



Termín odeslání: 31. 5. 2004

## Zadání úloh

### Úloha 6.1 – Rovnoběžník (4b)

Mějme množinu všech rovnoběžníků  $ABCD$  takových, že  $|AB| = 8$  cm a  $|BC| = 6$  cm. Ve vnější oblasti každého z nich sestrojme množinu bodů  $X$ , pro něž je  $|\sphericalangle AXB| = 75^\circ$ , a množinu bodů  $Y$ , pro něž  $|\sphericalangle BYC| = 45^\circ$ . Pro každý čtyřúhelník  $ABCD$  označme  $X_0, Y_0$  ty ze sestrojených bodů, jejichž vzájemná vzdálenost je největší možná. Označíme-li  $|X_0Y_0| = d$ , pak existuje takový rovnoběžník  $ABCD$ , pro který nabývá  $d$  maximální hodnoty. Určete obsah tohoto rovnoběžníku.

### Úloha 6.2 – Oscilující slaná voda (6b)

Kelímek s malou dírkou na spodní straně, který obsahuje slanou vodu, je částečně ponořený do velké nádoby se sladkou vodou a upevněný.

Vysvětlete mechanismus pozorovaného periodického procesu a zkoumejte závislost periody na různých parametrech.

Na základě teoretických úvah a experimentů formulujte vztah udávající frekvenci tohoto jevu a určete okrajové podmínky, aby kmity vůbec mohly nastat.

Pro zviditelnění procesu by měla být voda v kelímku zbarvená.

### Úloha 6.3 – Přímky (4b)

Najděte co nejvíce přímek v prostoru takových, aby měla každá od každé vzdálenost 1 (vzdálenost dvou přímek  $p, q$  je  $\min\{|x - y|, x \in p, y \in q\}$ ).

## Řešení témat

### Téma 1 – Oko a stroboskopie

*Dr.<sup>MM</sup> Josef Cmar* poslal nápady na niekoľko optických klamov, pri ktorých sa zameral najmä na nepresné odhady vzdialenosti predmetov v noci. Cez deň môžeme s menšími či väčšími úspechmi vzdialenosť predmetu odhadnúť (ak sa nenachádza na bezoblačnej oblohe), v noci je to ťažšie. Kolega Cmar rozvíja

svoj příspěvek a vysvětluje, ako vzniká UFO na pláňach strednej Austrálie. Pomocou fatamorgány je zobrazovaný obraz mesta niekoľko desiatok kilometrov ďaleko na diaľnicu prechádzajúcu vyprahnutou pláňou.

Bzučo

### Téma 3 – Výstavba sítí

Mgr.<sup>MM</sup> Zbyněk Konečný nám zaslal článok prof. Sýkory o sítí pro čtyři body. Postup prof. Sýkory je zobecněním řešení pro trojúhelník od Dr.<sup>MM</sup> Černošské, který jsme uveřejnili v čísle 10.3. Sýkorův článek však opomíjí „patologické“ případy, proto otiskujeme článek Dr.<sup>MM</sup> Evy Černošské o nekonvexních čtyřúhelnících (Eva řešila všechny případy jiným postupem, avšak v řešení pro konvexní čtyřúhelníky se dopustila chyby). Existují však i jiné „patologické“ případy než nekonvexní čtyřúhelníky (viz diskuse za oběma články).

#### O nejkratším spojení čtyř bodů v rovině

prof. Ant. Sýkora

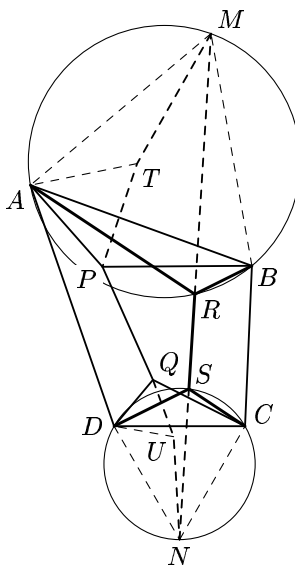
Nejkratší spojení čtyř bodů v rovině lze uskutečnit pěti spojnicemi, jež se sbíhají vždy po třech ve dvou uzlových bodech a v nich vespolek stejné úhly (po  $120^\circ$ ) svírají.

Dané body  $A, B, C, D$  spojíme po dvou, sestrojíme nad stranami  $AB, CD$  čtyřúhelníka, jež leží v ostrých úhlech úhlopříček, rovnostranné trojúhelníky  $ABM, CDN$  a opišeme jim kruhy; průsečíky  $R, S$  těchto kruhů se spojnicí temen  $MN$  rovnostranných trojúhelníků jsou body, jež spojeny vespolek s danými body  $A, B, C, D$  dávají nejkratší spojení těchto čtyř bodů.

*Důkaz:* Volíme-li místo bodů  $R, S$  kterékoli jiné uzlové body  $P, Q$ , sestrojíme nad spojnicemi  $AP, DQ$  rovnostranné trojúhelníky  $APT, DQU$ , shledáme snadno, že platí (ze shodnosti trojúhelníků  $APB$  a  $ATM$ ):

$$PA = PT,$$

$$PB = TM$$

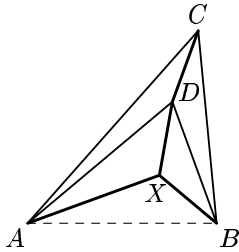


Obr. t3.1

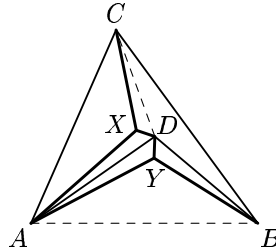
a podobně též dostáváme (ze shodnosti trojúhelníků  $DCQ$  a  $DUN$ ):

$$QD = QU,$$

$$QC = UN,$$



Obr. t3.2



Obr. t3.3

pročež celé spojení úseček  $PA + PB + PQ + QC + QD$  jest rovno lomené čáře  $MTPQUN$ . Pro body  $R, S$  přejde tato lomená čára v přímku  $MN$ .  $\square$

## Sít' pro nekonvexní čtyřúhelník

*Dr.<sup>MM</sup> Eva Černožorská*

V nekonvexním čtyřúhelníku leží jeden bod uvnitř trojúhelníku tvořeného zbylými vrcholy. Nechť je to bez újmy na obecnosti bod  $D$ .

Bude-li potřeba rozbočovač, bude muset ležet uvnitř trojúhelníku  $ABC$ . Rozbočovač totiž spojuje právě tři body (viz číslo 10.5), z bodů  $A, B, C$  a  $D$  neleží žádný vně trojúhelníka. V čísle 10.3 jsme ukázali, že uzel pro tři body nemůže ležet vně trojúhelníka, který tyto body tvoří, proto všechny rozbočovače musí ležet uvnitř trojúhelníka  $ABC$  (pokud byl rozbočovač, jehož některá ramena vedou do rozbočovačů, musí opět tento ležet uvnitř trojúhelníku tvořeného těmi rozbočovači).

Trojúhelník  $ABC$  je rozdělen na tři trojúhelníky:  $ABD$ ,  $BCD$  a  $ACD$ . Mohou nastat tyto případy:

- 1) Všechny trojúhelníky mají jeden úhel  $120^\circ$ , potom je bod  $D$  přesně v místě, kde bychom zvolili rozbočovač v trojúhelníku  $ABC$ .
- 2) Právě jeden trojúhelník má úhel u vrcholu  $D$  menší než  $120^\circ$ , bez újmy na obecnosti nechť je to trojúhelník  $ABD$ . Do tohoto trojúhelníku umístíme rozbočovač pro trojúhelník. Optimální síť je pak na obr. t3.2.
- 3) Jsou dva trojúhelníky, které mají úhel u vrcholu  $D$  menší než  $120^\circ$ , bez újmy na obecnosti nechť jsou to trojúhelníky  $ABD$  a  $ACD$ . V každém z nich můžeme najít optimální místo pro rozbočovač, ale pokud bychom požili oba (viz rozbočovače  $X$  a  $Y$  na obr. t3.3), dostali bychom z trojúhelníkové nerovnosti

$$|AX| + |CX| + |DX| > |CD|,$$

resp.

$$|AY| + |DY| + |BY| > |DB|,$$

neboli pokud jeden z rozbočovačů nahradíme přímým spojením zbývajících bodů, bude celková délka sítě kratší. Vybereme samozřejmě tu variantu, na které více vyděláme.

*Pozn. red.: Dr.<sup>MM</sup> Eva Černožorská nám vyslovila v tomto článku některá tvrzení bez důkazu. Najde se někdo, kdo je dokáže (či vyvrátí)?*

*Řešení prof. Sýkory a Dr.<sup>MM</sup> Evy Černožorské samozřejmě dohromady neřeší všechny možné čtyřúhelníky. Řešení prof. Sýkory selže totiž vždy, když se spojnice bodů  $MN$  dostane mimo čtyřúhelník, což může nastat i pro čtyřúhelník konvexní (to, že dva z úhlů čtyřúhelníka jsou větší než  $120^\circ$ , ovšem není postačující podmínkou). Dokáže někdo problém vyřešit pro všechny případy?*

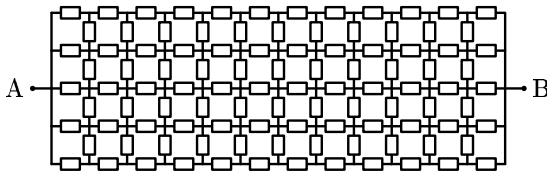
*Martin Krsek*

## Téma 4 – Odpory a mřížky

### Odpor pravidelné obdélníkové mřížky

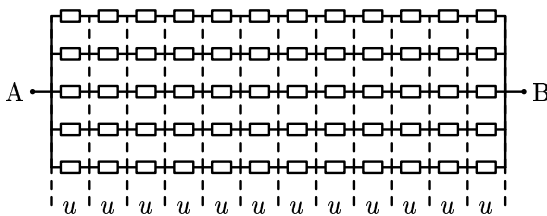
*Dr.<sup>MM</sup> Jan Musílek*

Mějme mřížku velikosti  $m \times n$ , viz obrázek t4.1. Ten znázorňuje mřížku jako soustavu odporů, z nichž každý má odpor  $\sigma$ . Plošné elektrody A a B spojují „pět větví“ obvodu vodičem (odpor elektrody je tak malý, že ho mohu považovat za nulový).



Obr. t4.1

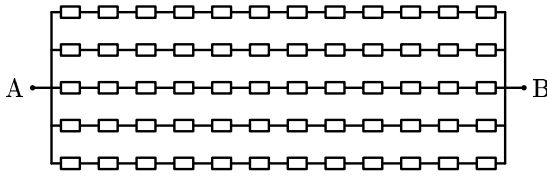
Zamyslel jsem se nad tím, co by se stalo, kdyby se obvod hodně zjednodušil. Odstranil jsem všechny svislé spojnice v mřížce, což se projeví zmizením všech „svislých“ odporů:



Obr. t4.2

Protože hodnota všech vodorovných odporů je stejná (rovna  $\sigma$ ), rozdělí se napětí  $U$  mezi elektrodami na  $m$  stejných dílů  $u = U/m$ . Svislé čárkované čáry

tedy spojují místa se stejným potenciálem. V tuto chvíli nejsou propojena, ale kdybych je jakkoliv propojil (ať zkratem, nebo odporem), netekl by mezi nimi žádný proud. Odstraněním všech svislých spojnic v mřížce („svislých odporů“) se tedy poměry v obvodu vůbec nezmění. To ale znamená, že naše mřížka má stejný odpor jako následující zapojení odporů:



Obr. t4.3

V každé jednotlivé větvi je zapojeno za sebou  $m$  stejných odporů  $\sigma$ . Celkový odpor jedné větve je

$$R_1 = m\sigma. \quad (\text{t4.1})$$

Vedle sebe (paralelně) je zapojeno  $n + 1$  stejných větví s odporem  $R_1$ . Výsledný odpor celé mřížky tedy je

$$R = \frac{R_1}{n + 1} = \frac{m}{n + 1} \sigma. \quad (\text{t4.2})$$

V našem případě

$$R = \frac{12}{4 + 1} \sigma = \frac{12}{5} \sigma. \quad (\text{t4.3})$$

*Pozn. red.: K rovnakému záveru došiel aj Mgr.<sup>MM</sup> Peter Perešíni.*

## Rozkradená krychle

*Dr.<sup>MM</sup> Zuzana Rozlúvková*

Rozdělím si krychli na plátky tloušťky  $l$  (kolmo na příchozí kontakty), ty jsou jakoby spojené sériově. Pseudoodpor jedné plné vrstvy je (budu všude psát kolik je  $R/\rho$ )

$$l/L^2.$$

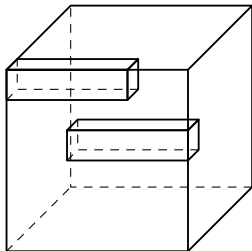
Pseudoodpor jedné malé kostky je

$$l/l^2 = 1/l$$

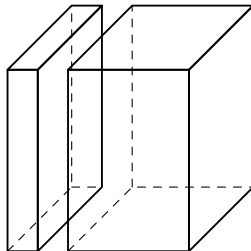
a krychle

$$1/L.$$

Budu předpokládat, že kostky z krychle budou mizet natolik rozumně, že nevznikne něco jako na obrázcích t4.4 a t4.5 a že  $L \gg l$ ,  $L/l$  je přirozené konečné číslo.



Obr. t4.4



Obr. t4.5

Pseudoodpor vrstvy bez jedné kostky je

$$\frac{l}{L^2 - l^2}$$

a krychle bez jedné kostky

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right) \frac{l}{L^2} + \frac{l}{L^2 - l^2} = \frac{L-l}{L^2} + \frac{l}{L^2 - l^2}.$$

Pokud odebereme dvě kostky z různých vrstev, bude pseudoodpor krychle

$$\frac{L-2l}{L^2} + \frac{2l}{L^2 - l^2},$$

po odebrání  $n$  kostek z různých vrstev to bude

$$\frac{1}{L} - n \left( \frac{l}{L^2} + \frac{l}{L^2 - l^2} \right),$$

takže každým ubráním kostky zvětšíme odpor o

$$\frac{l}{L^2 - l^2} - \frac{l}{L^2}.$$

Pokud z jedné vrstvy uберeme dvě kostky, bude její pseudoodpor

$$\frac{l/L^2}{L^2 - 2l^2},$$

pseudoodpor krychle pak bude

$$\frac{L-l}{L^2} + \frac{l}{L^2 - 2l^2}.$$

Pseudoodpor krychle po odebrání  $n$  kostek ze stejné vrstvy bude

$$\frac{L-l}{L^2} + \frac{l}{L^2 - nl^2}.$$

Pozn. red.: Redakcia sa domnieva, že opísaný postup je príliš zjednodušený. Neberie do úvahy zmeny tvaru elektrického poľa, ktoré vzniknú vďaka diere uprostred kocky. Vyskúšajte napríklad experimentálne na elektrickom plechu. Ako príklad vezmeme dve kocky ... prvá má vyrezaný otvor v strede o šírke  $l \times l$  a druhá rovnaký otvor, ale odrežeme jednu hranu. Odpor v druhom prípade rastie ako  $L/l$ . Z toho vyplýva, že náhodne zgrupované diery v smere prúdu prispievajú k celkovému odporu menej ako zgrupované diery kolmo na smer prúdu.

Akokoľvek, autorka je na správnej ceste, treba ale dotiahnúť do konca tieto výpočty a vyjadriť  $R$  ako funkciu hustoty kociek–dier, ak tieto sú rovnomerne rozmiestnené vo veľkej kocke.

Bzučo

## Téma 5 – Opilec aneb difuse trochu jinak

Pozn. red.: Prišla nám dvě řešení, která se obě snažila o doplnění článku *Opilec v zajetí matematiky*, jehož autorkou byla *Dr.<sup>MM</sup> Eva Černožorská*. Ta nám zaslala vylepšení svých úvah a stejné téma zpracoval i *Mgr.<sup>MM</sup> Martin Dungl*. Prohlédněte si tedy postup, jaký zvolil druhý jmenovaný při řešení takto komplikovaného problému.

### Opilec v zajetí matematiky – doplnění

*Mgr.<sup>MM</sup> Martin Dungl*

Označme  $A_k$  počet posloupností kroků, v nichž bude stát opilec po  $k$  krocích na místě původně vzdáleném 30 kroků dopředu (tedy doma). Dále si označme  $B_k$  počet posloupností, v nichž opilec stojí po  $k$  krocích na tomto místě poprvé (tj. v žádné takové posloupnosti nestál na tomto místě po  $i$  krocích,  $i < k$ ).  $D_k$  bude značit počet posloupností, v nichž existuje  $i \leq k$  takové, že opilec stál po  $i$  krocích na tomto místě, a konečně  $C_k$  značí počet posloupností, v nichž opilec stojí po  $k$  krocích na místě, na němž stál po 0 krocích.

Naším úkolem je určit  $D_{100}$ . *Dr.<sup>MM</sup> Eva Černožorská* určila správně  $A_k$ . Abychom určili  $B_k$ , musíme odečíst všechny posloupnosti, ve kterých už doma opilec alespoň jednou byl. Ty si rozdělíme do těchto skupin: v první skupině budou ty posloupnosti, ve kterých došel opilec poprvé domů po 30 krocích, ve druhé ty, ve kterých byl poprvé doma po 32 krocích, ..., v poslední pak ty, ve kterých byl poprvé doma po  $k - 2$  krocích (pro liché  $k$  nemůže opilec zjevně být doma). Tak máme zajištěno, že každá posloupnost kroků, kdy už opilec doma byl, je obsažena v právě jedné skupině. Abychom zjistili jejich celkový počet  $A_k - B_k$ , musíme pro každé sudé  $i$  ( $30 \leq i \leq k - 2$ ) přenásobit počet možností, jak se opilec mohl po  $i$  krocích dostat poprvé domů, počtem možností, jak se po dalších  $k - i$  krocích vrátil zase domů. Proto

$$B_k = A_k - (B_{30}C_{k-30} + B_{32}C_{k-32} + \dots + B_{k-2}C_2),$$

$$B_k = A_k - \sum_{\substack{i=30 \\ i \text{ sudé}}}^{k-2} B_i C_{k-i}.$$

Po dosazení vzorců *Dr.<sup>MM</sup> Evy Černožorské* pro  $A_k$  a  $C_{k-i}$  dostaneme:

$$B_k = \sum_{n=0}^{(k-30)/2} \frac{k!}{n!(30+n)! \left(\left(\frac{k-30-2n}{2}\right)!\right)^2} - \sum_{\substack{i=30 \\ i \text{ sudé}}}^{k-2} B_i \sum_{j=0}^{(k-i)/2} \frac{(k-i)!}{(j!)^2 \left(\left(\frac{k-i}{2}-j\right)!\right)^2}.$$

Problémem je, že známe  $B_k$  jen pro  $k = 30$ , kdy má opilec jedinou možnost, jak se dostat domů, tj.  $B_{30} = 1$ . Protože na určení  $B_{k+2}$  musíme znát  $B_{30}, B_{32}, \dots, B_k$ , je nalezený vzorec jen rekurzivní. To znamená, že na úspěšné vyřešení příkladu musíme dosazením do vzorce určit  $B_k$  pro všechna sudá  $k$  mezi 30 a 100.

Dojde-li opilec po  $k$  krocích domů, má  $4^{100-k}$  variant, jak jít dále. Ať už si vybere kteroukoliv z nich, je pro nás jeho posloupnost kroků vyhovující. Proto pro  $D_{100}$  platí:

$$D_{100} = B_{30}4^{70} + B_{32}4^{68} + \dots + B_{98}4^2 + B_{100},$$

$$D_{100} = \sum_{\substack{k=30 \\ k \text{ sudé}}}^{100} B_k 4^{100-k}.$$

Pro pravděpodobnost, že do sta kroků dojde opilec domů, pak platí:

$$P = \frac{D_{100}}{4^{100}}.$$

*Pozn. red.: Jak jste si nejspíše všimli, jde v podstatě o tentýž rekurentní přístup, jaký použil Mgr.<sup>MM</sup> Tomáš Gavenčíak v minulém čísle. Nastal nám historicky častý jev – tatáž teorie je znova a znova nezávisle objevenána. Je už opravdu na čase přejít k difusi.*

*Charlie*

## Téma 6 – Grafika

K tomuto tématu nám přišlo hned několik zajímavých způsobů určení křivky ze zadání.

První způsob spočívá v nalezení souřadnic průsečíků a vyvození rovnice výsledné křivky. Tento způsob použili ve svých řešeních *Doc.<sup>MM</sup> Stanislav Basovník*, *Mgr.<sup>MM</sup> Martin Dungl*, *Mgr.<sup>MM</sup> Zbyněk Konečný* a *Dr.<sup>MM</sup> Helena Kubátová*. Následující článek není přesným přepisem žádného z nich, ale princip řešení je stejný.



## Analytické určení rovnice křivky

Křivku budeme uvažovat umístěnou v pravouhlé souřadné soustavě s osami odpovídajícími počátečním polopřímám, na které se nanáší značky. Označme  $a$  vzdálenost místa, kde se křivka dotýká osy, od počátku. Kreslené úsečky pak spojují body  $[0, l]$  a  $[a - l, 0]$  pro libovolné  $l \in (0, a)$ .

Rovnice této úsečky (přímky) tedy bude

$$y = l + \frac{l}{l - a} x. \quad (\text{t6.1})$$

Přímku určenou touto rovnicí označíme  $p(l)$ .

Vezměme si teď dvě přímky  $p(l)$  a  $p(l + \Delta l)$ . Z (t6.1) plyne soustava dvou rovnic pro jejich průsečík. Po vyřešení vyjde

$$x_p = \frac{(l - a)(l - a + \Delta l)}{a}, \quad y_p = \frac{l(l + \Delta l)}{a}. \quad (\text{t6.2})$$

Pokud budeme uvažovat dvě nekonečně blízké přímky (a tedy  $\Delta l$  jdoucí k nule), bude jejich průsečík ležet na hledané křivce. Jeho souřadnice jsou

$$x_0 = \frac{(l - a)^2}{a}, \quad y_0 = \frac{l^2}{a}. \quad (\text{t6.3})$$

Vzorce (t6.3) jsou parametrickou rovnicí hledané křivky ( $l$  je parametr, který nabývá hodnot z intervalu  $(0, a)$ ).

Jednoduchými úpravami lze rovnici (t6.3) převést do tvaru funkce

$$y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2, \quad (\text{t6.4})$$

případně do tvaru obecné rovnice

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + a^2 = 0. \quad (\text{t6.5})$$

Z posledního vztahu už vidíme, že jde o kuželosečku. To, že není degenerovaná, lze jednoduše poznat z obrázku, takže zbývá určit její typ. Například pohledem do Bartsche<sup>1</sup> zjistíme, že je třeba spočítat  $A \cdot B - C^2$ , kde  $A$  je koeficient před členem  $x^2$ ,  $B$  před členem  $y^2$  a  $C$  před  $2xy$ . Dosazením čísel z (t6.5) zjistíme, že vychází nula, což podle výše zmíněné publikace znamená parabolu.

V došlých řešeních se objevily různé způsoby, jak k získané rovnici přiřadit nějakou známou křivku. Asi nejčastější a nejjednodušší způsob (mimo výše uvedeného použití literatury) byl následující. To, že jde o parabolu, nějak uhádneme (třeba vylučovacím způsobem) a teď se své tvrzení jen pokusíme dokázat. K tomu si graf otočíme o  $45^\circ$  okolo počátku. Tedy rovnice (t6.3) přejde substitucí

$$x' = \sqrt{2}x_0 - \sqrt{2}y_0, \quad y' = \sqrt{2}x_0 + \sqrt{2}y_0 \quad (\text{t6.6})$$

<sup>1</sup> Hans-Jochen Bartsch: Matematické vzorce, Praha 1971, strana 302

na tvar

$$x' = \sqrt{2}(a - 2l), \quad y' = \sqrt{2} \frac{2l^2 - 2la + a^2}{a}. \quad (\text{t6.7})$$

Z něj vyloučíme parametr  $l$  a zbude nám předpis pro kvadratickou funkci

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{4a} x'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} a. \quad (\text{t6.8})$$

V každém případě můžeme prohlásit, že zkonstruovaná křivka v limitním případě přejde na část paraboly.

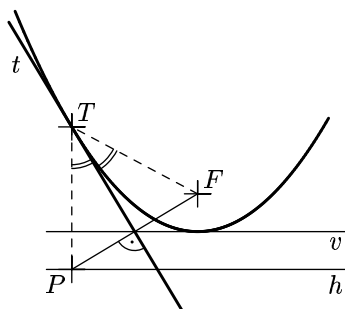
Dále autoři dokazovali, že výsledná křivka bude parabolou jak pro obecný úhel mezi polopřímkami (*Doc.<sup>MM</sup> Stanislav Basovník*), tak i pro jiné rozestupy značek (měřítko) na polopřímkách (*Mgr.<sup>MM</sup> Martin Dungl*, *Mgr.<sup>MM</sup> Zdeněk Konečný* a *Dr.<sup>MM</sup> Helena Kubátová*).

Zcela jiný přístup k řešení problému zvolil *Mgr.<sup>MM</sup> František Konopecký*. Místo analytické geometrie využil několika geometrických vlastností paraboly.

## Geometrické řešení

*Mgr.<sup>MM</sup> František Konopecký*

Protože máme dobrou představivost, tak nás po chvíli snění o dalších přímkách vytvořených podle předpisu musí napadnout, že hledaná křivka není uzavřená. Pokud si to nedokážeme představit, stačí vzít tužku a papír, zvolit vhodné měřítko a čmárat a čmárat, dokud to nebude jasné. Druhá zásadní myšlenka, která by nás měla trknout, je ta, že naše křivka nebude hyperbolou, protože u ní nikdy nenalezneme asymptoty (přímky, k nimž by se křivka neomezeně přibližovala), a tak tímto vylučovacím způsobem dojdeme k parabole, jakožto jediné poměrně známé křivce splňující naše podmínky.<sup>2</sup>



Abychom úlohu správně vyřešili, je nutné zopakovat si pár vlastností paraboly. Parabola je určena ohniskem  $F$  a hlavní přímkou  $h$ . Je definována jako množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od  $F$  a  $h$ .

Její důležitou vlastností, kterou při líčení použijí, je, že libovolná přímka  $t$  je tečnou paraboly, jestliže se v jí určené osově souměrnosti zobrazí ohnisko na hlavní přímku. Jiná interpretace této věty zní, že přímka  $t$  je tečnou právě tehdy, když pata kolmice z ohniska na  $t$

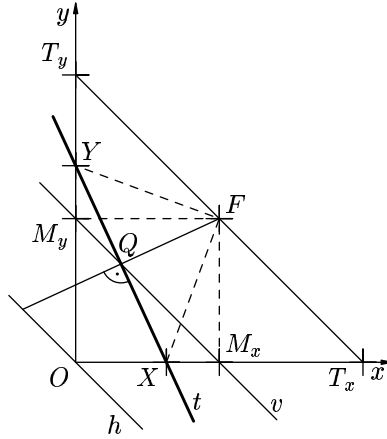
<sup>2</sup> Pozn. red.: K tomuto určení hledané křivky lze mít jistě mnoho námitek. Zvláště poslední předpoklad, že musí jít o některou kuželosečku, autor nijak nepodložil. Nicméně tento úvod slouží jen jako jakási „heuristika“ a dále se korektně dokazuje, že je tento uhodnutý výsledek správný.

leží na přímce  $v$ , která je rovnoběžná s hlavní přímkou a leží v polovině vzdálenosti mezi ní a ohniskem.

Druhou, neméně důležitou vlastností paraboly a její tečny je vlastnost plynoucí z předchozího tvrzení. Totiž že úhel mezi tečnou a spojnicí bodu dotyku  $T$  a ohniska  $F$  je stejně velký jako úhel mezi tečnou a kolmicí z bodu dotyku na hlavní přímku.

Nyní už máme potřebný základ k tomu, abychom geometricky vyřešili základní úlohu, tak se do toho pustíme.

Mějme dvě na sebe kolmé polopřímky, které si tradičně označíme  $x$  a  $y$ . Jejich průsečík nazvěme středem  $O$ . Přímkou vytvářející hladkou křivku jsou vlastně jejími tečnami, protože s ní mají společný právě jeden bod. Když bude těchto přímek nekonečně mnoho, nemá smysl říkat, že posouváme pravítko o stejný úsek. Je lepší říct, že pokud tečna protíná polopřímku  $x$  v nějakém bodě vzdáleném  $x_1$  od středu  $O$ , tak protne polopřímku  $y$  ve vzdálenosti  $y_1 = d - x_1$ , kde  $d$  je pevně zvolené číslo. Pak lze ihned intuitivně nalézt dva body dotyku. Leží na polopřímce  $x$ , resp.  $y$  a jejich vzdálenost od středu  $O$  je  $d$ . Tyto body si hned označíme  $T_x$  a  $T_y$ .



Když se nyní zamyslíme nad osou hledané paraboly, tak nás asi napadne, že bude totožná s osou polopřímek  $x$  a  $y$ , protože i celá množina tečen je podle této osy souměrná. Ohnisko tedy bude ležet někde na ní a hlavní přímka na ni bude kolmá.

Kolmice z bodu dotyku  $T_x$  na hlavní přímku (o které ještě nevíme, kde je, jen to tušíme) svírá s polopřímku  $x$  úhel  $45^\circ$ , protože je rovnoběžná s osou paraboly. Pak je ale podle vyložené věty úhel mezi  $x$  a polopřímku  $T_x F$  také  $45^\circ$ . Ohnisko tedy máme jasně určeno –  $F$  je středem úsečky  $T_x T_y$ . Z polohy ohniska plyne rovněž poloha hlavní přímky. Ta prochází středem  $O$ .<sup>3</sup>

Tím jsme jednoznačně určili parabolu, která by mohla být naší hledanou hladkou křivkou. Zbývá to nejtěžší – dokázat, že naše hladká křivka je skutečně částí nalezené paraboly.

Mějme tedy libovolnou přímku  $t$  vyhovující zadání. Průsečíky s polopřímkami  $x$  a  $y$  označme  $X$  a  $Y$ . Dále označme  $M_x$  a  $M_y$  paty kolmic z ohniska na příslušnou polopřímku a  $Q$  patu kolmice z bodu  $F$  na přímku  $t$ .

Nyní potřebujeme dokázat, že bod  $Q$  leží ve vzdálenosti  $|FO|/2$  od hlavní přímky. Ze zadání přímo plyne, že  $|M_x O| = |M_y O| = d/2$  a  $|XO| + |YO| = d$ .

<sup>3</sup> Pozn. red.: Viz první zmíněná věta o zobrazení ohniska v osově souměrnosti dané tečnou.

Z těchto dvou vztahů dostaneme  $|M_x X| = |M_y Y|$ , což je celkem zřejmé. Dále platí  $|FM_x| = |FM_y|$ . Z těchto dvou rovností a z existence dvou pravých úhlů již bezprostředně plyne, že  $\triangle FM_x X \simeq \triangle FM_y Y$  podle věty *sus*. Odtud dostáváme, že  $|FX| = |FY|$ , tedy že trojúhelník  $FXY$  je rovnoramenný. Rovnoramenný trojúhelník má jednu výšku (shodou okolností právě tu, kterou potřebujeme) shodnou s těžnicí, a tím pádem je  $Q$  středem úsečky  $XY$ . Jsme skoro u konce důkazu. Nyní si stačí uvědomit, že součet vzdáleností bodů  $X$  a  $Y$  od hlavní přímky je konstantní a je roven výrazu  $d/\sqrt{2}$ . Vzdálenost středu úsečky dané těmito body (tj. bodu  $Q$ ) od  $h$  tedy musí být  $d/2\sqrt{2}$ .

Protože je také  $|FO|/2 = d/2\sqrt{2}$ , leží bod  $Q$  vždy na přímce  $v$ ,  $t$  je tečnou k nalezené parabole a důkaz je tím konečně hotov.

*Pozn. red.:* Dále autor píše, že v obecném případě, kdy na sebe polopřímky nejsou kolmé a vzdálenosti značek na nich jsou navzájem různé, je vzniklá hladká křivka těž částí paraboly. Ohnisko a hlavní přímka už ale leží jinde. Důkaz autor neuvádí s odvoláním na to, že je analogický k výše uvedenému, jen o trochu složitější.

Dále, opět bez důkazu, uvádí, co musí platit pro umístění přímek, aby vytvořily jiné kuželosečky. Přímku nakreslíme tak, že polopřímku  $x$  protíná ve vzdálenosti  $x_1$  od  $O$  a polopřímku  $y$  ve vzdálenosti  $y_1$ .

$$\text{Pokud } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = d \\ \frac{1}{x_1} + \frac{k}{y_1} = d \\ x_1 y_1 = d \end{array} \right\}, \text{ pak jde o } \left\{ \begin{array}{l} \text{kružnici.} \\ \text{elipsu.} \\ \text{hyperbolu.} \end{array} \right.$$

Ještě jiný postup řešení úlohy zvolil Bc.<sup>MM</sup> Martin Suchan, který si zadanou křivku nakreslil ve vektorovém editoru a dále ji v něm měřil a upravoval. Nakonec také dospěl ke správnému řešení.

Pokud se chcete tímto tématem dále zabývat, zkuste třeba zapřemýšlet, jestli a případně jak by se dalo této metody využít ke geometrickým konstrukcím. Například jak zvolit polopřímky a značky na nich, abychom dostali parabolu s požadovanými vlastnostmi.

Doc.<sup>MM</sup> Lenka Studničná nám poslala popis zajímavé metody konstrukce paraboly. „Na papír nakreslíme bod a pak papír ohýbáme tak, aby se bod vždy dotýkal jedné určité hrany papíru. Když papír hodněkrát (ideálně nekonečněkrát) ohneme, objeví se hladká křivka. Otázkou je proč (a zda vůbec) je to parabola.“

Marble

## Téma 7 – Křížovatky

Řešení přišlo několik, drtivá většina řešitelů se ovšem omezila na výčet typů křížovatek. K jednotlivým křížovatkám poté řešitelé uvedli jejich výhody a

nevýhody. Někteří řešitelé také napsali o dopravní situaci v jejich městě. Přesto se najdou i některé zajímavé věci, kterých si všimli:

- **Křižovatka s dopravními značkami** (*Doc.<sup>MM</sup> Lenka Studničná*)  
Ideálním místem použití je frekventovaná silnice, na kterou se připojují komunikace méně významné a méně používané. Řidič jedoucí po hlavní silnici jede plynule.
- **Světelná křižovatka** (*Doc.<sup>MM</sup> Lenka Studničná*)  
Jsou nutné pro křížení frekventovaných silnic, zajišťují relativně plynulou jízdu ze všech směrů. Klíčovou otázkou je to, jak mají být semafore seřizovány. Velmi dobrým, ale také nákladným řešením je umístit před křižovatku v každém směru čidla, která by monitorovala hustotu dopravy a regulovala by tak světelné signály. Tedy pro frekventovanější silnice bude svítit zelená déle než pro ty, kde přijíždí aut málo. Tento systém také ošetří případy, kdy v určitou dobu jezdí auta převážně z jednoho směru.
- **Kruhový objezd** (*Mgr.<sup>MM</sup> Karla Procházková*)  
Kruhové objezdy lze s výhodou použít při dostatku místa hlavně tam, kde se spojují minimálně tři velmi frekventované cesty, případně se připojují další vedlejší. Proto se s nimi nesetkáme příliš často v centrech měst, ale jsou velmi vhodné na místech, kde hlavní silnice trochu míjí město a z ní se odpojuje hlavní silnice do centra města. Okruh zpomalí řidiče a částečně je tak také upozorní na to, že se dostali do města a měli by být pozornější.
- **Jednosměrky** (*Mgr.<sup>MM</sup> Jan Křivonožka*)  
Užívají se hlavně v historických centrech, kde jsou prostě moc úzké cesty, nebo uměle proto, aby se zamezilo vytvoření jedné centrální křižovatky rozdělením na více menších křižovatek. Dochází k mírnému zpomalení, protože je nutné občas najet větší vzdálenost, než je třeba. Na druhou stranu se zvýší bezpečnost.

*Mgr.<sup>MM</sup> Peter Perešíni* se hlouběji zabýval otázkou efektivního využití křižovatek se světelnou signalizací.

## Křižovatka zo semaformi

*Mgr.<sup>MM</sup> Peter Perešíni*

Majme danú nejakú križovatku zo semaformi. Predpokladajme, že na semafore je len zelená a červená (ľudia aj tak ignorujú žltú). Na našej križovatke je osem semaforov. Je jasné, že všetky nemôžu byť zaraz zapnuté.

Situáciu si znázorníme trochu inak. Majme graf o osmi vrcholoch. Medzi dvoma vrcholmi bude viesť hrana vtedy, ak nemôžu svietiť súčasne. Označme si takty ako a, b, c, ... Našou úlohou je priradiť každému vrcholu aspoň jedno písmenko (1 takt), v ktorom bude na danom semafore svietiť zelená. Lenže musíme dávať pozor na to, že vrcholy spojené hranou nemôžu mať to isté písmenko. Ľahko nahliadneme, že ak existuje také priradenie písmenok, že každému vrcholu priradíme aspoň jedno písmenko, potom existuje aj priradenie, že každému vrcholu priradíme práve jedno písmenko.

No a táto úloha sa už veľmi podobá na problém ofarbenia grafov z teórie grafov. Ako vieme, tento problém je NP, a tak nám neostáva nič iné, len preskúšať všetky možnosti. Ešte predtým však môžeme zistiť tieto veci:

- nie je 2-zofarbitelný.
- určite je 7-zofarbitelný, pretože najväčší index vrcholu je 6 (vrchol číslo 7).
- nie je rovinný (neviem dokázať).

Predpokladajme teda, že sme prebehli všetky možnosti a zistili sme minimálny počet farieb a máme zachytenú aj jednu takú situáciu. Potom túto situáciu ešte musíme „zlepšiť“. Jej chyba je v tom, že jednému semaforu priradí len jeden takt. A samozrejme je jasné, že semafor môže svietiť aj viacej.

*Pozn. red.: Došlá řešení se ovšem liší od toho, co jsme očekávali. Jistě jsou mezi vámi schopní programátoři, kteří vytvoří malou křižovátku s příjíždějícími řidiči.*

*Jirka*

## Řešení úloh

### Úloha 4.1 – Kondenzátor (5b)

#### Zadání:

Mějme nabitý otočný kondenzátor, na jehož svorkách je napětí  $U$ . Připojíme k němu odpor  $R$ , přes který se bude vybíjet. Přitom chceme, aby napětí na svorkách kondenzátoru (nebo odporu) zůstávalo stále  $U$ . Jak toho můžeme docílit?

Spočítejte energii, která se během celého vybíjení spotřebovala na odporu. Spočítejte také energii, která by se spotřebovala v případě, že bychom nechali kondenzátor vybíjet bez regulování napětí. Co znamenají získané výsledky a jak je vysvětlíte?

#### Řešení:

Z definice víme, že kapacita kondenzátoru určuje náboj, který je uložen v kondenzátoru, pokud je na jeho svorkách jednotkové napětí. Neboli vzorečkem:

$$Q = CU. \quad (r1.1)$$

Počáteční náboj v kondenzátoru plyne přímo z (r1.1). Tedy  $Q_0 = C_0U$ , kde  $C_0$  je počáteční kapacita kondenzátoru. Při konstantním napětí poteče přes odpor konstantní proud  $I = U/R$ . Proud je náboj přenesený za jednotku času, takže v čase  $t$  bude náboj v kondenzátoru jen

$$Q(t) = Q_0 - \frac{Ut}{R}. \quad (r1.2)$$

Abych při tomto náboji udržel původní hodnotu napětí, musím snížit kapacitu kondenzátoru. Dosazením (r1.2) do vztahu (r1.1) vyjde

$$C_0U - \frac{Ut}{R} = C(t)U, \quad C(t) = C_0 - \frac{t}{R}. \quad (r1.3)$$

Kondenzátorem tedy musíme otáčet tak, aby se kapacita lineárně snižovala z počáteční hodnoty  $C_0$  a aby v čase  $RC_0$  klesla na nulovou hodnotu (v tu chvíli bude kondenzátor zcela vybitý).

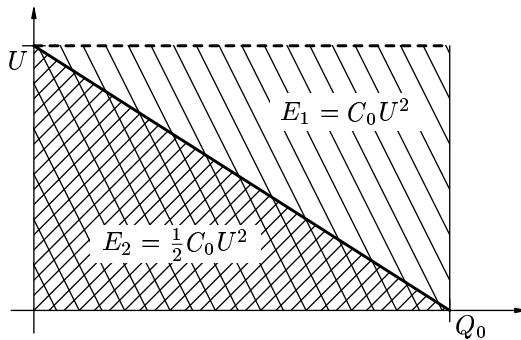
Výkon, který se spotřebovává na odporu, lze určit podle známého vztahu

$$P = UI, \quad (\text{r1.4})$$

kde  $U$  je okamžité napětí na odporu a  $I$  okamžitý proud jím tekoucí. Víme, že výkon je energie spotřebovaná za jednotku času a proud je náboj prošlý za jednotku času. V případě konstantního napětí tudíž musí platit, že celková energie spotřebovaná na odporu je rovna celkovému prošlému náboji násobenému napětím. Ve výše popsaném případě bylo napětí skutečně konstantní, takže můžeme napsat, že energie  $E_1$  spotřebovaná na odporu při vybíjení s regulací je

$$E_1 = Q_0 U = C_0 U^2. \quad (\text{r1.5})$$

V případě vybíjení neregulovaného kondenzátoru je situace poněkud složitější. Napětí bude klesat spolu s klesajícím nábojem, tedy  $U_n(t) = Q(t)/C_0$ . Ti, kteří umí integrovat, si už zbytek jistě dokážou spočítat. Pokud se vám integrály nelíbí, můžete problém řešit i jinak. Nakresleme si graf závislosti napětí na náboji prošlém přes odpor – obr. r1.1 (pro porovnání je přerušovanou čarou znázorněno vybíjení s regulací).



Obr. r1.1

Každý nekonečně úzký sloupeček v grafu odpovídá změně náboje při konstantním napětí. (Jinak řečeno, můžeme šikmý graf nahradit velmi jemnými „schody“.) Spotřebovaná energie je pak obsah tohoto sloupečku a celková spotřebovaná energie obsah plochy pod grafem, tedy

$$E_2 = \frac{1}{2} Q_0 U = \frac{1}{2} C_0 U^2. \quad (\text{r1.6})$$

Energie  $E_2$  navíc znamená i energii, která je „skryta“ v kondenzátoru s kapacitou  $C_0$  nabitým na napětí  $U$ . Kde se tedy vzala ta druhá polovina energie  $E_1$ ?

Jediné, co jsme dělali navíc, je otáčení kondenzátorem. Takže se nabízí odpověď, že tím jsme vykonali práci  $E_1/2$ , která se pak spotřebovala na odporu.

Pro představu, kde se tato práce vezme, je dobré si původní úlohu mírně přeformulovat. Místo otočného kondenzátoru budeme uvažovat deskový kondenzátor, u kterého snižujeme kapacitu vzdalováním desek. (V naší úloze je kondenzátor charakterizován pouze svou kapacitou, takže výsledky musí být nezávislé na tom, jakým způsobem tuto kapacitu měníme.)

Desky kondenzátoru mají opačný náboj, takže se k sobě přitahují. Při jejich oddalování tedy musíme vykonat práci, která se přidá k energii uložené v kondenzátoru.

Marble

## Úloha 4.2 – Číslování bodů (5b)

### Zadání:

Je dána pravoúhlá mřížka  $r \times s$  bodů. Očíslujte v ní jednotlivé body čísly  $1, 2, 3, \dots, r \cdot s$  tak, aby součet absolutních hodnot rozdílů všech dvojic čísel spojených hranou byl co nejmenší.

### Řešení:

Většina došlých řešení se zabývala případy, kdy kratší strana  $r$  (dále řádek) mřížky  $r \times s$  měla 1, 2 či 3 vrcholy. Vyzozorovali jste, že nejlepší je procházet mřížku po řádcích směrem od jednoho konce ke druhému. Mnozí z vás si všimli, že u každého řádku můžeme zvolit libovolně směr, kterým jej projdeme. Bohužel nikdo nepřišel na to, že toto řešení není možno zobecnit pro větší mřížky (většinou jste „inženýrskou indukci“ prohlásili toto za obecně nejlepší řešení).

Dr.<sup>MM</sup> Tereza Klímošová si všimla, že budou-li posloupnosti v jednotlivých řádcích a sloupcích monotónní, bude celkový součet roven součtu rozdílů čísel krajních vrcholů. Pokud posloupnosti monotónní nebudou, bude součet větší. Toto tvrzení ale nedokázala, stejně jako nikdo jiný. My platnost tohoto tvrzení budeme nejprve předpokládat, později se k jeho důkazu vrátíme.

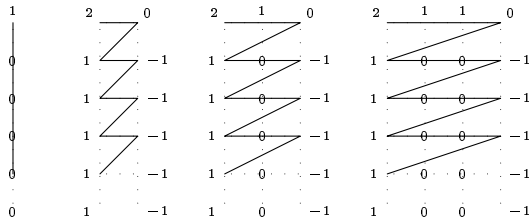
Mnoho z vás vyčíslovalo výsledný součet, ale to po vás nikdo nepožadoval. K porovnání toho, který ze dvou součtů je větší, nemusíme nutně součty vyčíslit. Snažme se nalézt metodu, jak dvě očíslování porovnat pomocí pokud možno co nejjednoduššího výpočtu.

Pro náš další postup by mohl být užitečný jiný pohled na zadání: Nechť číslo vrcholu představuje čas. Pak je zadáním minimalizovat součet dob, po které jsou jednotlivé hrany „otevřeny“ (výskyt prvního vrcholu hranu „otevřít“, výskyt druhého „zavřít“). Abychom tento součet spočítali, není ani tak důležité, které hrany jsou v čase  $t$  otvírány, resp. zavírány, důležitý je jen počet otvíraných, resp. zavíraných hran. Ve skutečnosti nám pro výpočet výsledného součtu stačí vědět, o kolik víc hran  $\Delta_t$  je v čase  $t$  otvíráno než zavíráno. Zadáním je minimalizovat  $\sum_t -t \cdot \Delta_t$ . (Uvědomme si, že  $\sum_t \Delta_t = 0$ , což přirozeně odpovídá tomu, že zvětšení všech čísel o konstantu nemá na součet rozdílů vliv. Obdobně nemá vliv očíslovat celou posloupnost pozpátku.)



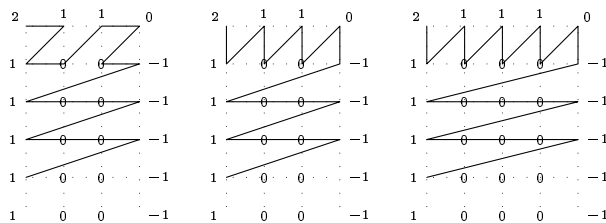
Zkusme nalézt optimální posloupnost  $\Delta_t$ . Pokud jsou posloupnosti čísel vrcholů ve všech řádcích a sloupcích monotónní, je  $\Delta$  nulová v každém vnitřním bodu mřížky. U netriviální mřížky hodnotou 2 posloupnost začíná a hodnotou  $-2$  končí a  $\Delta$  je nulová ve dvou zbylých rozích mřížky. Každý řádek a každý sloupec hodnotou 1 začíná a hodnotou  $-1$  končí (při vhodné volbě začátku a konce).

Snažíme se zvolit pořadí vrcholů tak, aby byl součet  $\sum_t t\Delta_t$  co největší, neboli zvolit pořadí, kde  $-1$  jsou v průměru co nejdříve a 1 co nejpozději. Monotonie nám ale neumožňuje zvolit libovolné pořadí. Na druhou stranu se můžeme bez újmy na obecnosti rozhodnout, kdykoli začínáme sloupec či řádek, zvolit volný, který je nejvíce vlevo nahoře (volbu máme jen v případě, je-li předchozí sloupec či řádek zcela dokončen). Tato volba nám umožňuje snazší vyjadřování. Číslo 1 se pak vyskytuje na okrajích levém a horním, čísla  $-1$  na okrajích pravém a dolním.



Pro  $r = 1$  je úloha triviální, pro  $r = 2$  není možné vzdálenost mezi 1 a  $-1$  zlepšit, průchod po řádcích (podél kratší strany) je tedy optimální.

Abychom monotónním průchodem dosáhli první  $-1$ , musíme projít celé první dva řádky. Pro  $r = 3$  je nejlacinější dosažení první  $-1$  posloupnost 2, 1, 0, 1, 0,  $-1$ . Dále je každá  $-1$  dosahována v nejkratším možném čase po předcházející 1. Vzhledem k symetrii obou konců posloupnosti není možno dosáhnout vylepšení ani na konci. Průchod podél kratší strany je tedy i zde optimální.

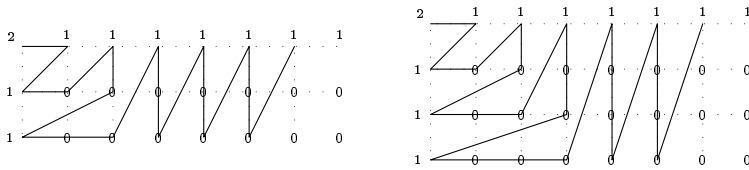


Pro  $r = 4$  je nejlacinější dosažení první  $-1$  posloupnost 2, 1, 1, 0, 1, 0, 0,  $-1$ . Existuje pět různých průchodů, které toho dosahují. Mezi nimi je i průchod podél kratší strany a je tedy i v tomto případě optimální.

Pro  $r \geq 5$  ale již existuje lepší úvodní podposloupnost, než je v průchodu podél kratší strany. Je to podposloupnost 2, 1, 1, 0, 1, 0,  $\dots$ , 1, 0, 0,  $-1$ , zatímco podposloupnost průchodu podle nejkratší strany (2, 1, 1,  $\dots$ , 1, 0, 1, 0, 0, 0,  $\dots$ ,

–1) je dražší. Je výhodnější oddálit 1 prvního řádku použitím 0 řádku druhého.

Otázkou zůstává, zda se nevyplatí použít 0 i z dalších řádků k oddálení 1 prvního řádku. Uvědomme si, že tím zároveň oddalujeme i příslušné –1. Označme  $\Gamma$  rozdíl počtu oddálených 1 a –1 pro jednotlivé body v mřížce. Je-li  $\Lambda_{i,j}$  počet bodů horního okraje za  $j$ -tým sloupcem, které dostanou číslo menší než bod v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci, pak tento bod oddaluje  $i - 2$  hodnot –1 a  $r - 1 - j - \Lambda_{i,j}$  hodnot 1, tedy  $\Gamma_{i,j} = r + 1 - j - i - \Lambda_{i,j}$ . Až na „poruchy v levé části mřížky způsobené funkcí  $\Lambda$ “ je funkce  $\Gamma$  nulová na diagonále vedoucí do pravého horního rohu a na diagonále posunuté o  $i$  doleva je hodnota  $i$ . Políčka se zápornou hodnotou  $\Gamma$  nemá smysl procházet dříve, než je dokončen předchozí řádek. Abychom zjistili, zda se vyplatí zpomalit horní 1 pomocí 0 z  $i$ -tého řádku, musíme nejprve spočítat  $\Lambda_{i,j}$  a kolik nás bude stát urychlení otevření  $i$ -tého řádku (o kolik urychlíme úvodní 1 tohoto řádku). K tomu potřebujeme znát optimální průchod zprava zdola otevřeným obdélníkem  $i \times j$  (hodnoty  $\Delta$  nenulové jen na horním a levém okraji) za předpokladu  $i \leq j$ .

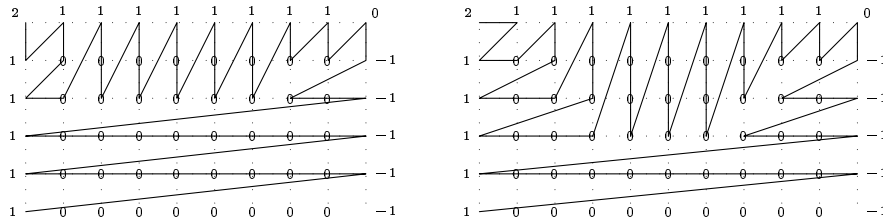


Optimální průchod se snaží zvolit vždy takovou 1, která „odkryje“ co nejvíce 0. Výsledkem jsou průchody, kdy se postupně prošlá oblast rozšiřuje na čtverce (z levého horního rohu) velikosti 1, 2,  $\dots$ ,  $i$  a po dosažení okraje jsou probírány zbývající sloupce shora dolů.

Pokud se rozhodneme načít  $i$ -tý řádek před dosažením první –1 a urychlit tím úvodní 1 z pozice  $r \cdot (i - 1) + 1$  na pozici  $i \cdot (i - 1) + 1$ , určíme tím hodnoty  $\Gamma$  na začátku tohoto řádku  $\Gamma_{i,k} = \Gamma_{i,i} = r + 1 - 2i$  pro  $k \leq i$ . Urychlíme tím tuto 1 o  $(i - 1) \cdot (r - i)$  a zároveň je tím oddáleno o  $\Gamma_{i,1}$  více jedniček horního řádku než minus jedniček pravého sloupce. Načít  $i$ -tý řádek se vyplatí pouze tehdy, je-li součet kladných hodnot  $\Gamma$  na řádku větší než  $(i - 1) \cdot (r - i)$ . Dostáváme tak kvadratickou nerovnost  $(i - 1) \cdot (r - i) < \sum_{j=1}^{r+1-i} \Gamma_{i,j} = i \cdot (r + 1 - 2i) + \sum_{k=0}^{r-2i} k = i \cdot (r + 1 - 2i) + 1/2(r + 1 - 2i) \cdot (r - 2i) = 1/2(r + 1 - 2i)(2i + r - 2i) = (r + 1 - 2i) \cdot r/2$ . Označme  $f(r)$  menší z kořenů hraničního kvadratického polynomu nerovnice. (Platí  $f(r) = (2r + 1 - \sqrt{2r^2 - 2r + 1})/2$ . Všimněme si, že  $f(4) = 2$ , což je ve shodě s naší zkušeností, že „předčasné“ otevření druhého řádku řešení pro  $r = 4$  nezlepší, ale ani nezhorší. Obdobně dostáváme celočíselné řešení  $f(21) = 7$ .)

Výsledný průchod mřížkou je tedy možno v prvních  $\lfloor f(r) \rfloor$  řádcích<sup>4</sup> popsat v prvních  $\lfloor f(r) \rfloor$  sloupcích průchodem po čtvercích, uprostřed průchodem

<sup>4</sup> Symbol  $\lfloor x \rfloor$  značí dolní celou část a  $\lceil x \rceil$  horní celou část čísla  $x$ .



po sloupcích a v posledních  $\lfloor f(r) \rfloor$  sloupcích průchodem k diagonále. Od řádku  $1 + \lfloor f(r) \rfloor$  do řádku  $s - \lfloor f(r) \rfloor$  průchod pokračuje po řádcích, v spodních  $\lfloor f(r) \rfloor$  řádcích je nejprve v první třetině průchod k diagonále, v prostřední „třetině“ průchod po sloupcích a v závěrečné oblasti průchod po čtvercích.

Stejně hodnoty součtu je možno dosáhnout několika způsoby. Volíme úvodní roh, další volby máme v průchodu k diagonálám v časování políček na diagonále, v průchodu po čtvercích při volbě, zda čtverec rozšíříme nejprve o sloupec či řádek. V prostředních řádcích volíme, zda je začneme zleva či zprava, celou spodní oblast můžeme také pravolevě převrátit. V případě celočíselného  $f(r)$  máme volbu, zda při oddělení horní či dolní oblasti oddělíme  $f(r)$  nebo  $f(r) - 1$  řádků. Je-li  $r = s$ , dostaneme ke každému řešení převrácením kolem úhlopříčky řešení další.

Nalezená řešení jsou optimální, pokud mezi optimálními řešeními existuje nějaké po řádcích i sloupcích monotónní.

Důkazy monotonie, o které jsem se pokoušel, byly založeny na možnosti „lokálního“ vylepšení posloupnosti  $\Delta_t$ . Vše nasvědčovalo tomu, že by důkaz vyžadoval větší množství pomalu zesilovaných pozorování (s tím, že by vylepšování bylo čím dál „globálnější“). Jsem přesvědčen o tom, že existuje mnohem elegantnější důkaz. Máte nějaké návrhy? Uvědomme si, že minimalizujeme součet „velikostí řezů“ přes jednotlivé časy. Dá se toho využít?

Pokud se nám monotonii nepodaří dokázat, můžeme naše řešení modifikovat následovně:

Odhadneme zdola součet velikostí řezů přes jednotlivé časy. Nejjednodušším odhadem je spočítat nejmenší možné řezy pro jednotlivé časy (odpovídající různým očíslováním). Spočítáme pro časy do  $r \cdot s / 2$ , pro časy od  $r \cdot s / 2$  dostaneme výsledek ze symetrie. Dokud není ukončen žádný řádek, dostáváme minimální řezy velikosti  $x = k + l$ , když začneme  $k$  sloupců a  $l$  řádků. Největší čas, kdy dostaneme součet  $x$ , je  $\lfloor x/2 \rfloor \cdot \lfloor x/2 \rfloor$ . Řezy velikosti  $r$  dostáváme také pro časy, které jsou násobky  $r$ , a řezy velikosti  $r + 1$  pro ostatní časy větší než  $r$ . Pro časy  $t$  do  $\lfloor r/2 \rfloor \cdot \lfloor r/2 \rfloor$  dostáváme řezy velikosti dle prvního odhadu. Pro větší časy  $r$  či  $r + 1$  dle druhého odhadu.

Nazvěme  $P_k$  pro  $k \leq \lfloor r/2 \rfloor$  průchod první polovinou mřížky, který od řádku  $k + 1$  prochází mřížku po řádcích a v prvních  $k$  řádcích prochází v prvních  $k$  sloupcích „po čtvercích“, v posledních  $k$  sloupcích průchodem „k diagonále“ a v ostatních sloupcích průchodem „po sloupcích“. Naše řešení je pak možno označit pomocí  $P_{\lfloor f(r) \rfloor}$ . Uvedená nerovnost byla vztahem mezi součtem přes  $P_i$

a  $P_{i-1}$ . Ukázali jsme, že index  $\lfloor f(r) \rfloor$  je index, pro který je dosaženo optima (mezi  $P_i$ ).

Rozdělme si jednotlivá očíslování do kategorií 1 až  $\lfloor r/2 \rfloor$  následovně: Všimněme si „průmětů“ číselných bodů do jednotlivých os. Pro určení kategorie je rozhodující okamžik, kdy jeden z průmětů obsahuje všechny body. Je-li velikost druhého průmětu v tento okamžik větší než  $\lfloor r/2 \rfloor$ , zařadíme toto očíslování do kategorie  $\lfloor r/2 \rfloor$ . Jinak bude kategorií očíslování velikost druhého průmětu.

Pokud se nám podaří ukázat, že  $P_k$  je optimální očíslování pro očíslování kategorie  $k$ , budeme mít dokázáno, že  $P_{\lfloor f(r) \rfloor}$  je optimální očíslování.

Rozmysleme si, jak vypadají optimální řezy kategorie  $k$  v časech, kdy se velikost řezu  $P_k$  s optimální velikostí neshoduje. Dolní odhady velikostí řezů, kde jsme omezeni na očíslování kategorie  $k$ , se s očíslováním  $P_k$  shodují pro časy do  $k \cdot (r - k) + k - 1$  i pro časy od  $k \cdot r - k$ .

Největší řez v očíslování  $P_k$  je velikosti  $r + k - 1$  (nastává v bezprostředním okolí času, kdy je očíslován roh). Vzhledem k definici kategorie  $k$  pro libovolné očíslování této kategorie platí, že velikost řezu v bezprostředním okolí času, kdy je „zaplněn první průmět“, je aspoň  $r + k - 1$ . Řezu velikosti menší než  $r + k - 1$  je možno dosáhnout buď před „zaplněním prvního průmětu“, nebo po úplném obsazení prvních dvou řádků (či sloupců).

Očíslování, které oddaluje „zaplnění prvního průmětu“, zároveň oddaluje dobu, kdy velikost řezu klesne. Neexistuje tedy očíslování, které by se shodovalo s nezávislými optimy pro jednotlivé časy (výjimkou jsou kategorie 1 a 2).

Pevně dané očíslování pro každý bod mřížky určuje, zda je očíslován před, či po „zaplnění prvního průmětu“. Znaménko dříve definované funkce  $\Gamma$  určuje, zda je výhodné bod použít před tímto okamžikem, či po něm. Pokud se omezíme na očíslování, kde body s kladnou  $\Gamma$  jsou navštíveny před a body s nekladnou  $\Gamma$  po „zaplnění prvního průmětu“, pak bude  $P_k$  dosahovat minimálních řezů v každém čase.

Pokud by nějaký bod s kladnou  $\Gamma$  byl navštíven po, či nějaký bod se zápornou  $\Gamma$  před „zaplněním prvního průmětu“, pak by součet velikostí řezů byl větší.

*Hroch*

## Úloha 4.3 – Čokoláda v sodovce (5b)

### Zadání:

*Veźměte kousek ěokolády a ponořte jej do sodovky (nebo libovolné „perlivé“ vody). Pozorujte, co se bude dět, a pokuste se urět závislost pozorovaněho jevu na rśznśch parametrech experimentu. Zkuste svě vśsledky alespoň kvalitativně zdśvodnit.*

### Řešení:

Kto hľadal v tejto ũlohe dajakś zśkernosť, bude sklamanś. Snśď jedinśm problěmom mohla byť skutoěnosť, že niektorś z vśs niě nepozorovali. V zadanś sa ale pśše, že mśte preskśmať, ako sa sprśva ěokolśda pri rśznych parametroch experimentu – v preklade do reěi ľudś to znamenś: Ak sa ti pokus nedarś, skśs nieěo zmeniť. Urobiť jeden pokus a uzavrieť experiment so zśverom: Niě sme

nepozorovali, nič sa tam nedeje, nie je správne. Prejdem sa po republike, a keď ma nikto nechce podplatiť, znamená to, že problém úplatkov neexistuje?

Úspešní experimentátori pozorovali, ako sa čokoláda periodicky ponára a zasa vynára. Je to spôsobené oxidom uhličítym, ktorý sa postupne vylučuje na povrchu čokolády a dvíha ju smerom k hladine. Tam sa  $\text{CO}_2$  od povrchu oddelí a unikne do vzduchu, priemerná hustota čokolády a bubliniek opäť klesne pod hustotu vody a čokoláda padá ku dnu. Proces sa opakuje dovtedy, dokiaľ je vo vode dostatok  $\text{CO}_2$ . Malé kúsky čokolády môžu zostať prilepené na hladine vďaka povrchovému napätiu.

Čokoláda ako taká obsahuje tuk, ktorý zabraňuje vode, aby nasiakla. Preto sa jej povrch nezmáča. Povrch čokolády je zároveň veľmi členitý a tieto nerovnosti fungujú ako kondenzačné jadrá – na nich sa oxid uhličitý uvoľňuje oveľa lepšie ako na hladkom povrchu, napríklad na stenách pohára.

Niektoré postrehy pri pozorovaní uvádzame:

- *Bc.<sup>MM</sup> Martin Holeček* – Experimentálne pozoroval, že množstvo uvoľneného  $\text{CO}_2$  je zhruba 5-krát vyššie, ak do sodovky vhodíme niekoľko dielikov čokolády. Porovnával s vedľa otvorenou fľašou.
- *Bc.<sup>MM</sup> Martin Holeček* – Nastrúhal čokoládu na dno pohára a zalial sodovkou. Na hladine sa okamžite vytvorila celistvá vrstva peny. Miešanie vrstvu nezničilo a ona sa držala na povrchu až do konca pokusu – tri hodiny. Hneď na začiatku sa voda zafarbila hnedou farbou, farba mala s postupom času rovnakú sýtosť. Rovnako experimentálne zistil, že čokoládová voda chutí čudne.
- *Mgr.<sup>MM</sup> Karla Procházková* – „Nepoužívajte celé štvorčeky čokolády, nikdy sa nevznášajú, mne sa ledva vznášala štvrtina štvorčeka.“
- *Doc.<sup>MM</sup> Stanislav Basovník* a *Dr.<sup>MM</sup> Helena Kubátová* – Zmerali hustotu ich použitej čokolády – Orion mliečnej – a dospeli k hodnote  $\rho_{\text{čok.}} = 1600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .
- *Bc.<sup>MM</sup> Kateřina Böhmová* – Povrch čokolády postupom času zosvetlie. Kúsok tuku tiež tvorí v perlivej vode bublinky. Mliečna aj horká čokoláda sa v perlivej vode správajú podobne (Lenka Studničná), jav na druhu čokolády nezávisí. Rovnako veľmi dobre poznamenala, že v obyčajnej vode sa bublinky na povrchu čokolády netvoria, a preto plyn, ktorý ich tvorí, nepochádza z čokolády. Po vybratí čokolády (z perlivej aj neperlivej vody) zostala na povrchu masťná, nesladká vrstva. Táto vrstva vzniká rozpustením cukru vo vode.
- *Bc.<sup>MM</sup> Jiří Borkovec* – Druh vody má výrazný vplyv na rýchlosť procesu, rýchlosť sa primerane zmenila pri zmiešaní dvoch druhov použitých vôd.
- *Dr.<sup>MM</sup> Jan Musílek* – Ponoril čokoládu do vody s teplotou  $60^\circ\text{C}$ . Bublinky sa síce tvorili veľmi rýchlo, ale boli veľmi malé a nevytvorili na povrchu čokolády dostatočne hrubú vrstvu na zdvihnutie čokolády. Vykonal rovnaký experiment s vychladenou vodou o teplote zhruba  $5^\circ\text{C}$  a zistil, že sa vytvárajú väčšie bublinky na povrchu čokolády a čas, za ktorý vypláva čokoláda k povrchu, je kratší ako v predchádzajúcom prípade.

- *Doc.<sup>MM</sup> Lenka Studničná* – Použila mliečne Figaro.
  - \* Zistila:
    - polovica štvorčeka (zhruba 2 g) čokolády sa vôbec nepohne,
    - 1/4 štvorčeka sa po 15 sekundách začne výrazne hýbať, odo dna však nestúpa,
    - 1/8 štvorčeka po 2 až 6 sekundách stúpa k hladine,
    - 1/16 štvorčeka ani nedopadne na dno a už stúpa.
  - \* Experiment bol vykonaný s čerstvo naliatou sodovkou. Keď nechala vodu 15 minút odstáť a až potom vhodila kúsok čokolády do sodovky, stúpali k hladine iba kúsok 1/16 a menšie.
  - \* Keď testovala sodovku s teplotou 5 °C, stúpala čokoláda menej, ale môže ísť o chybu merania.
  - \* Pridanie soli spôsobí okamžité zrýchlenie reakcie, ktorá po krátkom čase nadobudne pôvodnú rýchlosť (Jiří Borkovec). Cukor ani ocot rýchlosť nezmenia.
  - \* Prečo iba čokoláda? Plávať v sodovke vie množstvo iných vecí:
    - hrozienka – Začne stúpať asi 3 sekundy po dopadnutí na dno.
    - gombík – Začne stúpať skôr, ako dopadne, a už nespadne späť, iba ak mu pomôžeme. Bublínky v dierkach sa totiž po vynorení neuvoľnia.
    - špendlík – Nestúpa, iba sa na dne pohybuje.
    - kolienko – Začne sa vynárať asi 10 sekúnd po dopade.
    - desaťhaliernik – Nič, rovnako päťdesiathaliernik.
    - plátkový syr
      - 5 × 5 mm (100 mg) – nič,
      - 5 × 2,5 mm (50 mg) – pohybuje sa na dne,
      - 2 × 2 mm (16 mg) – po 10 sekundách začne stúpať a klepať,
      - 1 × 1 mm (4 mg) – stúpať začne ešte pred tým, ako dopadne na dno.

*Bzučo*



Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy							$\sum_0$	$\sum_1$		
			r1	r2	r3	t1	t2	t3	t4			t5	t6
42-43.	Mgr. <sup>MM</sup> Vojtěch Kubáň	34										9	
	Bedřich Roskovec	9	3	1	5							9	9
44-48.	Tereza Hlaváčová	8											8
	Jiří Milička	8											8
	Pavel Procházka	8		0	2					0	2	4	8
	Marek Scholz	8											8
	Jan Uhlík	8											8
49.	Tomáš Javůrek	7											7
50-53.	Dr. <sup>MM</sup> Zuzana Rozlívková	89		1				4				5	6
	Mgr. <sup>MM</sup> Michal Růžek	49											6
	Bc. <sup>MM</sup> Jan Rieger	18											6
	Antonín Špaček	6											6
54-58.	Dr. <sup>MM</sup> Dana Beránková	80											3
	Richard Bobek	6											3
	Hana Suchomelová	3											3
	Přemysl Šrámek	3											3
	Zdeněk Vais	3			0					0		0	3
59-61.	Milan Dvořák	2											2
	Tereza Pechová	2		1			1					2	2
	Jan Šácha	2											2
62-63.	Pavla Grubhofferová	6											1
	Jiří Krejčí	1											1

Sloupeček  $\sum_{-1}$  je součet všech bodů získaných v našem semináři,  $\sum_0$  je součet bodů v aktuální sérii a  $\sum_1$  součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být  $\sum_0 = \sum_1$ ).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

## Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF  
Ke Karlovu 3  
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235

E-mail: [MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz](mailto:MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz)

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz>



Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory střešeděské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.