

**Milí kolegové!**

Než se vrhneme studia zajímavých poznatků, dovolte několik poznámek. Předně: **Věnujte pozornost příloze o soustředění !!** Důležité je také, aby jste nám posílali úlohy včas tj. týden před vydáním dalšího čísla. To znamená, že termín odeslání této série bude 6. 1. 1996 a další 3. číslo vyjde třináctého téhož měsíce. Dále bychom vás chtěli upozornit, aby jste psali každou úlohu na zvláštní (a podepsaný) list papíru (nemusí to být zrovna A4), protože každou úlohu opravuje někdo jiný. Vaše příspěvky do prvního čísla jsme opravili a zvláště zajímavé otiskujeme s případnými drobnými úpravami, poznámkami a komentáři. Pokud přišlo více příspěvků velice podobných, sloučili jsme je do jednoho. Výsledky prvního kola jsou přehledně uvedeny v tabulce na zadní straně. Většina z vás již dosáhla titulu bakalář (bcl) k čemuž jim blahopřejeme a někteří jedinci se blíží hranice doktorátu (50b).

Do dalšího čísla můžete posílat další úvahy navazující na bádání v již rozjetých tématech, úvahy o dvou nových tématech, která jsme pro vás připravili a samozřejmě také řešení rekreačních úloh.

**TÉMA I: BALISTIKA**

**Řešení úvodní úlohy**

Nalezení počáteční rychlosti  $v_0$  a výšky dostřelu  $h$  praku při výstřelu kolmo vzhůru na základě znalosti doby  $T$ , za niž střela dopadne zpět.

V ideálním případě bez tření trvá let nahoru do nejvyššího bodu dráhy ve výšce  $h$  i zpět dolů stejně dlouhou dobu  $\frac{T}{2}$ . Druhá část pohybu je voným pádem a výšku  $h$  můžeme počítat ze vzorce

$$h = \frac{1}{2}g \left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}gT^2 \tag{1}$$

pro volný pád. Využijeme-li toho, že počáteční rychlost  $v_0$  je stejná jako rychlost dopadu  $v_d$ , můžeme podle voného pádu spočítat i rychlost  $v_0$ :

$$v_0 = v_d = g \left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}gT \tag{2}$$

## Odhady vlivu tření

*Jan Mysliveček:* "Tím, že Libor zanedbal odpor vzduchu, výšku  $h$  přecenil, protože odpor vzduchu způsobuje zbrždění. Rychlost  $v_0$  zůstane v podstatě stejná."

*Daniel Klír:* "Jelikož na kuličku působil odpor vzduchu, tak kulička měla nižší max. výšku. Takže max. výšku přecenil. Proto se zmenšila doba výstupu a pádu, takže počáteční rychlost podcenil."

*Matouš Jiráka:*(zestručněno) Při modelování na počítači vždy vychází, že při stejné počáteční rychlosti spadne kulička na zem dříve pokud započteme tření. To znamená, že skutečná počáteční rychlost musí být větší než rychlost  $v_0$  vypočtená z naměřené doby  $T$ , aby se střela udržela potřebnou dobu ve vzduchu. Rychlost  $v_0$  tedy pan inženýr podcenil. O výšce  $h$  si Matouš myslí, že bude ve skutečnosti menší než vypočtená podle (1), ale tvrzení nezdůvodňuje. Dále se pokouší řešit pohyb pro odporovou sílu  $F = -kv$  i když to nedotáhl do konce.

*Jiří Roubínek:* Odpor vzduchu způsobí, že kulička vylétne do menší výšky. Naopak veličina  $v_0$  je podceněna, neboť kdyby střelil kuličku vypočtenou rychlostí, vrátila by se zpět dříve. Skutečná rychlost, kterou kulička vylétla z praku tedy musela být větší.

*Námítka Dr. Štourala<sup>1</sup>:*

Tvrzení Jana Myslivečka, že rychlost  $v_0$  zůstane stejná je neopodstatněné, nezdůvodnil jej a v podstatě o něj se opírá tvrzení, že výška bude menší. Také argumentace Daniela Klíra a Jiřího Roubínka je nesprávná. Nejprve, opíraje se o představu, že počáteční rychlost je stejná pro oba případy vysloví závěr, že vlivem tření doletí kulička níže. Hned nato však tvrdí, že počáteční rychlost musí být ve skutečnosti větší než podle (2). Co když je ale rychlost  $v_0$  větší o tolik, že to zcela vykompenzuje ztráty třením a kulička do větší výšky? Zdůvodnění Matouše Jiráka (alespoň co se týče vlivu na rychlost) je uspokojivější, i když argumenty se opírají o ne zcela dokázaná tvrzení a o numerické modelování na počítači, při němž nspecifikuje jaké použil parametry.

## Odpor vzduchu při malých rychlostech <sup>2</sup>

*Tomáš Brauner a Pavel Bubák (zestručněno)*

---

<sup>1</sup>Dr. Štoural je jeden velice nepříjemný příbuzný Martina Č.

<sup>2</sup>řešení je nevhodné pro mládež neovládající diferenciální a integrální počet. Stačí když se podíváte na výsledné vztahy (\*) a (\*\*) a poznámky za článkem.

Při nízkých rychlostech kuličky (řádově jednotky m/s) lze odpor vzduchu považovat za přibližně přímo úměrný rychlosti kuličky (podle pana Stokese je odporová síla při laminárním proudění rovna  $\mathbf{F} = -6\pi\eta R\mathbf{v}$ , kde  $\eta$  je dynamická viskozita vzduchu a  $R$  je poloměr kuličky). Pro pohyb kuličky platí 2. Newtonův zákon

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - 6\pi\eta R\mathbf{v}$$

Jestliže zvolíme soustavu souřadnic tak, aby  $\mathbf{g}$  bylo souhlasně rovnoběžné se zápornou poloosou  $y$ , pak

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - Av_y, \quad A = \frac{6\pi\eta R}{m}$$

Přepsáním této rovnice do tvaru

$$\frac{dv_y}{g + Av_y} = -dt$$

a její integrací v mezích od 0 do  $t$  s využitím počáteční podmínky  $v_y(t = 0) = v_0$  a drobnou úpravou dostaneme:

$$v_y = -\frac{g}{A} + \left(v_0 + \frac{g}{A}\right) e^{-At}$$

Další integrací a užitím  $y(t = 0) = 0$  máme

$$y = -\frac{gt}{A} + \frac{1}{A} \left(v_0 + \frac{g}{A}\right) (1 - e^{-At})$$

Položíme-li v poslední rovnici čas  $t = T$  víme, že ulička právě spadla zpět tj.  $y = 0$ . Z této rovnice můžeme vyjádřit  $v_0$ :

$$v_0 = -\frac{g}{A} + \frac{gT}{1 - e^{-AT}} \quad (*)$$

Z rovnice pro rychlost  $v_y$  zase můžeme najít čas v němž je kulička nejvýše a to tak, že položíme  $v_y = 0$  a vyjádříme z této rovnice  $t$ . Po dosazení tohoto  $t$  do rovnice pro  $y$  dostaneme maximální výšku doletu

$$y_{\max} \equiv h = \frac{v_0}{A} - \frac{g}{A^2} \ln \left(1 + \frac{Av_0}{g}\right)$$

a po dosazení za  $v_0$  tedy máme

$$h = \frac{g}{A^2} \left( \frac{AT}{1 - e^{-AT}} - 1 - \ln \frac{AT}{1 - e^{-AT}} \right) \quad (**)$$

Dosazením konkrétních hodnot do vztahů (\*) a (\*\*) zjistíme, že skutečná rychlost  $v_0$  při konstantní době  $T$  je větší než rychlost určená při zanedbání odporu vzduchu a skutečná výška vrhu  $h$  je zase menší.

*Pozn. red.* Kromě výše uvedeného Tomáš Brauner našel také tvar balistické křivky pro vrh šikmý vzhůru malou rychlostí (pro větší rychlosti se změní tvar odporové síly!):

$$y = \frac{g}{A^2} \ln \left( 1 - \frac{Ax}{v_0 \cos \alpha} \right) + \left( \sin \alpha + \frac{g}{av_0} \right) \frac{x}{\cos \alpha}$$

Číslo  $\alpha$  značí úhel vrhu. Navíc ukázal (pomocí l'Hospitalova pravidla), že pro  $A \rightarrow 0$  vzorce (\*) a (\*\*) přejdou ve vzorce bez tření (1) a (2). Pavel Bubák provedl numerickou simulaci na počítači a konstatoval také závěr, že pro malé tření je bržděný pohyb nerozeznatelný od ideálního. O řešení problému pro stejný tvar odporové síly se pokusili také Matouš Jiráček a Robert Špalek, ale ne tak úspěšně.

*Poznámka Dr. Štourala:* Kolegové nedokázali skutečně přímo ze vzorců (\*) a (\*\*), že by pro všechny hodnoty parametrů  $T$  a  $A$  byla rychlost  $v_0$  větší a výška  $h$  menší. Postup se také opírá o speciální tvar odporové síly a určitě by neplatil kdyby se z praku střílelo v dešti nebo při sněžení nebo pod vodou.

### Metoda průměrného zpomalení

*Josef Šeda (upraveno)*

Označme  $t_1$  dobu letu nahoru do výšky  $h$  a  $t_2$  dobu letu dolů. Zřejmě platí  $t_1 + t_2 = T$ . Při letu nahoru je kulička bržděna a její zpomalení je trochu větší než  $g$  a při pádu je zase její zrychlení díky brždění odporem menší než  $g$ . Můžeme tedy zavést kladná čísla  $p_1$  a  $p_2$ , kterým budeme říkat průměrná zpomalení, vztahem

$$h = \frac{1}{2}(g + p_1)t_1^2 = \frac{1}{2}(g - p_2)t_2^2.$$

Z tohoto vztahu je možno vyjádřit  $t_1$  pomocí  $t_2$  a díky vztahu  $t_1 + t_2 = T$  také  $t_1$  pomocí  $T$ :

$$t_1 = \left( 1 + \sqrt{\frac{g + p_1}{g - p_2}} \right)^{-1} T.$$

Dosažením do předchozího vztahu můžeme vyjádřit přímo  $h$  pomocí  $T$ . Ve vyjádření budou vystupovat už jenom čísla  $p_1$  a  $p_2$ , o nichž víme, že jsou kladná. Navíc nám situaci může zjednodušit následující:

*Model:* Pro malou třecí sílu můžeme předpokládat, že  $p_1 = p_2 = p$  díky tomu, že kulička je málo bržděna a závislost rychlosti na čase je téměř stejná po cestě nahoru i dolů.

*Pozn. red.:* Josef Šeda řešení nedotáhl do konce (navíc tam měl chyby, které jsem se snažil odstranit), proto v tomto okamžiku s nedokončeným řešením, které může sloužit jako inspirace, končím.

### Náměty pro další bádání:

Řešení Tomáše Braunera a Pavla Bubáka pro lineární závislost odporové síly na rychlosti je téměř úplné, až na detail: bylo by třeba ukázat pořádně jak je to s veličinami  $v_0$  a  $h$  podle vztahů (\*) a (\*\*) pro všechny možné hodnoty  $T$  a  $A$ . Neexistuje náhodou dvojice parametrů pro niž tvrzení uvedené v závěru článku neplatí?

Dále by bylo zajímavé najít skutečně podrobnou a přesnou analýzu vlivu tření na let kuličky, která by se neopírala o tvar třecí síly. Snad by k tomu mohlo vést něco jako postup Josefa Šedy (metoda průměrných zpomalení - MPZ), kdyby se dotáhl do konce. Například Matouš Jiráček ve svých úvahách skutečně rigorózně ukázal, že  $t_2 > t_1$  (neuveřejněno). I tento fakt by se mohl při postupu hodit.

## TÉMA II: CIHLIČKY

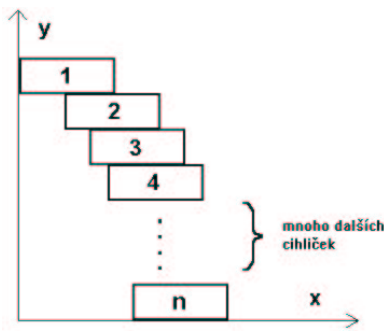
### Nekonečný přesah vrchní cihličky

*Matouš Jiráček, Robert Špalek*

Pokusme se docílit nekonečné vzdálenosti mezi cihličkou nejvýše umístěnou a nejspodnější. Stavme cihličky tak, že společné těžiště prvních  $k$  cihliček odshora leží v téže vzdálenosti na ose  $x$  od počátku jako levá hrana  $(k + 1)$ -ní cihličky. (Obr. 1) Tuto podmínku klademe proto, aby těžiště jsa jinde než nad okrajem  $(k + 1)$ -ní cihličky nezpůsobilo překocení a pád horních  $k$  cihel. Na druhou stranu je zbytečné posouvat těžiště příliš nad  $(k + 1)$ -ní cihličku, neboť tím zmenšujeme tu vzdálenost, kterou chceme docílit maximální.

Označme  $l$  délku cihličky ve směru osy  $x$ . Těžiště cihličky číslo 1 je  $T_1$  a jeho  $x$ -ová souřadnice je  $\frac{l}{2}$ . Levý okraj druhé cihličky umístíme tedy do vzdálenosti  $\frac{l}{2}$  na ose  $x$ . Těžiště soustavy 1. a 2. cihly má  $x$ -ovou souřadnici

$$T_{1,2x} = \frac{T_{1x} + T_{2x}}{2} = \frac{\frac{l}{2} + l}{2} = T_{1x} + \frac{l}{4}.$$



Obrázek 1:

$T_{ix}$ ... x-ová souřadnice těžiště 1. cihly

$T_{i,jx}$ ... x-ová souřadnice těžiště soustavy i.-j. cihly

Levý okraj třetí cihličky umístíme pod těžištěm  $T_{1,2}$ , tedy  $T_{3x} = T_{1,2x} + \frac{l}{2}$ .

Dále:

$$T_{1,3x} = \frac{T_{1x} + T_{2x} + T_{3x}}{3} = T_{1,2x} + \frac{l}{6} \quad T_{4x} = T_{1,3x} + \frac{l}{2}$$

$$T_{1,4x} = \frac{T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} + T_{4x}}{4} = T_{1,3x} + \frac{l}{8} \quad T_{5x} = T_{1,4x} + \frac{l}{2}$$

Snadno nahlédneme, že pro i-tou cihlu platí:

$$T_{1,(i+1)x} = \frac{iT_{1,ix}}{i+1} + \frac{T_{(i+1)x}}{i+1}, \text{ kde } T_{(i+1)x} = T_{1,ix} + \frac{l}{2},$$

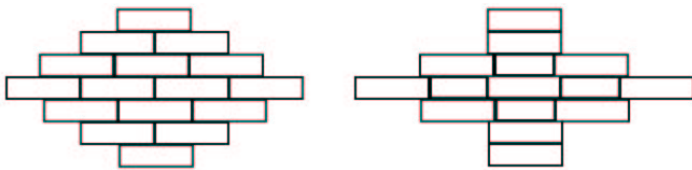
$$\text{takže } T_{1,(i+1)x} = \frac{iT_{1,ix}}{i+1} + \frac{T_{1,ix}}{i+1} + \frac{l}{2(i+1)} = T_{1,ix} + \frac{l}{2(i+1)}.$$

Z toho dostáváme, že x-ová souřadnice těžiště vrchních  $i$  cihel

$$T_{1,ix} = \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{i} \right),$$

což je současně vzdálenost mezi těžišti 1. (vrchní) a  $(i+1)$ -ní cihličky. Snadno si můžete dokázat, že součet této řady může být libovolně veliký (autoři článku důkaz neuvádějí — pozn. redaktora), t.j.:

$$\frac{l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$



Obrázek 2:

Docílili jsme tedy nekonečné vzdálenosti mezi nejnižší a nejvyšší cihličkou. Tato stavba ovšem nebude stabilní, protože těžiště je vždy přesně nad hranou. Abychom docílili stabilní stavby, musíme klást těžiště soustavy  $k$  cihliček kousek nad  $k + 1$ -ní, ne přesně na hranu. Toto posunutí přitom může být velmi malé a může se i zmenšovat. Zvolíme-li toto posunutí  $d = \frac{1}{2}c\frac{l}{k}$ , kde  $k$  je pořadí cihly,  $c$  je konstanta,  $0 < c < 1$ , dostáváme:

$$\frac{l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-c}{n} = +\infty .$$

Z cihliček by tedy bylo možno vytvořit stabilní stavbu, dosahující libovolně daleko.

### Další úvahy o cihličkách

*Matouš Jiráček*

Existuje i jiný způsob, jak docílit nekonečné vzdálenosti. Cihliček však musí být v některých výškách několik vedle sebe. Nekonečnou vzdáleností rozumím vzdálenost libovolnou, tj. libovolně velkou — zadá-li mi někdo nějakou mez libovolně velkou, dovedu ji překročit. Takové řešení je třeba na obr. 2 vlevo

Cihly 2,3 by nebyly stabilní, kdyby na nich neležely cihly 4,5,6, atd., atd.. Když bude šířka tohoto monstra dostatečně velká, přestaneme stavět do šířky, a začneme zužovat stavbu tak, že bude symetrická vzhledem k vodorovné ose procházející středy cihel nejdelší řady. Poslední 1 cihla nahoře by měla stačit, v reálné situaci ji můžeme vždy nějakou tou cihličkou ještě zatížit.

Celá stavba bude stabilní, bude-li na levé straně totéž co na pravé (přesně); labilita daná malou plochou, na níž systém stojí, je problém, který budeme mít u každého řešení (i u řešení z předchozího článku), a zbavíme se ho prostě tak, že stavíme ideálně přesně.

Obdobné řešení je na vedlejším obrázku — některé cihly jsou napříč. Jsou zde větší momenty sil na krajních cihličkách, jinak je to obdobné předchozímu případu.

Cihličky můžeme i zvětšovat. Triviální řešení je stavět na sebe stále větší cihly, nebo prostě na první cihlu dáme jednu obrovskou. V obou případech dostaneme vzdálenost odraje dolní a horní cihly libovolnou. Možné je i cihly otáčet.

Uvažme, co se stane, bude-li tíhové zrychlení  $g$  se vzdáleností od podložky klesat. Horní cihličky pak budou mít menší tíhu než spodní. Domnívám se, že stavba by pak mohla být trochu odvážnější než v předchozím článku — odklon by byl větší.

Co když bude dolní cihlička nevdorovně, ale břž nakloněně? Ideální hladké cihličky po sobě sklouznou. Ale co když budou tak ideální, že budou vykazovat koeficient smykového tření  $\mu$ . Pro zatížení cihličky svírající s podložkou úhel  $\alpha$  pak bude muset platit  $\mu > \tan \alpha$ , aby se stavba nezřítla. Vytvořit zde nějaký přesah je mnohem těžší než ve vodorovných polohách.

Mohli bychom si ještě vymyslet nehomogenní cihličky nebo cihličky jiných tvarů, ale nejnovější výzkumy stejně ukazují, že je velmi výhodné používat maltu.

**Náměty na další činnost:** Nikdo nedokázal, že řešení z prvního článku je pro homogenní cihly tvaru kvádrů skutečně nejlepší, tj., že se tak s použitím nějakého konečného počtu cihel dostanu nejdál. Pokud nedám vrchní cihlu tak moc stranou, mohu zvětšit posunutí spodnějších; kromě toho můžu cihly stavět tak, že hrany nebudou rovnoběžné atd.. Dále by bylo možné prozkoumat, jak na sebe postavit konečný počet cihel (zkuste třeba 10), tak, aby plocha průmětu do roviny podložky byla co největší, případně aby se do ní vešla co největší kružnice (takže to nebude nudle).

### TÉMA III: ROZSYPANÉ ZÁPALKY

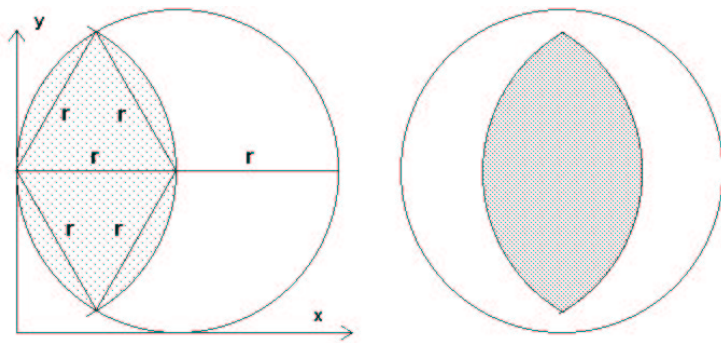
#### **Geometrická pravděpodobnost, aneb chudák ubrus**

*Jan Březina - Morf*

Odpověď na otázku, kolik sirek spadne do kruhu, jasně souvisí s problémem, jaká je pravděpodobnost, že sirka padne do kruhu. Vyřešíme nejprve tuto úlohu, a pak provedeme jistá zobecnění.

Je zřejmé, že ubrus je celý složen ze vzoru podle obr. 3 — vlevo. Polohu sirky plně určují souřadnice  $X, Y$ , jednoho konce sirky (označme ho  $P$  - pevný





Obrázek 3:

konec) a směr sirky, což je odchylka (úhel) sirky od osy  $X$ . Spočítejme nejprve pravděpodobnost toho, že sirka padne celá do kruhu  $K$ , pro směr  $0^\circ$ . Aby sirka padla do kruhu, musí bod  $P$  padnout do vyšrafované části (průnik kruhu  $K$  a kruhu vzniklého posunutím  $K$  doleva o  $r$  - viz obr. 3 — vlevo). Poměr obsahů plochy  $S$  a plochy čtverce nám dá kýženu pravděpodobnost:

$$p_0 = \frac{S}{S} = \frac{2(\frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3})}{4r^2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{24}$$

Jak je z výsledného vzorce a postupu, který k němu vedl, zřejmé, nezávisí pravděpodobnost na směru, a proto je  $p = p_0$ . Mnozí z vás jistě namítnou, že jsem zapomněl započítat sirky, které procházejí body dotyku kružnic, ale při konstantním směru tvoří množina bodů  $p$  takovýchto serek úsečku, kdežto ostatní body  $p$  tvoří plochu. Protože úsečka má nulovou plochu, bude i pravděpodobnost těchto případů nulová. Podobný postup, jako při řešení problému se sirkami, můžeme použít i pro všechny ostatní předměty pouštěné na ubrus s kruhovým vzorem. Je zřejmé, že libovolný předmět (v rovině) je dán bodem a směrem. Protože kruh je ve všech směrech stejný, budou i pravděpodobnosti ve všech směrech stejné, a tak platí:  $p = \frac{S_p}{S}$ .

$S_p$  - Obsah plochy, ve které musí být při konstantním směru bod  $P$  předmětu, aby celý tento předmět byl v kruhu.

$S$  - Obsah čtverce vzoru.

Pokud je vzor ubrusu složen z více disjunktních kruhů, pak je  $p = \frac{S_{p1} + S_{p2} + \dots + S_{pn}}{S}$ , kde  $S_{pi}$  je  $S_p$  pro  $i$ -tý kruh ve vzoru.

Pro jiné vzory (čtvercové, trojúhelníkové ...) už nelze využít invariantnosti vůči směru, a proto je lépe sestavit funkci  $f(x, y) : R^2 \rightarrow R$ , která pro bod o souřadnicích  $X, Y$  ve vzoru určí pravděpodobnost, že směr předmětu bude takový, že předmět bude celý v obrazci. Pak pravděpodobnost  $p$  spočítáme jako dvojný integrál přes  $X$  a  $Y$ :

$$p = \int_0^{maxX} \int_0^{maxY} f(x, y) dy dx, \text{ kde}$$

$maxX, maxY$ , jsou rozměry vzorového obdélníka.

POZNÁMKY: 1) vzor, vzorový obdélník = obdélník, v němž jsou obrazce, do kterých má spadnout zkoumaný předmět, a který opakovaním vytvoří celý ubrus 2) Uvedené úvahy jsou vesměs prováděny pro rozumné vzory, tedy ne pro fraktální vzory, kde je celá problematika daleko složitější. Bylo by například zajímavé zjistit, jaká je pravděpodobnost, že nějaký bod sirky padne do bodů naležících Serpinského koberečku. 3) Úvahy jsou prováděny pro ideální úsečkovou sirku a rovinné předměty.

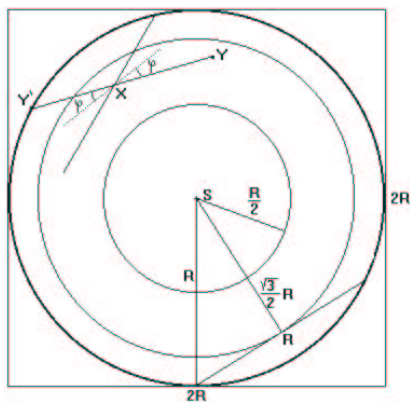
*Pozn: Podobný postup použil i Josef Šeda ve svém článku Zneužití pravděpodobnosti. Rozdíl je jen v tom, že zadával polohu sirky pomocí jejího středu, takže počítal obsah obrazce (spojených kruhových úsečí), posunutého doprava o poloviční délku sirky (obr.3 — vpravo.)*

### Ubrus

Tomáš Bárta, Matouš Jiráček, Tereza Tušarová

Rozlišujeme celkem 4 možnosti:

1. Střed dopadne mimo kruh, pak jistě nebude celá úsečka ležet v kruhu.
2. Střed dopadne do vzdálenosti  $r \in \langle \frac{\sqrt{3}}{2}R; R \rangle$  od středu kruhu. Pak celá úsečka nemůže ležet uvnitř kruhu, protože střed tětivy délky  $R$  leží ve vzdálenosti  $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ .
3. Střed dopadne do vzdálenosti  $\frac{R}{2}$ , pak určitě bude celá úsečka ležet v kruhu o poloměru  $R$ .
4. Střed dopadne do vzdálenosti  $r \in \langle R; \frac{\sqrt{3}}{2}R \rangle$  od středu kruhu. Pak jestli je celá úsečka uvnitř kruhu, záleží ještě na úhlu, pod jakým úsečka leží. Úsečka může s polopřímkou svírat úhel  $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ , přičemž celá leží uvnitř, pokud úhel leží v intervalu  $\langle \frac{\pi}{2} - \varphi; \frac{\pi}{2} \rangle$  (viz obr. 4). K určení závislosti mezního úhlu  $\varphi$  použijeme kosinovou větu v trojúhelníku  $SXY'$ :



Obrázek 4:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + r^2 - R^2}{2rR} = \frac{r^2 - \frac{3}{4}R^2}{rR}, \text{ kde}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \sin(-\varphi) = -\sin \varphi, \text{ tedy}$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{3}{4}R^2 - r^2}{rR}$$

Obvod kružnice o poloměru  $r$  je  $2\pi r$  a pravděpodobnost, že když střed leží na této kružnici, tak celá úsečka leží uvnitř kruhu je

$$\frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \arcsin\left(\frac{\frac{3}{4}R^2 - r^2}{rR}\right)}{\pi}.$$

Když tedy sečteme obvody všech kružnic vynásobených příslušnými pravděpodobnostmi, dostaneme plochu mezikuží vynásobenou pravděpodobností, že úsečka bude celá uvnitř kruhu, když dopadne do tohoto mezikuží:

$$\int_{\frac{R}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \frac{2\pi r}{\pi} 2 \arcsin\left(\frac{\frac{3}{4}R^2 - r^2}{rR}\right) dr$$

Pravděpodobnost, že celá sirka padne do kruhu, tedy bude

$$p = \frac{\int_{\frac{R}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} 4r \arcsin\left(\frac{\frac{3}{2}R^2 - r^2}{rR}\right) dr + \pi \frac{R^2}{4}}{4R^2},$$

kde  $\frac{R^2}{4}$  je obsah kruhu, ve kterém když leží střed, bude celá sirka jistě ležet na puntíku a  $4R^2$  je obsah čtverce.

*Pozn: Tomáš Brauner a Robert Špalek použili ve svých článcích stejnou metodu, jen polohu sirky zadávali pomocí polohy krajního bodu.*

### Praktické určení pravděpodobnosti

*Matouš Jiráek / s velkou lítostí značně zkráceno*

Tato metoda řešení problému je čistě experimentální a spočívá v házení jedné sirky na desku, na které jsou popsáním způsobem nakresleny kruhy jako na ubrusu. Použito bylo dřevěné rýsovací prkno, na němž bylo v obdélníku  $10R \times 8R$ ,  $R$  je délka sirky, narýsováno 20 kruhů o poloměru  $R=44\text{mm}$ , což je běžná délka sirky. Náhodný hod sirkou musí být takový, abychom nemohli vůlí ovlivnit, zda pokus dopadne příznivě či nepříznivě, abychom to dokonce nemohli ovlivnit ani podvědomě. To znamená: házet z dostatečné výšky, nebo ještě lépe provádět vrh šikmý neb svislý vzhůru, aniž bychom hleděli na plochu prkna. Aby sirka dopadala též pod náhodným úhlem vzhledem k přímce  $p \in \varrho$ ,  $\varrho \dots$  rovina prkna, jest nutno vyházovat sirku nejlépe hlavičkou přesně nahoru ve vertikálním směru. Po dopadu se sirka často na prkne odrazí. Tento jev však neublíží naší statistice, neboť sirka se odrazí opět zcela náhodně.

Když sirka dopadne a (po případném odrazu apod.) přejde do klidu vzhledem k desce, zhodnotíme pokus jedním ze čtyř způsobů:

1. Těžiště (v  $\frac{1}{2}$  délky) sirky leží mimo obdélník  $8R \times 10R \Rightarrow$  tento pokus nepočítáme.
2. Sirka dopadla zcela do některého kruhu — tento jev je příznivý, výsledek pokusu hodnotíme 1 bodem, lze-li jej rozlišit.
3. Sirka dopadla těžištěm do plochy  $8R \times 10R$ , ale neleží zcela v některém kruhu — takový pokus hodnotíme 0 body, pakliže jej lze jasně rozlišit.

4. Nelze-li v některých případech jednoznačně říci, zda pokus dopadl příznivě či nepříznivě, započítáme jej jako pokus s nejasným výsledkem za  $\frac{1}{2}$  bodu. Tyto nejasnosti vzniknou tehdy, když sirka leží celá v kruhu, pouze malá její část, téměř bodová, překrývá část kružnice ohraničující kruh, přičemž tato kružnice je vlastně mezikružší, neboť žádná tuha nebo jiné psací neb kreslicí náčiní není nekonečně tenké.

Výsledky pokusů zaneseme do tabulky a relativní četnost příznivých jevů spočteme tak, že vydělíme součet bodů provedených pokusů jejich celkovým počtem. *(Následuje tabulka 5000 pokusů, kterou z technických důvodů nepřetiskujeme a bude k nahlédnutí u autora. Domnívám se že otištěný graf vystihuje situaci dostatečně přehledně. — pozn. redaktora)*

Po provedení 5000 náhodných pokusů vidíme, že relativní četnost příznivých jevů je přibližně 30.06%. Pokud bychom prováděli další pokusy, jsou již velmi nepravděpodobné výraznější odchylky od této hodnoty, což lze dokumentovat grafem, do kterého je zanesena aktuální relativní četnost v závislosti na počtu provedených pokusů. Vidíme, že pro prvních 100 hodnot jsou odchylky velmi výrazné, pro dalších 200 hodnot stále ještě poměrně velké a rychlé (rychlé změny, tj. kolísání). Zhruba do 500. pokusu můžeme odchylky označit za signifikantní. Potom má již výsledek jednoho nebo třeba i pěti, deseti pokusů malý vliv na průvěr vytvořený z velkého souboru hodnot. Kolem 5000. pokusu jsou již výkyvy zanedbatelné a relativní četnost velmi stabilní.

*(Výsledky jsou zaneseny do grafu pouze do pokusu č. 400. Uvedme zde hodnoty aktuální relativní četnosti po provedení 500. až 5000. pokusu alespoň pro násobky 500. Jsou to: 0.3390, 0.308, 0.3063, 0.2968, 0.2978, 0.2950, 0.2931, 0.2991, 0.3000, 0.3006. — pozn. redaktora)*

Můžeme tedy vyslovit závěr experimentu:

Bylo experimentálně zjištěno, že ze sta zápalek nejpravděpodobněji bude ležet zcela v kruhu 30 zápalek, z jedné krabičky o 43 zápalkách zůstane ležet uvnitř kruhů s největší pravděpodobností 13 zápalek. Možné je samozřejmě vše, třeba i to, že žádná zápalka nepadne do kruhu, ale není to tak pravděpodobné.

Ještě bych se zmínil o jednom předpokladu, který jsme v této experimentální metodě učinili. My jsme totiž házeli *jednou* sirkou, nikoli soustavou několika  $i$  1 sirek. Učinili jsme tedy jakýsi předpoklad superpozice, nezávislosti jevů, tj. předpoklad, že ovlivňují-li se sirky vzájemně při pádu z krabičky,

pak se ovlivňují zcela a naprosto *náhodně*, takže relativní četnost pokusů s příznivým výsledkem je pro  $n$  sirek stejná, ať je na ubrus rozsypeme najednou, nebo ať je tam házíme po jedné postupně. Tento předpoklad je dost závažný. Nepochybuji o jeho správnosti, avšak nemám nic k jeho podložení. Domnívám se tedy, že je namístě provést alespoň několik pokusů s celou krabičkou.

#### Pokusy s krabičkami

K pokusům použijeme krabičky obsahující 43 nepoškozených zápalek. (*Autor nejprve provádí průzkum použitých krabiček se sirkami — zájemce odkazují na původní práci, pozn. redaktora*)

Ukázalo se, že nejvýhodnější je pouštět zápalky z výšky 1m volným pádem. Celkem bylo provedeno 50 měření (vrhů krabičky sirek; tabulku výsledků z práce nepřetiskujeme — pozn. redaktora). Celkový počet sirek, které padly při těchto pokusech dovnitř kruhů je 408. Sirek, které padly na ubrus mimo kruhy bylo 940. Ostatní případy, kdy sirky padly mimo ubrus nebo nešlo rozhodnout se do výsledku nezapočítávají. Odtud relativní četnost:

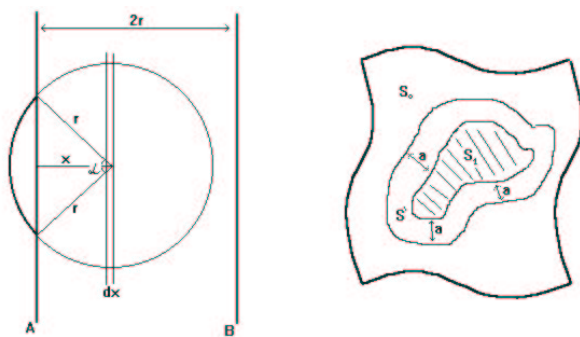
$$r = \frac{408}{408 + 940} \doteq 30,27\%$$

což je současně pravděpodobnost, že hod jednou sirkou dopadne příznivě. Opět se dostáváme k výsledku, že z krabičky o 43 zápalkách dopadne zcela dovnitř kruhů s největší pravděpodobností 13 zápalek.

#### Řešení problému vhodným programem

Kromě praktického experimentálního řešení a teoretického výpočtu existuje ještě jiný způsob řešení podobných úloh. Řešení spočívá v napsání takového programu, který by pro čísla generovaná generátorem náhodných čísel prováděl analogické pokusy, jako my provádíme v praxi. Přednost tohoto řešení je v možnosti provést velké množství pokusů s vynaložením minimální námahy, nevýhoda v tom, že musíme mít dostatečně dobrý generátor náhodných čísel. (*Autor diskutuje vlastnosti dobrého generátoru*).

Algoritmus, který jsem použil pro výpočet spočívá v imaginárním házení úseček do plochy výřezu ubrusu obsahující  $2 \times 2$  kruhy. Generujeme náhodně bod v tomto čtverci — to je jeden konec sirky, potom pomocí náhodného úhlu generujeme polohu druhého konce sirky. Leží-li těžiště této sirky mimo náš výřez, pokus nepočítáme. Padne-li dovnitř, zjistíme, zda sirka padla do jednoho kruhu. (To je ekvivalentní tomu, že oba konce padly do stejného



Obrázek 5:

kruhu). Tento „pokus“ provedeme  $100 \times$ , a počet úspěšných pokusů tedy udává přímo relativní četnost v %.

(Autor dále uvádí popis a výpis programu a 200 hodnot pravděpodobností, získaných programem — pozn. redaktora) Průměr hodnot, které jsem získal 200 násobným spuštěním programu, využívajícího tento algoritmus, je 31,10%, což je hodnota blízká experimentálně i teoreticky zjištěné. (Přesně řečeno, jak autor uvádí, v použitém programu je ještě drobná chyba, spočívající v tom, že když padne první bod mimo kruhy, je pokus už před generováním druhého považován za neúspěšný. Přitom se však ještě může stát, že by sirka ležela větší částí mimo náš výřez a pokus by se započítávat neměl.)

### Rozsypané předměty

Tomáš Brauner, Matouš Jiráček

1. Vezmu si nyní ubrus poněkud odlišný — vzor je tvořen rovnoběžnými čárami vzdálenými  $2r$ , a mám zjistit, s jakou pravděpodobností sirka protne některou čáru (viz obr. 5 — vlevo).

**Řešení:** Pro  $0 \leq x \leq r$  může sirka protínat pouze čáru  $A$ , pro  $r \leq x \leq 2r$  pouze čáru  $B$  (situace je symetrická, takže stačí spočítat pravděpodobnost pro první případ). Platí:

$$dp' = \frac{dx}{r} \quad ; \quad p' = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2 \arccos \frac{x}{r}}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{x}{r},$$

kde  $p'$  je pravděpodobnost, že sirka, jejíž konec dopadne do vzdálenosti  $x$  od čáry, bude tuto čáru protínat

$$dp = p' \cdot dp', \quad \text{po dosazení}$$

$$dp = \frac{1}{\pi r} \arccos \frac{x}{r} dx, \quad \text{integrací dostaneme}$$

$$p = \int_0^r \frac{1}{\pi r} \arccos \frac{x}{r} dx$$

zavedeme substituci  $t = \frac{x}{r}$ , potom  $dt = \frac{dx}{r}$

$$p = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \arccos t dt, \quad \text{což si můžeme představit jako}$$

$$p = \frac{1}{\pi} \int_0^1 1 \cdot \arccos t dt \quad \text{a zintegrovat metodou per partes:}$$

$$f'(t) = 1 \Rightarrow f(t) = t \quad g(t) = \arccos t \Rightarrow g'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$p = \frac{1}{\pi} \left( [t \arccos t]_0^1 + \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

zavedeme substituci  $z = 1 - t^2$ , potom  $-\frac{dz}{z} = t dt$

$$p = -\frac{1}{2\pi} \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot [\sqrt{z}]_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

$$p = \frac{1}{\pi} \quad ; \quad p \doteq 32\%$$

2. Teď budu po různých ubrusech rozsypávat sušenky (tenké disky o poloměru  $a$ ) — obecně se dá říci, že když je ubrus tvořen opakováním motivu o obsahu  $S_0$ , v němž je obrazec o osahu  $S'$ , a já chci, aby celá sušenka ležela v obrazci  $S'$ , pak musí být střed obrazce  $S_0$  vzdálený od všech bodů okraje obrazce  $S'$  více než  $a$  (viz obr. 5 — vpravo). Množina všech bodů této vlastnosti je v obr. vyznačena šrafováním (je to plocha o obsahu  $S_1$ ). Poloha celé sušenky je vlastně jednoznačně určena jejím středem (tato úloha je tedy mnohem jednodušší než předcházející dvě, kde byla poloha sirky určena dvěma body) a pravděpodobnost, že celá



sušenka bude ležet v obrazci  $S'$ , je  $p = \frac{S_1}{S_0}$ , např. pro původní síť čtverců červených kruhů je  $S_0 = 4r^2$ ,  $S' = \pi r^2$ ,  $S_1 = \pi(r-a)^2$  ( $a < r$ )

$$p = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2.$$

*Matouš Jirák experimentálně ověřil tuto teorii házením koleček o poloměru 2,5mm na ubrus paní Mulačové o poloměru puntíků 44mm. Po pro vedení 517 pokusů dosáhl relativní četnosti 65,4%. Teoreticky vychází 69,9%.*

## TÉMA IV: PROSTORY VÍCE DIMENZÍ

### ÚVODNÍ ČLÁNEK — o pravidelných mnohostěnech

*Martin Čížek*

Euklidovský  $n$ -dimenzionální prostor budeme značit  $\mathbf{R}^n$  a můžeme ho popisovat  $n$ -tíci reálných čísel - souřadnic. Mnohostěn v  $\mathbf{R}^3$  nazýváme eulerovským, pokud jeho povrch lze bez nastřihování a slepování zdeformovat na kouli. Pravidelným mnohostěnem v  $\mathbf{R}^3$  nazýváme eulerovský mnohostěn, jehož stěny tvoří pravidelné  $l$ -úhelníky (všechny stejné a jehož vrcholy mají všechny stejný stupeň (stupněm vrcholu rozumíme počet hran z něj vycházejících). Pro eulerovské mnohostěny platí tzv. Eulerova věta, která nám umožní najít všechny pravidelné mnohostěny.

#### **Věta (Eulerova pro mnohostěny):**

Označme  $s$  počet stěn,  $v$  počet vrcholů a  $h$  počet hran eulerovského mnohostěnu. Potom platí vztah

$$h + 2 = s + v$$

Důkaz této věty se dá najít v literatuře, popřípadě se jej můžete snažit vymyslet sami. Pokud máte chuť můžete se pokusit zobecnit pojem eulerovského mnohostěnu do více dimenzí a pokusit se najít a dokázat zobecnění Eulerovy věty (větu nazveme podle prvního oběvitele). Doporučuji začít dimenzí  $n = 4$ .

Pravidelné mnohostěny se dají nalézt pomocí Eulerovy věty následovně. Označme stupeň vrcholů mnohostěnu  $k$  a počet stran mnohoúhelníku jenž tvoří jeho stěny  $l$ . Určitě musí být  $k > 2$  (jinak by to nebyl žádný vrchol) a také  $l > 2$ . Maximální hodnota  $l$  je 5, neboť šest a více úhelníky mají trojnásobek vrcholového úhlu alespoň  $2\pi$  a nemohou vytvořit zakřivený povrch (šestiúhelníky se ještě nanejvýš podaří naskládat do roviny). To znamená že

může být  $l = 3, 4$  nebo  $5$ . Pro  $l = 5$  smí být pouze  $k = 3$ , protože více než tři 5-tiúhelníky se k jednomu vrcholu nevejdou. Podobně zjistíme, že dovolené hodnoty dvojic  $(l, k)$  jsou pouze  $(4,3)$ ,  $(3,3)$ ,  $(3,4)$ ,  $(3,5)$  a již uvedená  $(5,3)$ . Teď se podívejme na to jak zjistit ostatní parametry mnohostěnů. Počet stěn označme  $s$ . Počet hran je potom roven  $h = s.l/2$  (1 hran na každé stěně, ale každá hrana je sdílána dvěma stěnami) a počet vrcholů je  $v = s.l/k$  (každá stěna má  $l$  vrcholů, které jsou ovšem sdílány  $k$  stěnami). Dosazením těchto vztahů do Eulerovy věty dostaneme

$$\frac{sl}{2} + 2 = \frac{sl}{k} + s,$$

odkud snadno vyjádříme  $s$

$$s = \frac{4k}{2k + 2l - kl}.$$

Budeme-li za  $(k, l)$  postupně brát výše uvedené dvojice budeme postupně dostávat pravidelný šestistěn (krychle), čtyřstěn, osmistěn, dvacetistěn a dvánáctistěn.

Pokuste se zobecnit pojem pravidelného mnohostěnu do více dimenzí (opět je asi nejlepší začít v  $n = 4$ ) a nalézt nějaká pravidelná tělesa. Bylo by zajímavé popsat zobecnění krychle do více dimenzí a pokračování řady úsečka ( $n = 1$ ), trojúhelník ( $n = 2$ ), čtyřstěn ( $n = 4$ ), ... a zejména nalézt a popsat ve více dimenzích nějaké složitější pravidelné těleso (pojmenujeme jej po nálezci). Bude zajímavé když se pokusíte i o jiné úvahy na toto téma - všechny příspěvky náležitě obodujeme a zajímavé otiskneme, aby se mohli inspirovat a popřípadě na práci navázat další.

## TÉMA V: BLOUDĚNÍ

Představte si, že jste zabloudili v neznámém terénu a jediné co víte je, že kilometr od vás vede přímá cesta na kterou se chcete dostat. Je to malá pěšina a viditelnost je velmi špatná, takže cestu uvidíte teprve když na ní stojíte. Navrhněte postup, jak ji najít a přitom ujít co nejkratší dráhu. Zkuste přijít nejen na teoreticky nejlepší postup, ale navrhněte i postup, který by byl prakticky proveditelný, uveďte jaké pomůcky byste k bloudění potřebovali. Můžete se zamyslet i nad problémem, kdy cesta na kterou se chcete dostat není přímá.

## REKREAČNÍ ÚLOHY (ŘEŠENÍ):

### 1. Úloha — Mnich

Asi nejjednodušší je přenést jeho cestu tam a zpět do jednoho dne. Ve stejný okamžik vyrazí mnich z kláštera ke svatyni a jiný exemplář stejného mnicha od svatyně ke klášteru. Protože tato místa spojuje jen jedna cesta, musí se mniši někde potkat. Při tom jsme ovšem předpokládali, že slunce vychází v obou dnech na obou místech ve stejnou hodinu. Kdyby rozdíl časů byl příliš veliký, mohlo by se stát, že by jeden z mnichů dorazil k cíli dříve, než by se druhý vydal na cestu. To by se pak na stezce nepotkali.

### 2. Úloha — Z turistické praxe

Existuje poměrně jednoduchý způsob, jak převést na protější břeh syny i otce lodkou o nosnosti 100 kg.

Jízda č.	Směr	V loďce	Zatížení	Na druhém břehu
1.	Tam	2 synové	100 kg	
	Zpět	1 syn	50 kg	1 syn
2.	Tam	1 otec	100 kg	
	Zpět	1 syn	50 kg	1 otec
3.	Tam	2 synové	100 kg	
	Zpět	1 syn	50 kg	1 syn a 1 otec
4.	Tam	1 otec	100 kg	
	Zpět	1 syn	50 kg	2 otcové
5.	Tam	2 synové	100 kg	všichni

Protože nejtěžší člověk, který se má přepravit na druhou stranu važí 100 kg, neexistuje řešení úlohy s nižší nosností loďky.

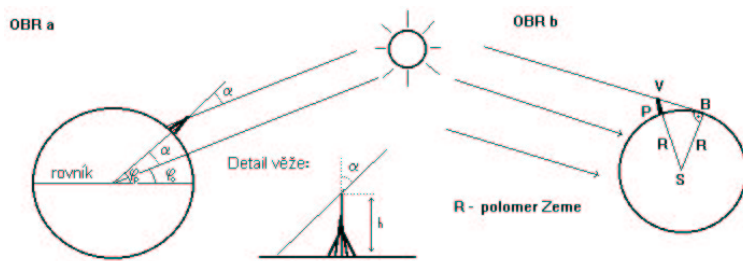
### 3. Úloha — Od Soni z Paříže

Nejkratší stín vrhá Eiffelka v době letního slunovratu, kdy je Slunce nad oratníkem Raka (zeměpisná šířka  $\phi_0 = 23^{\circ}26'$ ) - viz obr 6a.

Z obrázku je vidět, že délka stínu je  $s = h \tan \alpha \doteq 152\text{m}$ , kde jsme dosadili výšku Eiffelky  $h = 320,75\text{m}$  (včetně antény).

Nejdelsí stín bude vrhat věž samozřejmě večer v okamžiku východu, či ráno v okamžiku západu slunce - viz obr6b. Vzhledem k relativně malé výšce věže (vůči poloměru Země) se nedopustíme velké chyby, když délku stínu (=oblouk BP) nahradíme délkou úsečky BV, tj.

$$s \doteq |BV| = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2} \doteq \sqrt{2Rh} \doteq 64\text{km}, \quad (*)$$



Obrázek 6:

kde jsme zanedbali malý člen  $h^2$  a za  $R$  dosadili poloměr Země  $R = 6,37 \cdot 10^6$  m.

*Poznámka:* Provedli jsme některá zjednodušení:

-Při určování nejkratšího stínu jsme zanedbali zakřivení povrchu Země (na 150-ti metrovém stínu se určitě neprojeví) a konečnou vzdálenost Země-Slunce jsme nahradili nekonečnou.

-V souladu se zadáním úlohy jsme zanedbali zploštění Země (rozdíl rovníkového a polárního průměru je asi 40km) tj. její eliptický tvar a také jsme idealizovali konkrétní geometrii povrchu v okolí věže (budovy, hory, doly, sedmero řek,...) geometrií koule.

-nespecifikovali jsem podrobně jak měříme stín věže (v našem řešení od středu základny, ale lze definovat i jinak) a neuvážili jsme, že okraje stínu jsou rozmazané, díky tomu, že Slunce není bodový zdroj světla. Dále jsme neuvážovali ohyb světla na věžní konstrukci a zakřivení světelného paprsku vlivem nehomogenity teploty vzduchu ("tetení vzduchu").

-Při výpočtu nejdelšího stínu jsme provedli jistá zanedbání (viz rovnost (\*)) a provedli jsme již zmíněnou idealizaci povrchu a tvaru Země.

-Zanedbali jsme tepelnou roztažnost věže, která může činit více než 10cm a jistě také spoustu dalších vlivů.

Mnozí z vás se některá zjednodušení pokoušeli odstranit, ale myslím si, že celkem zbytečně, protože nejpodstatnější zjednodušení - idealizace okolí věže - se dá těžko zpřesnit a proto stačí počítat délku stínu s jistou malou chybou, jejíž velikost je stejného řádu (ne-li spíš daleko menší) jako velikost chyby způsobené právě touto idealizací. Pěkné řešení s pohlednicí a mapou Paříže nám zaslal Aleš Návrat.

## REKREAČNÍ ÚLOHY (ZADÁNÍ):

### 1. Úloha — O spravedlivém loupežníkovi

Spravedlivý loupežník bohatým bere a chudým dává. Jedno "okradení" sestává z toho, že loupežník okradenému vše vezme, přidá ke svým penězům a poté vše rozdělí mezi sebe a "okradeného" napůl. Náš loupežník střídavě okradá jednoho chudáka a jednoho boháče. Na začátku má boháč 1000 zlatek, chudák ani loupežník nemají nic. Zkuste určit, kolik bude mít loupežník peněz po 100 lubech. Nejvíce bodů dostanete, když budete provádět nejméně numerických výpočtů.

### 2. Úloha — Magická kostka

Vepište čísla 1, 2, 3, ..., 27 do krychle  $3 \times 3 \times 3$  tak, aby se tam každé číslo vyskytovalo právě jednou a aby součet každé trojice čísel, ležících buď nad sebou, za sebou a nebo vedle sebe, byl stejný.

*Nápověda:* Lze napsat čísla 1, 2, 3, 4 do tabulky  $2 \times 2$  tak, aby byl součet v každém řádku i sloupci stejný?

### 3. Úloha — Problémy na kosmické stanici

Kosmická stanice Bradley obíhá kolem Slunce po přeně kruhové dráze ve vzdálenosti 100 miliónů km s oběžnou dobou asi 242,4 dne. Potační osa Bradleye je přesně kolmá na rovinu oběhu kolem Slunce a neklepe se. Na stanici pracoval jeden velice pečlivý, ale ne příliš chytrý astronom. Měřil polohu hvězdy, která se zdála být přímo v ose rotace stanice. Zjistil, že hvězdička uběhla na obloze za 1 bradleyovský rok kolečko o poloměru 20,6 úhových vteřin. Další rok měřil polohu hvězdy na  $60^\circ$  bradleyovské šířky a naměřil elipsu s velkou ploosou 20,6" (a malou 10,3"). Třetí rok se soustředil na hvězdu ležící na "rovníku" a zjistil, že takle hvězdička běhá po úsečce s délkou 41,2" (=  $2 \times 20,6$ ") tam a zpátky za 1 bradleyovský rok. Tohle mu už bylo podezřelé tolik stejných hodnot (navíc věděl, že všechny měrené hvězdy jsou hodně vzdálené, dál než 10 světelných let), ale vůbec si s tím nevěděl rady. Dokázali byste astronomovi poradit a vysvětlit mu pohyb hvězd?

*Pozn.1* Měření probíhalo v nějaké vztažné soustavě nezávislé na hvězdách a jiných astronomických objektech.

*Pozn.2* Pokud si ani vy nevíte rady, zkuste si zjistit jaké objevy učinil astronom Bradley.

**Termín odeslání:** 6.1.1996

**ADRESA SEMINÁŘE:**

M&M – B211  
VŠK 17. listopadu  
Pátkova 3  
182 00 Praha 8, Libeň