

Ahoj kamarádky a kamarádi,

a máme tu podzim. Ve škole jste už stihli zapadnout do zajatých kolejí a venku začíná být škaredě. Přesně tak, jak říká jeden náš profesor: „Život lidský se sestává ze zimního spánku, jarní únavy, letní dovolené a podzimní deprese.“ Doufáme, že vám další číslo našeho časopisu trochu zvedne náladu. A pokud nám vaše řešení odešlete už do 1. 11., máte ještě šanci probojovat se na soustředění ;-). Bude tentokrát podzimně-zimní, chystáme ho na termín 8.–16. 12. Také bychom vás rádi pozvali na den otevřených dveří na MFF, který se koná v úterý 27. 11.

*Vaši organizátoři*

**Termín odeslání: 18. 11. 2007**

## Zadání úloh

### Úloha 2.1 – Trojice (4b)

Na vámi uspořádaný turnaj v Halmě (varianta skákané pro 3 hráče) se přihlásilo nečekaných 13 hráčů, což vám vše trochu zkomplikovalo. Chcete to zařídit tak, aby si spolu každý dva hráči zahráli alespoň jednou, ale zase nechcete žádné zbytečné partie – už takhle jich bude až až. Jak tedy vytvořit z 13 hráčů (neuspořádané) trojice tak, aby každá dvojice hráčů byla právě v jedné trojici?

Pro 7 hráčů jste to měli vymyšleno dopředu – rozlosovali byste jim čísla 1, 2, ..., 7 a nechali byste je hrát takto: (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (2, 4, 6), (3, 4, 7), (2, 5, 7), (3, 5, 6).

Bonusová otázka: dokážete pro oněch 13 najít i další schémata turnajů? Pokud u schématu turnaje jen přechísľujete hráče, bereme to jako stejné schéma. Schémata  $A$  a  $B$  se liší, pokud pouhým přechísľováním hráčů z  $A$  nelze vyrobit  $B$ .

### Úloha 2.2 – Čerpadlo (4b)

Máme čerpadlo s tlakovou nádobou. To funguje tak, že čerpá vodu do zásobníku tak dlouho, dokud tlak nedosáhne zvoleného vypínacího tlaku  $p_1$ . Poté se čerpadlo zastaví a odebíraná voda odtéká z tlakové nádoby. Ve chvíli, kdy tlak klesne na hodnotu  $p_2$  ( $p_2 < p_1$ ), zapne se opět motor čerpadla.

Tlaková nádoba je nádoba o nějakém objemu rozdělená pohyblivou přepážkou na část, do které se čerpá voda, a na část, ve které je uzavřeno nějaké množství vzduchu.

Máme teď takové čerpadlo, ve kterém není zatím žádná voda. Otázkou je, jaký tlak vzduchu zvolit v tlakové nádobě (bez vody), aby čerpadlo po dosažení tlaku  $p_1$  dodalo co nejvíce vody, než se bude muset motor opět zapnout. Hodnoty zapínacího a vypínacího tlaku a objem tlakové nádoby jsou předem pevně dané.

### Úloha 2.3 – Lentilky (5b)

Riki dostal k svátku hromadu ( $N$ ) lentilek, a rozhodl se s nimi hrát následující hru: narovná lentilky do řady a hrozně dlouhým rozpočítadlem, ve kterém vždycky udělá nějakou chybu, si jednu vybere (tj. vybere náhodně). Sní pak všechny lentilky, které jsou za tou, kterou vybral (pokud to bude ta poslední v řadě, nesní žádnou). A pak pokračuje znovu, dokud mu nezbude jediná lentilka. Tu hodí někomu do kofoly :-). Kolikrát bude Riki průměrně rozpočítávat v závislosti na  $N$ ?

### Úloha 2.4 – Přednáška (2b)

Když jsem si jednou v menze sedal ke stolu, slyšel jsem, jak se mí kamarádi Adam, Bohuš, Cyril, Dalimil a Eduard bavili. Zaslých jsem však pouze konec rozhovoru.

Adam: „Na Karlově.“

Bohouš: „Ale ne, v Karlíně.“

Cyril: „Rozhodně v Tróji.“

Dalimil: „Já si jsem jistý, že na Malé Straně.“

Eduard: „Jste padlí na hlavu? Jedině v Hostivaři!“

Když jsem se jich zeptal, kde máme následující přednášku, dostal jsem tyto odpovědi:

Adam: „Já nebo Bohouš jsme to před chvílkou říkali.“

Bohouš: „Pokud Cyril mluví pravdu, tak minimálně tři z nás mluví pravdu.“

Cyril: „Adam a Bohouš lžou.“

Dalimil: „Místo příští přednášky říkal někdo, kdo mluví pravdu.“

Eduard: „Cyril mluví pravdu.“

I když tomu možná nevěříte, jsou dva druhy matfyzáků. Jedni mluví pořád pravdu a jedni pořád lžou.

Já už své spolužáky znám a díky tomu můžu jednoznačně určit, kam mám jít na příští přednášku. Víte to i vy?

Malé upozornění: U tvrzení typu „Na MatFyzu“ nemůžeme určit, zda je pravdivé či nikoliv, pokud přesně neznáme souvislosti se kterými bylo zmíněno.

# Zadání témat

## Téma 4 – Barevná skla

Představme si následující uspořádání: úplně vzadu máme stínítko, ve vzdálenosti  $d$  před ním máme sklo S1, od  $d$  dále sklo S2 ... Představme si, že skla jsou nějak pomalovaná či mozaiková (v určitých místech propouštějí veškeré světlo, v určitých jen část, jinde vůbec). Co se stane, když skrz ně posvítím rovnoběžnými paprsky bílého světla pod určitým úhlem? Je snadné zjistit, jak budou vypadat obrazy v závislosti na úhlu paprsků, jak těžké je ale pro dva zadané obrazy na stínítku určit vzory na sklech a pozice světla?

(Ano, pokud byste svítili hodně zešikma, tak by v normálním případě světlo procházející jedním sklem minulo sklo druhé, což by bylo moc jednoduché. Aby to bylo zajímavější, budeme používat nekonečně široká skla s periodickými vzory.)

Co, kdyby nešlo o skla zabarvená, ale lineárně polarizovaná (omezme se zatím na vertikální a horizontální polarizaci)? V tomto případě projde světlo místy, kde bude na všech sklech stejná orientace, neprojde tam, kde alespoň jedna z polarizací bude opačná než ostatní (nefyzikálně to můžeme brát jako XORování dvou černobílých obrázků).

Co tedy řešit? Chtěli bychom vědět, kdy jde z několika obrazů určit vzory na sklech a úhly. V případech, kdy to jde, by nás zajímal i minimální počet takových obrazů, který nám bude stačit.

Doporučujeme začít od nejjednodušších případů – dvou skel a černobílých vzorů. Hodně štěstí.

## Téma 5 – Dysonova sféra

Známý fyzik Freeman Dyson v padesátých letech navrhl konstrukci, pomocí které by mohla dostatečně technicky vyspělá civilizace využít celý výkon hvězdy. Jedná se o tenkou slupku asi ve vzdálenosti jedné astronomické jednotky od hvězdy podobné Slunci. Dyson se domníval, že pro dostatečně technicky vyspělou civilizaci bude výhodné takovéto struktury budovat a proto bychom po nich měli pátrat jako po logických důsledcích existence mimozemských civilizací.

Představte si, že jste architekti takovéto vyspělé civilizace a máte vytvořit Dysonovu sféru za účelem obývání lidmi. Je potřeba vyřešit mnoho otázek:

- \* Jak by měla být Dysonova sféra tlustá, aby byla na ní při „rozumné“ hustotě užitých materiálů bylo přiměřeně silné gravitační pole?
- \* Ze které strany by mohla být atmosféra? Může být z obou stran kulové slupky? Nebo jen z některé? Jak se navzájem skládají gravitace Slunce s gravitací sféry?
- \* Jak je to se stabilitou? Jaké síly se snaží sféru roztrhnout? A co únik materiálu? Dochází k němu? (Země je relativně stabilní – její atmosféra sice pomalu uniká, ale tento únik je naprosto zanedbatelný a navíc je doplňován např. sopečnou činností – jak by to bylo s možným únikem materiálu z DS?)

- \* Jak se bude měnit hustota atmosféry s výškou? Jaká bude úniková rychlost směrem ven a směrem dovnitř?
- \* A co kdyby to nebyla sféra, ale třeba elipsoid?
- \* Co když bude sféra rotovat? Jak se změní třeba její mechanické namáhání?
- \* Měla by to být opravdu sféra nějaké tloušťky? Není výhodnější jiné rozložení hmoty po ploše?

## Téma 6 – Protokol

Domluvit se telefonem dnes umí snad každý, ale telefonní konference více než pěti lidí už bude vyžadovat nějakou tu koordinaci. O to složitější situace nastane, pokud je ke komunikaci použita jednodušší linka (telegraf) nebo jsou komunikující pouhé automaty s nedostatkem pochopení a improvizací invence. Pro takové případy je lepší mít předem dohodnutý *komunikační protokol* – sadu pravidel určujících kdo, kdy, jak a komu odvysílá jaký signál a jak si ho má příjemce vyložit.

Každý protokol je navržen pro nějaké prostředí (médium), kterým se signály předávají. V praxi počítačových sítí jsou to elektrické vlastnosti kabelů a součástek síťových karet, to je pro nás ale příliš komplikovaný (a navíc prozkoumaný model). Budeme se proto zabývat hlavně různými variantami idealizovaného telegrafu.

Požadavky na protokol jsou v zásadě umožnit předat zprávu od jednoho účastníka ke druhému. Další požadavky mohou být zotavení v případě chyby či omylu, schopnost provozu na lince s chybami (šumem) a samozřejmě co největší rychlost.

### Média

Nejjednodušší médium pro nás bude telegrafní linka mezi dvěma účastníky komunikace. Oba mají k dispozici tlačítko a ve sluchátkách se jim ozývá tón, pokud alespoň jeden z nich tlačítko drží. Tón zní stejně i pokud tisknou tlačítko oba současně. Účastníkům může být i více, ale z tónu nelze poznat, kolik účastníků tlačítko drží. Na domluvu trochu snazší je varianta telegrafu, kdy účastník slyší pouze signál toho druhého. Při té je nejen možné vysílat zároveň oběma směry, ale nehrozí ani zmatek v situaci, kdy začnou oba vysílat skoro najednou.

Nezapomeňte, že koncová zařízení nemají neomezenou časovou přesnost a počítejte s něčím jako nejmenší časová jednotka. Tato se samozřejmě bude lišit podle skutečné linky (telegraf, el. kabel, optický kabel, ...)-, ale můžete od ní odvodit časovou náročnost komunikace. Nezapomeňte, že ani hodiny na obou stranách nejdou přesně stejně rychle, natož aby byly seřizené.

Pro teoretičtější úvahy o kódování a chybovosti můžete použít oboustrannou linku přenášející konstantní rychlostí přímo bity nebo znaky z nějaké konkrétní dané abecedy. Velmi zajímavá je linka bezchybně přenášející tečky (0) a čárky (1), ovšem s tím, že přenést čárku je třikrát pomalejší (viz část Kódování).

Médium zajímavé pro komunikaci více než dvou účastníků je sdílená linka, na kterou je možno (telegraficky) vysílat až na  $k$  kanálech (opět jen signál/ticho na každém kanále). Protokol pro toto médium může uvažovat možnost několika současných přenosů nebo přerozdělování kanálů mezi přenosy. Též zajímavá je idea trvale řídicího kanálu.

Vymyslíte-li další zajímavá média, zkuste pro ně vymyslet protokol. Výzvou jsou třeba poštovní holubi (sami si rozmyslete, jaké problémy to obnáší).

### Požadavky

Co by měl protokol umět, jsme napsali už v počátku – především doručit zprávu k cíli. Není cílem zahrnovat do něj další služby, jako je šifrování, podpisy, jména souborů nebo podobné – to vše lze vybudovat jako nadstavbu.

Bylo by hezké, kdyby protokol nerozházela nějaká ta chyba na vedení. Zkuste uvažovat některé z médií s pravděpodobností chyby  $p$  na každý bit či znak – nejsnazší je to asi pro linku přenášející přímo bity. Jak poznáte špatně přenesený úsek? Jak dlouhé bloky se vyplatí přenášet (pokud je blok s chybou potřeba poslat znovu)? Jak odhadnout neznámou chybovost  $p$  za provozu linky?

Nejpřesnější popis protokolu je algoritmus, kterým se budou koncové stanice doslova řídit, ačkoli taková přesnost není vždycky třeba. Měli byste ale pamatovat na to, že by popis měl jít doplnit až na algoritmus. Vždy si vyberte jen nějakou oblast a popište její řešení, nezkoušejte vyřešit vše (kolize, chyby, více účastníků, ...) najednou.

Pokud chcete, můžete napsat i program pro koncové stanice (předpokládejte jednoduché médium – třeba chybový proud bitů).

### Kódování

Jak bude zpráva vypadat si může protokol vybrat - zda půjde o jednotlivé bity (0 a 1), bajty (čísla 0 ... 255), písmena nějaké vybrané abecedy či o morseovku. Mezi jednotlivými reprezentacemi (kódováními) zprávy je většinou lehké převádět, ale sestrojít ideální kód je též zajímavý úkol.

Písmena lze (tabulkou) převést na čísla a ta pak na posloupnost bitů. Bity pak na posloupnost teček a čárek. Toto ale není moc efektivní. Morseovka kóduje nejpoužívanější písmena anglické abecedy (E,T,R,A,S, ...) do nejkratších posloupností, dělá to ale opravdu dobře? Co kdyby trvala čárka dvakrát déle než tečka? A třikrát? Zkuste třeba vyrobit kód podobný morseovce i pro češtinu (s háčky nebo bez nich, nezapomeňte na mezeru).

Pro přenos posloupností bitů se zkuste zamyslet, jak kódovat jednotlivá písmena pro češtinu či angličtinu a jak při tom oddělovat písmena, slova a věty. Bylo by výhodné kódovat ne jen jednotlivá písmena, ale rovnou dvojice nebo trojice znaků? Ačkoli je „a“ v češtině mnohem běžnější než „b“, vyskytuje se „ba“ mnohem častěji než „aa“.

Dalším krokem je pak kódování např. 100000 nejpoužívanějších slov vcelku („nebo“ se vyskytuje mnohem častěji než „um“) se speciálním kódováním ne-

slovníkových slov (třeba neefektivně po písmenech). A co takhle si mít možnost během kódování nějaké kódy dodefinovat?

Pro složitější kódy nám samozřejmě můžete poslat program, dokonce je pak možné tyto programy srovnat v efektivitě. Zakódovaný text by pak měla být posloupnost znaků 0 a 1.



---

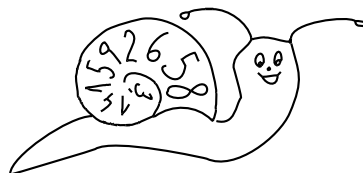
### Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF  
Ke Karlovu 3  
121 16 Praha 2

*Telefon:* +420 221 911 235

*E-mail:* [MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz](mailto:MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz)

*WWW:* <http://mam.mff.cuni.cz>



---

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory stredočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.