tématku pouze dva příspěvky. Bc.^{MM} Kateřina Smítalová ve svém příspěvku prozkoumala různé práce zabývající se touto tematikou. Mgr.^{MM} Jakub Tětek zkoumal možnosti optimalizace doby čekání a hledal efektivní způsoby, jak minimalizovat průměrnou dobu čekání pomocí volby vhodného „čekacího“ patra výtahu. Děkujeme oběma za jejich příspěvky.

$\mathcal{O}(N)$ dra

Výsledková listina 5. čísla

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Úlohy					Σ_0	Σ_1
				r1	r2	r3	r4	t2		
1.	Prof. ^{MM} M. Calábková	4.	231	4	2	3	8	17	80	
2.	Dr. ^{MM} J. Škvára	4.	56	4	2	3	3	12	46	
3.	Mgr. ^{MM} T. Domes	2.	43	2	1	1	4	8	43	
4.	Mgr. ^{MM} J. Pokorný	3.	42	4	4			8	37	
5.	Mgr. ^{MM} Z. Johanovská	3.	36					0	36	
6.	Mgr. ^{MM} D. Jochcová	4.	34			1		1	34	

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Úlohy					Σ_0	Σ_1
				r1	r2	r3	r4	t2		
7.	Mgr. ^{MM} P. Šťastný	2.	32						0	32
8.	Mgr. ^{MM} M. Janka	3.	31						0	31
9.	Dr. ^{MM} V. Rozhoň	4.	51						0	30
10.	Mgr. ^{MM} M. Doležalová	3.	27						0	27
11.–13.	Dr. ^{MM} P. Souček	3.	90	3	1				4	25
	Mgr. ^{MM} J. Tětek	1.	25						0	25
	Mgr. ^{MM} L. Vincenová	1.	25						0	25
14.	Mgr. ^{MM} K. Stefanová	3.	24						0	24
15.–17.	Doc. ^{MM} D. Krasula	2.	102						0	22
	Mgr. ^{MM} S. Lukeš	2.	22		3				3	22
	Mgr. ^{MM} F. Oplt	2.	22		0		1		1	22
18.–19.	Mgr. ^{MM} A. Mlezivová	1.	21			3	1		4	21
	Doc. ^{MM} P. Vincena	4.	102						0	21
20.–21.	Mgr. ^{MM} K. Ilievová	4.	41						0	19
	Bc. ^{MM} L. Kopfová	1.	19						0	19
22.–23.	Bc. ^{MM} F. Čermák	1.	18	4	1		4		9	18
	Mgr. ^{MM} Z. Svobodová	3.	28						0	18
24.	Bc. ^{MM} K. Smítalová	4.	17						0	17
25.–26.	Dr. ^{MM} L. Langerová	4.	64	2					2	15
	Bc. ^{MM} J. Paidar	1.	15				3		3	15
27.	Mgr. ^{MM} J. Dittrich	3.	36			3			3	14
28.	Dr. ^{MM} P. Nácovský	4.	76						0	13
29.–33.	Bc. ^{MM} O. Knopp	1.	11						0	11
	Dr. ^{MM} J. Kušnír	4.	84						0	11
	Bc. ^{MM} E. Mlynářčiková	3.	11						0	11
	Bc. ^{MM} P. Šimůnek	2.	11				3		3	11
	Bc. ^{MM} D. Žáček	2.	11						0	11
34.	Bc. ^{MM} D. Jurdová	3.	10	2	0	0	3		5	10
35.–39.	A. Gajdová	4.	8						0	8
	Bc. ^{MM} J. Knížek	4.	14						0	8
	S. Rosecká	3.	8			1			1	8
	P. Turinský	2.	8						0	8
	J. Vala	1.	8				4		4	8
40.–42.	S. Burešová	1.	7						0	7
	K. Mráz	4.	7						0	7
	M. Töpfer	2.	7						0	7
43.–46.	B. Požár	1.	6						0	6

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Úlohy					Σ_0	Σ_1
				r1	r2	r3	r4	t1		
8.	Mgr. ^{MM} M. Janka	3.	31						0	31
9.	Dr. ^{MM} V. Rozhoň	4.	51						0	30
10.	Mgr. ^{MM} M. Doležalová	3.	28				1		1	28
11.	Mgr. ^{MM} A. Mlezivová	1.	26	2	1		2		5	26
12.–15.	Dr. ^{MM} P. Souček	3.	90						0	25
	Mgr. ^{MM} K. Stefanová	3.	25			0	1		1	25
	Mgr. ^{MM} J. Tětek	1.	25						0	25
	Mgr. ^{MM} L. Vincenová	1.	25						0	25
16.–18.	Doc. ^{MM} D. Krasula	2.	102						0	22
	Mgr. ^{MM} S. Lukeš	2.	22						0	22
	Mgr. ^{MM} F. Oplť	2.	22						0	22
19.	Doc. ^{MM} P. Vincena	4.	102						0	21
20.–22.	Mgr. ^{MM} K. Ilievová	4.	41						0	19
	Bc. ^{MM} L. Kopfová	1.	19						0	19
	Bc. ^{MM} J. Paidar	1.	19	0	2		2		4	19
23.–24.	Bc. ^{MM} F. Čermák	1.	18						0	18
	Mgr. ^{MM} Z. Svobodová	3.	28						0	18
25.–26.	Mgr. ^{MM} J. Dittrich	3.	39				3		3	17
	Bc. ^{MM} K. Smítalová	4.	17						0	17
27.	Bc. ^{MM} P. Šimůnek	2.	16	2			3		5	16
28.–29.	Dr. ^{MM} L. Langerová	4.	64						0	15
	Mgr. ^{MM} J. Václavek	3.	30	3		3	3		9	15
30.–31.	Dr. ^{MM} P. Nácovský	4.	76						0	13
	Bc. ^{MM} P. Turinský	2.	13			3	2		5	13
32.–35.	Bc. ^{MM} O. Knopp	1.	11						0	11
	Dr. ^{MM} J. Kušnír	4.	84						0	11
	Bc. ^{MM} E. Mlynářčiková	3.	11						0	11
	Bc. ^{MM} D. Žáček	2.	11						0	11
36.	Bc. ^{MM} D. Jurdová	3.	10						0	10
37.–40.	A. Gajdová	4.	8						0	8
	Bc. ^{MM} J. Knížek	4.	14						0	8
	S. Rosecká	3.	8						0	8
	J. Vala	1.	8						0	8
41.–43.	S. Burešová	1.	7						0	7
	K. Mráz	4.	7						0	7
	M. Töpfer	2.	7						0	7
44.–46.	B. Požár	1.	6						0	6
	M. Štván	2.	6						0	6
	M. Turek	3.	6						0	6
47.–50.	L. Bujnovská	1.	5						0	5
	A. Neubauerová	1.	5						0	5
	K. Stodolová	2.	5						0	5
	J. Zeman	3.	5						0	5
51.–55.	S. Golat	4.	4						0	4

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Úlohy					Σ_0	Σ_1
				r1	r2	r3	r4	t1		
56.–60.	R. Luc	2.	4						0	4
	Bc. ^{MM} T. Paliesek	3.	17						0	4
	J. Štrinc	4.	4						0	4
	F. Zajíc	2.	5						0	4
	A. Dejl	1.	3						0	3
	O. Krabec	1.	3						0	3
	A. Šámal	1.	3						0	3
	M. Zika	3.	3						0	3
61.–65.	M. Zoula	3.	3						0	3
	R. Chasák	2.	2						0	2
	J. Dvořák	4.	2						0	2
	Bc. ^{MM} J. Havelka	1.	13						0	2
	A. Kostelecká	3.	2						0	2
66.–68.	M. Kubeša	3.	2						0	2
	J. Pekař	1.	1						0	1
	Mgr. ^{MM} D. Tanglová	1.	20						0	1
	T. Troján	1.	1						0	1

Sloupec Σ_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, Σ_0 je součet bodů v aktuální sérii a Σ_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Výsledková listina 21. ročníku

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Číslo						Σ_1
				1	2	3	4	5	6	
1.	Prof. ^{MM} M. Calábková	4.	234	18	16	21	8	17	3	83
2.	Dr. ^{MM} J. Škvára	4.	81	8	7	12	7	12	25	71
3.	Mgr. ^{MM} D. Jochcová	4.	44	14	0	5	14	1	10	44
4.–5.	Mgr. ^{MM} T. Domes	2.	43	17	5	8	5	8	0	43
	Mgr. ^{MM} J. Pokorný	3.	48	10	2	8	9	8	6	43
6.	Mgr. ^{MM} Z. Johanovská	3.	36	11	8	10	7	0	0	36
7.	Mgr. ^{MM} P. Šťastný	2.	32	16	7	4	5	0	0	32
8.	Mgr. ^{MM} M. Janka	3.	31	9	6	10	6	0	0	31
9.	Dr. ^{MM} V. Rozhoň	4.	51	6	7	7	10	0	0	30
10.	Mgr. ^{MM} M. Doležalová	3.	28	11	6	7	3	0	1	28
11.	Mgr. ^{MM} A. Mlezivová	1.	26	6	3	4	4	4	5	26
12.–15.	Dr. ^{MM} P. Souček	3.	90	5	7	4	5	4	0	25
	Mgr. ^{MM} K. Stefanová	3.	25	4	5	10	5	0	1	25
	Mgr. ^{MM} J. Tětek	1.	25	6	0	18	1	0	0	25

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Číslo						Σ_1
				1	2	3	4	5	6	
16.–18.	Mgr. ^{MM} L. Vincenová	1.	25	6	5	0	14	0	0	25
	Doc. ^{MM} D. Krasula	2.	102	12	0	10	0	0	0	22
19.	Mgr. ^{MM} S. Lukeš	2.	22	8	0	4	7	3	0	22
	Mgr. ^{MM} F. Oplt	2.	22	0	6	10	5	1	0	22
20.–22.	Doc. ^{MM} P. Vincena	4.	102	10	6	0	5	0	0	21
	Mgr. ^{MM} K. Ilieová	4.	41	2	0	8	9	0	0	19
	Bc. ^{MM} L. Kopfová	1.	19	4	5	0	10	0	0	19
23.–24.	Bc. ^{MM} J. Paidar	1.	19	4	0	4	4	3	4	19
	Bc. ^{MM} F. Čermák	1.	18	0	3	0	6	9	0	18
25.–26.	Mgr. ^{MM} Z. Svobodová	3.	28	2	0	2	14	0	0	18
	Mgr. ^{MM} J. Dittrich	3.	39	1	3	7	0	3	3	17
27.	Bc. ^{MM} K. Smítalová	4.	17	5	8	0	4	0	0	17
	Bc. ^{MM} P. Šimůnek	2.	16	0	0	4	4	3	5	16
28.–29.	Dr. ^{MM} L. Langerová	4.	64	2	0	0	11	2	0	15
30.–31.	Mgr. ^{MM} J. Václavek	3.	30	6	0	0	0	0	9	15
	Dr. ^{MM} P. Nácovský	4.	76	13	0	0	0	0	0	13
32.–35.	Bc. ^{MM} P. Turinský	2.	13	2	5	0	1	0	5	13
	Bc. ^{MM} O. Knopp	1.	11	5	0	3	3	0	0	11
36.	Dr. ^{MM} J. Kušnír	4.	84	9	2	0	0	0	0	11
	Bc. ^{MM} E. Mlynářčiková	3.	11	8	3	0	0	0	0	11
37.–40.	Bc. ^{MM} D. Žáček	2.	11	11	0	0	0	0	0	11
	Bc. ^{MM} D. Jurdová	3.	10	0	0	0	5	5	0	10
	A. Gajdová	4.	8	8	0	0	0	0	0	8
	Bc. ^{MM} J. Knížek	4.	14	8	0	0	0	0	0	8
41.–43.	S. Rosecká	3.	8	0	3	0	4	1	0	8
	J. Vala	1.	8	0	0	0	4	4	0	8
	S. Burešová	1.	7	4	3	0	0	0	0	7
	K. Mráz	4.	7	7	0	0	0	0	0	7
44.–46.	M. Töpfer	2.	7	7	0	0	0	0	0	7
	B. Požár	1.	6	3	3	0	0	0	0	6
47.–50.	M. Štván	2.	6	0	6	0	0	0	0	6
	M. Turek	3.	6	2	0	4	0	0	0	6
	L. Bujnovská	1.	5	0	5	0	0	0	0	5
	A. Neubauerová	1.	5	0	0	0	5	0	0	5

Poř.	Jméno	R.	Σ_{-1}	Číslo						Σ_1
				1	2	3	4	5	6	
51.–55.	K. Stodolová	2.	5	5	0	0	0	0	0	5
	J. Zeman	3.	5	5	0	0	0	0	0	5
	S. Golat	4.	4	0	0	4	0	0	0	4
	R. Luc	2.	4	0	4	0	0	0	0	4
	Bc. ^{MM} T. Paliesek	3.	17	2	0	2	0	0	0	4
56.–60.	J. Štrinc	4.	4	0	0	0	4	0	0	4
	F. Zajíc	2.	5	4	0	0	0	0	0	4
	A. Dejl	1.	3	3	0	0	0	0	0	3
	O. Krabec	1.	3	0	0	0	3	0	0	3
	A. Šámal	1.	3	3	0	0	0	0	0	3
61.–65.	M. Zika	3.	3	3	0	0	0	0	0	3
	M. Zoula	3.	3	3	0	0	0	0	0	3
	R. Chasák	2.	2	2	0	0	0	0	0	2
	J. Dvořák	4.	2	2	0	0	0	0	0	2
	Bc. ^{MM} J. Havelka	1.	13	2	0	0	0	0	0	2
66.–68.	A. Kostelecká	3.	2	0	0	0	0	2	0	2
	M. Kubeša	3.	2	0	2	0	0	0	0	2
	J. Pekař	1.	1	1	0	0	0	0	0	1
	Mgr. ^{MM} D. Tanglová	1.	20	1	0	0	0	0	0	1
	T. Troján	1.	1	1	0	0	0	0	0	1

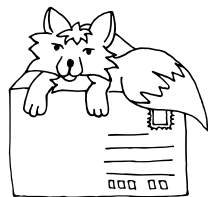
Sloupeček Σ_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, Σ_0 je součet bodů v aktuální sérii a Σ_1 součet všech bodů v tomto ročníku. Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M

Adresa redakce:

M&M, OVVP, MFF UK
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

E-mail: mam@matfyz.cz

WWW: <http://mam.matfyz.cz>



Časopis M&M je zastřešen Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy v Praze. S obsahem časopisu je možné nakládat dle licence Creative Commons Attribution 3.0. Dílo smíte šířit a upravovat. Máte povinnost uvést autora. Autory textů jsou, pokud není uvedeno jinak, organizátoři M&M.