

### Chceš jet na říjnové soustředění?

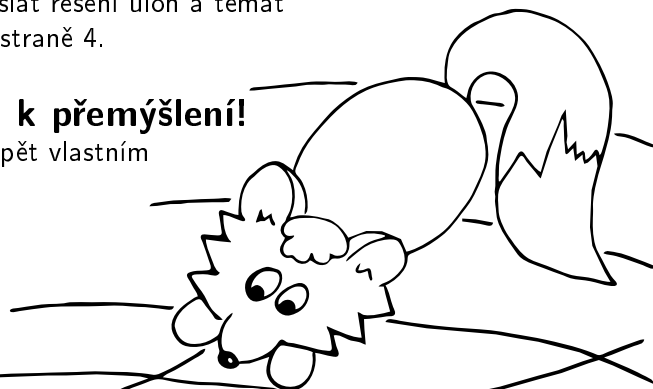
Máš možnost. Stačí poslat řešení úloh a témat z tohoto čísla. Více na straně 4.

### Tři nová témata k přemýšlení!

Jedinečná možnost přispět vlastním článkem.

### Zajímavé úlohy!

Zadání najdeš uvnitř čísla.



Časopis M&M je určen pro studenty středních škol, kteří se zajímají o matematiku, fyziku či programování. Během školního roku obdrží řešitelé zdarma sedm čísel se zadáním úloh a témat k přemýšlení. Svá řešení odesílají k nám do redakce. My jejich příspěvky opravíme, obodujeme a pošleme zpět. Nejzajímavější řešení otiskujeme.

Časopis zastřešuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze a je podporován středočeskou pobočkou Jednoty českých matematiků a fyziků.

*Milá kamarádko, milý kamaráde!*

Zajímáš se o matematiku, fyziku nebo programování? Rád(a) přemýšlíš nad zapeklitými problémy a neobvyklými úlohami? Chceš poznat nové kamarády a kamarádky s podobnými zájmy? Pak je časopis M&M právě pro tebe!!!

## Časopis M&M

M&M je korespondenční seminář a zároveň studentský časopis zaměřený na matematiku, fyziku a informatiku. Pokud se rozhodneš zapojit, budeme ti v průběhu roku posílat poštou (samozřejmě zdarma) nová čísla se zadáním úloh a témat. Budeš pak mít zhruba měsíc na přemýšlení a v termínu, který je uveden na začátku každého čísla, pošleš svoje řešení na adresu redakce. S dalším vydáním časopisu ti přijdou tvé příspěvky zpět opravené a obodované.

## Úlohy a témata

V každém čísle otiskujeme zadání tří úloh. Nejsou to obyčejné příklady z hodin matematiky a fyziky. Některé vyžadují hlubší zamyšlení, v jiných musíš odhalit logický trik, v dalších si trochu započítáš. Bodové hodnocení úlohy, zpravidla 3–5 bodů, je uvedeno vedle jejího názvu. Za elegantní nebo zajímavé řešení však můžeš dostat bodovou prémii.

Jistou zvláštností našeho semináře jsou témata. Vlastními silami v nich prozkoumáš fyzikální zákonitosti, objevíš matematické vztahy nebo napíšeš program v programovacím jazyce. V prvním čísle jsou zadána tři témata, v průběhu roku přidáváme další. Každé z nich začíná úvodní úlohou, která je formulována poměrně široce a měla by být především námětem k přemýšlení. Můžeš nám poslat jak řešení úvodní úlohy, tak řešení dalších problémů, které si v rámci tématu sám vymyslíš. Pokud se nám bude tvůj příspěvek líbit, uveřejníme jej v dalším čísle. Příspěvek k tématu můžeš zaslat kdykoli během roku. Počet tvých příspěvků k jednomu tématu není nijak omezen – své úvahy můžeš dále rozvíjet, doplňovat, případně poopravit. Můžeš též reagovat na články svých kolegů nebo využít jejich výsledky ve svém dalším řešení.

Za kvalitní otištěný článek lze získat i 20 bodů – hodnotíme nejen správnost, ale i dobrý nápad a snahu téma rozvinout. Nemá smysl opisovat knihy, důležité jsou výsledky dosažené vlastní hlavou.

Do redakce můžeš poslat i vlastní námět na nové téma. Pokud se nám bude zdát zajímavý, uveřejníme ho v dalším čísle M&M a tebe bodově ohodnotíme.

## Ocenění

V průběhu roku tvoje body sčítáme a v každém čísle otiskujeme aktuální žebříček řešitelů. Jakmile dosáhneš určité bodové hranice (sčítají se i body z předchozích ročníků M&M), získáš seminární titul, který bude uveden u každého tvého článku a ve výsledkové listině. Už za 10 bodů získáš titul Bc.<sup>MM</sup>, za 20 budeš Mgr.<sup>MM</sup>, pokud dosáhneš na hranici 50 bodů, stane se z tebe Dr.<sup>MM</sup>, při stovce bodů získáš titul Doc.<sup>MM</sup> a při 200 bodech už budeš Prof.<sup>MM</sup>. Výzvou pro tebe může být získání titulu Akad.<sup>MM</sup> za 500 bodů – této mety ještě nikdo nedosáhl.

Abys poznal své kolegyně a kolegy ze semináře a také nás, organizátory, pořádáme pro všechny řešitele víkendová setkání a dvakrát za rok vybíráme

25–30 nejpilnějších, které zveme na jarní a podzimní soustředění. Pro ty úplně nejlepší jsou navíc na konci ročníku připraveny odměny.

### Soustředění

Jarní a podzimní týdenní soustředění je odměnou pro nejlepší řešitele, tj. pro ty, kteří se umístí přibližně do 30. místa ve výsledkové listině. Jestli budeš mít možnost se soustředění zúčastnit, záleží tedy především na tvé pili a snaze v řešení úloh a témat během celého roku. Na soustředění se během přednášek dozvíš mnoho nových zajímavých věcí z matematiky, fyziky, informatiky, astronomie i dalších oborů a také si zahraješ celou řadu více i méně tradičních, matfyzáckých i ryze nematfyzáckých her. Protože soustředění je za odměnu, hradíš si kromě dopravy pouze minimální část nákladů, zpravidla do 300 Kč za celý týden včetně ubytování i stravy. Takže pilně řešit se rozhodně vyplatí!

### Soutěžní pokyny

Do řešení M&M se můžeš zapojit kdykoli během školního roku. Nemusíš řešit všechny úlohy, vyber si především to, co tě baví. Má smysl posílat i náznak řešení. Nepiš jen výsledky, důležitější než čísla jsou myšlenkové postupy, kterými ses ubíral(a). Řešení každé úlohy nebo tématka piš na ZVLÁŠTNÍ PAPÍR a nezapomeň se PODEPSAT!

Řešení můžeš posílat také e-mailem na adresu redakce (uvedenou na konci každého čísla) [mam@atrey.karlin.mff.cuni.cz](mailto:mam@atrey.karlin.mff.cuni.cz). Nejprve si ale prosím přečti technické pokyny na našich webových stránkách <http://mam.mff.cuni.cz> v odkazu „Informace“. Pokud chceš dostávat potvrzení, že jsme tvá řešení v pořádku dostali, napiš nám to.


S prvním řešením nám prosím pošli lístek se jménem, adresou pro korespondenci (kam ti budeme posílat časopis a opravená řešení), adresou školy, ročníkem a rokem, kdy budeš maturovat. Pokud přidáš i e-mail a telefonní číslo, budeme rádi.

### Internet

Na adrese <http://mam.mff.cuni.cz> se můžeš o M&M dozvědět další informace, nahlédnout do archivu minulých ročníků nebo si prohlédnout fotky z minulých soustředění. V odkazu „Informace“ též najdeš návod, jak se přihlásit do naší e-mailové konference. Díky ní tě můžeme snadno a rychle informovat o vydání dalšího čísla tvého oblíbeného časopisu nebo pozvat na víkendové setkání řešitelů. Ty ji naopak využiješ pro komunikaci s kamarády ze semináře.

### Organizátoři

Organizátoři jsou většinou studenti různých oborů Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, často bývalí řešitelé semináře. Během roku pro tebe vymýšlíme úlohy, opravujeme řešení a připravujeme soustředění. Těšíme se, že se na tom dalším setkáme třeba právě s tebou.

*Bzučo, Danka, Hanss, Helča, Hroch, Charlie, Jana, Jánošík,  
Jirka D., Jirka K., Jeffer, Krsoun, Lenka, Marble, Mirek,  
Ondra, Peťo, Teka, Tibor, Zuzka a Riki.* 

## Úvodní soustředění

Stejně jako v minulých letech pořádáme i letos podzimní soustředění. Na něj budou pozváni jak úspěšní řešitelé z minulého roku, tak i ti z vás, kteří nám nejpozději do 27. 9. 2004 pošlou dobré řešení alespoň některých úloh a témat z tohoto čísla.

Soustředění se bude konat ve východních Čechách poblíž Litomyšle. A to v době od 16. do 24. 10. 2004. Na soustředění budeme vybírat účastnický poplatek asi 300 Kč. Ubytování a stravování bude zajištěno, na tobě je jen dopravit se na místo. Podrobnější informace rozešleme spolu s pozvánkou. Pokud se chceš předem na něco zeptat, můžeš se obrátit na Hansse ([hanssmaail@yahoo.com](mailto:hanssmaail@yahoo.com) nebo +420 728 851 046).

Ke svému řešení prosím připište, jestli na soustředění jet chcete (nebo nechcete). Ušetříte nám tak trochu starostí s pozváním správného počtu řešitelů.

## Zadání úloh a témat

Nezapomeň prosím, že řešení každé úlohy nebo tématka je třeba psát na zvláštní podepsaný papír. Na tvoje příspěvky se těší

*Redakce MĚM*

**Termín odeslání první série: 25. 10. 2004**  
**(27. 9. 2004 pro účast na soustředění)**

### Téma 1 – Podivné plochy

Zkoumejme různé typy 2D ploch. Může to být například povrch koule, toroid („pneumatika“), koule s  $n$  uchy (vznikne přilepením částí toru na sféru) i jiné. Úplně obecnou plochu si představme jako nějaký matematický prostor, který je „slepen“ z malých kousků 2D roviny (takovým lepením ovšem vůbec nemusí vzniknout plocha, která existuje v euklidovském 3D prostoru).

Je mnoho vlastností, které takový 2D prostor může mít. Může mít kupříkladu konečnou nebo nekonečnou plochu. Dva prostory, které se dají na sebe vzájemně spojitě zobrazit nebo zdeformovat, budeme ztotožňovat.

Pokuste se nejprve najít co nejvíc různých prostorů.

Víme, že některé obrázky a grafy nelze nakreslit do roviny, ale jde nakreslit třeba na torus; typický příklad je graf  $K_{3,3}$  s vrcholy  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$  a hranami mezi  $x_i$  a  $y_j$ . Rozmyslete si, že takový graf nelze nakreslit do roviny tak, aby se žádné hrany neprotínaly, ale dá se nakreslit na torus. Najděte co nejvíc podobných příkladů grafů a 2D ploch, na které se dají nebo nedají nakreslit.

Ukažte, že počet vrcholů grafu plus počet ploch minus počet hran závisí jen na typu 2D plochy, na kterou kreslíme, a ne na grafu. (Toto číslo se nazývá Eulerovo číslo.) Ukažte, že na sféře nebo rovině je toto číslo 2. Jaké je pro sféru s  $n$  uchy? Může být toto číslo libovolné?

Další vlastnost nějakého prostoru je orientovatelnost: Znamená to, že ať projdete v daném prostoru libovolnou uzavřenou dráhu, vrátíte se „stejně“ a ne převráceně. Möbiův proužek (vznikne slepením proužku papíru tak, aby měl jen jednu stranu) je neorientovatelný. Umíte zkonstruovat neorientovatelný prostor, který nemá „kraj“ (na rozdíl od Möbiova proužku)? Co vznikne, slepíme-li dva Möbiovy proužky podél jejich hranic? Jaké je Eulerovo číslo takového prostoru?

Zkoumejte uzavřené křivky na těchto plochách. Které se dají stáhnout do bodu? Například na sféře jsou to všechny. Jak je to na toru, projektivní rovině (projektivní rovina vznikne z kruhu slepením všech dvojic protilehlých bodů na kružnici)?

Charakterizujte uzavřené křivky na toru. Definujme součet dvou uzavřených křivek, které obě začínají a končí ve stejném bodu, přirozeným způsobem. Platí, že součet dvou křivek  $a + b$  se dá spojitě zdeformovat na  $b + a$ ? Platí to u toru? Platí to u sféry s  $n$  uchy?

Definujme součet dvou 2D ploch tak, že z obou ploch vystřihneme kroužek a obě plochy slepíme podél hranice kroužků. Ukažte, že koule s  $n$  uchy je součet  $n$  torů a Kleinova láhev je součet dvou projektivních rovin.

## Téma 2 – Logik

Hru s názvem Master Mind vymyslel v roce 1970 Mordecai Meirowitz. Od té doby se objevila v mnoha různých variantách a pravděpodobně jste ji potkali pod českým názvem Logik. Je to hra pro dva hráče,<sup>1</sup> kde jeden z hráčů zvolí tajný kód tvořený řadou barevných kolíčků a druhý hráč má za úkol tento kód odhalit. Každý pokus o uhodnutí je ohodnocen několika černými a bílými kolíčky, které vyjadřují, jak moc se tip shoduje s hádaným kódem.

Hráč, který zvolil kód, ve hře hraje jen pasivní úlohu (a často je nahrazen například počítačem). Nás bude v tomto tématku zajímat strategie hádajícího hráče.

Budeme vycházet z následujících pravidel: Hádáme  $n$  místný kód, kde na každém místě může být jedna z  $k$  různých hodnot (barev). Hodnoty v kódu mají dané pořadí – lze tedy říct, která je na určitém místě. Lze hrát jak variantu, kdy se stejná hodnota může v kódu vyskytovat vícekrát, tak i variantu, kdy je opakování zakázáno.

Hádající hráč zvolí svůj tip ve stejné formě (tj.  $n$ -tice prvků, které mohou nabývat  $k$  různých hodnot). Tento tip je ohodnocen a poté hráč zkouší další tip. Jeho snahou je uhodnout hledaný kód na co nejmenší počet pokusů.

Ohodnocení tahu je tvořeno dvěma čísly – počtem černých a počtem bílých kolíčků.

- Za každý prvek, který je v hledaném i tipovaném kódu na stejném místě a má stejnou hodnotu (barvu), obdrží hráč jeden černý kolíček. Tyto prvky jsou z dalšího hodnocení vyřazeny.

<sup>1</sup> Nebo také pro jednoho hráče a počítač.

- Zbylé prvky mohou být ohodnoceny bílými kolíčky. Za prvek, který má v tipu i kódu stejnou hodnotu (barvu), ale je umístěn na nesprávné pozici, získá hráč jeden kolíček. Dalšího hodnocení se tyto dva prvky (jeden z tipu a jeden z kódu) už nezúčastňují. Pokud jsou mezi zbylými nevyřazenými prvky ještě takové, které mají v tipu a kódu stejnou barvu, hodnotíme opět bílým kolíčkem podle stejného pravidla.
- Za každý tah lze tedy dostat maximálně  $n$  kolíčků. Přitom za jeden prvek tipu obdrží hráč maximálně jeden kolíček.

Hlavní úlohou tohoto témátka je vymyslet optimální strategii pro hádajícího hráče. To je ovšem hodně těžké, takže si můžete úlohu různými způsoby zjednodušit nebo hledat řešení podúloh.

Zkuste vymyslet strategii pro variantu hry, kdy  $k = 2$  (tedy hrajeme jen se dvěma různými barvami).

Jak má hádající hráč volit první tip (případně prvních několik tipů)? Samozřejmě s ohledem na to, aby jejich pomocí získal maximální informaci.

Zkuste vhodným způsobem odhadnout, kolik pokusů bude potřebovat hráč, hádající podle optimální strategie. Jinak řečeno, najdete spodní odhad počtu potřebných pokusů.



### Téma 3 – Temelínské věže

Jen pro přesnost: pochopitelně máme na mysli chladicí věže temelínské elektrárny. Pojďme se teď na ně podívat blíže.

Jakou geometrickou plochu vlastně tyto věže představují? Má to nějaké výhody (proč se věže nestaví jako obyčejné komíny)? Navrhněte technologický postup při výstavbě takových věží.

Každý, kdo by chtěl podobnou stavbu uskutečnit, si musí nejprve vytvořit její počítačový model a k tomu je potřeba rovnice, která popisuje tvar věže (na základě vhodného parametru). Jak bude taková rovnice vypadat?

Z této rovnice se pak dá mnohé vypočítat a určit. Tak např. kolik věž váží a kolik je třeba materiálu na zhotovení, víme-li, že tloušťka její stěny je konstantní (a nebo snad konstantní není?), a protože známe přibližně ceny materiálů, dalo by se i určit, na kolik by vyšla jedna věžní konstrukce. Informací, co můžeme získat z této rovnice a ze souvisejícího počítačového modelu, je ale mnohem více. Můžete posílat své příspěvky na libovolné související téma.

## Úloha 1.1 – Líný Mirek (5b)

Mirek dostal za úkol vyřešit následující úlohu: „Nalezněte všechna čtyřciferná čísla, která jsou rovna součtu čtverců svého prvního a druhého dvojčíslí.“ „To nemůžu spočítat, nemám u sebe kalkulačku ani tabulky a bez nich umím jen sčítat, odčítat, násobit a dělit taková přirozená čísla, že výsledek není větší než 200.“ Má Mirek pravdu, nebo se jen vymlouvá?

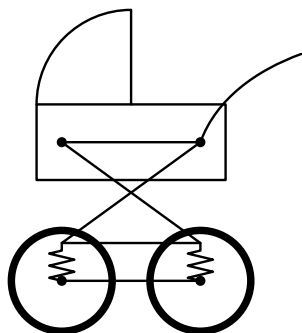
## Úloha 1.2 – Kočárek (5b)

Po polní cestě jel pásový traktor a nechal tam zářezy v hlíně vzdálené od sebe 30 cm.

Pak po této cestě tlačím dětský kočárek odpružený čtyřmi pružinami (dvě vpředu a dvě vzadu). Každá z nich se při zatížení 1 kg zkrátí o 2 cm. Vzdálenost os koleček kočárku je 75 cm. Hmotnost houpající se části kočárku je 10 kg a její těžiště leží 40 cm nad středem spojnice horních konců pružin.

Jak rychle mám jet, aby se kočárek co nejvíce houpal?

Pokud vám chybí nějaké další parametry, inspirujte se obrázkem, nebo si rozumné hodnoty domyslete.



## Úloha 1.3 – Piráti a poklad (4b)

Pět pirátů našlo truhličku se 100 zlatáky. Po chvíli dohadů o tom, komu patří větší část pokladu, kapitán rozhodl: „Uděláme to spravedlivě. Já navrhu, jak si zlatáky rozdělíme. Pokud s tím bude souhlasit nadpoloviční většina z nás, podělíme se tak. Pokud ne, můžete mě zastřelit a místo mě bude rozdělovat můj první zástupce. A tak dále, vždy bude dělit ten s nejvyšší hodností. Do té doby, než bude některé dělení odsouhlaseno a nebo dokud nezbude poslední z vás. Pokud někdo poruší pravidla, bude okamžitě zastřelen.“

Pirátům to přišlo velmi výhodné. Kapitán bude rád, jestli přežije, a my si pořádně přilepšíme. Tak rychle souhlasili. Kapitán navrhl rozdělení peněz a piráti se konečně pořádně zamysleli. Ono to asi nepůjde tak jednoduše ...

---

Jak nakonec dopadlo dělení pokladu? Předpokládáme, že:

- všichni piráti jsou chytří a to, jak budou hlasovat, si pořádně promyslí;
- každý pirát chce především přežít;
- když přežije, tak s co nejvíce zlatáky v kapse;
- pokud tím nic neztratí, snaží se, aby bylo zastřeleno co nejvíc ostatních pirátů (obzvlášť ten protivný kapitán).



Piráti sice dodrží kapitánova pravidla, ale jinak si naprosto nedůvěřují, takže žádné další dohody nepřipadají v úvahu.

A dvě otázky navíc. Jak by vše dopadlo, kdyby bylo pirátů víc než pět? Co by se stalo, kdyby v truhle byl jen jediný zlaťák?

---

### Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF  
Ke Karlovu 3  
121 16 Praha 2

*Telefon:* +420 221 911 235

*E-mail:* [MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz](mailto:MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz)

*WWW:* <http://mam.mff.cuni.cz>



---

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.