



Termín odeslání 12. 5. 2003

Zadání úloh

Úloha 5.1 – Trojúhelník (3b)

Mějme trojúhelník ABC s délkami stran $|BC| = 3$, $|AC| = 4$ a $|AB| = 5$. Na úsečku AC umístíme bod D tak, aby kružnice vepsané trojúhelníkům BCD a BDA měly stejný poloměr. Najděte velikost poloměru těchto kružnic.

Úloha 5.2 – Potápěč (4b)

Krátkozraký potápěč nosí běžně (na souši) brýle se sedmi dioptriemi. Protože nechce mít pod vodou dvoje brýle přes sebe, rozhodl se, že si do svých potápěčských brýlí nechá dát dioptrická skla. Jak musí taková skla vypadat, aby viděl pod vodou bez problémů i do dálky? A jak s těmito brýlemi uvidí ještě předtím, než skočí do vody?

Úloha 5.3 – Koule (3b)

Spočítejte, jaký tvar bude mít stín koule, položené na rovném stole, když ji osvětlíme hodně vzdáleným zdrojem (např. Sluncem). Jak se situace změní, jestliže bude koule osvětlena z blízkého bodového zdroje?

Zadání témat

Téma 7 – Výrazy

Vaším úkolem je vymyslet a napsat program, který na vstupu dostane číselný výraz, vyhodnotí jej a následně vypíše jeho číselnou hodnotu. Vstupní výraz může obsahovat celá i desetinná čísla, operace $+$, $-$ (včetně unárního¹), \times , $/$ a libovolné množství vnořených závorek. Výraz musí být vyhodnocen s přihlédnutím k prioritě jednotlivých operací (tj. násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním).

Jako své řešení nám pošlete odladěný zdrojový kód programu s popisem, jak a proč funguje. Nejdůležitější je funkčnost (tedy to, že libovolný výraz bude správně vyhodnocen), ale pokuste se také, aby váš program byl co nejrychlejší. Případně můžete přidat odhad časové a paměťové náročnosti.

¹ Unární mínus je takové, které neznačí odčítání, ale zápornou hodnotu čísla. Například mínus před jedničkou ve výrazu $3 + (-1)$ je unární.

Řešení témat

Téma 1 – Mise na Mars

Nejvýhodnější trajektorie

Mgr.^{MM} Jan Olšina

Energeticky nejvýhodnější trajektorií pohybu v gravitačním poli při přechodu od nižší kruhové oběžné dráhy k vyšší je elipsa, která se dotýká obou kružnic v afelu a perihelu a jejíž ohnisko je ve středu centrálního tělesa. Toto tvrzení se nyní pokusíme dokázat. Nejprve jsem si myslel, že bude nutné úlohu převést na složitý variační problém, potom jsem si ale uvědomil, že lze důkaz vést takto:

- Vytvoříme dolní odhad energetické spotřeby.
- Dokážeme, že výše popsaná trajektorie má stejnou spotřebu energie jako dolní odhad (a tedy neexistuje výhodnější).

Odhad energetické spotřeby

Dolní odhad je rozdíl energií na vnitřní a vnější kruhové dráze. Protože trajektorie je spojitá a gravitační pole je konzervativní, nemůže být energie zřejmě nižší. Celková energie je součtem kinetické a potenciální energie.

$$E_{\min} = E_{k2} + E_p - E_{k1},$$

kde E_{k1} je kinetická energie na nižší dráze, E_p je potenciálový rozdíl mezi nižší a vyšší dráhou a E_{k2} je kinetická energie na vyšší dráze. Oběžná rychlost po kruhové dráze je podle známého vzorce $v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}}$, kde κ je gravitační konstanta, M hmotnost centrálního tělesa a r poloměr dráhy. Proto je:

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m \frac{\kappa M}{r_1};$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m \frac{\kappa M}{r_2},$$

kde m je hmotnost rakety, r_1, r_2 jsou po řadě poloměry menší a větší kruhové dráhy.

Potenciální energie je integrál gravitační síly, tedy:

$$E_p = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\kappa m M}{r^2} dr = \kappa m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Nejmenší možné energetické náklady tedy jsou $E_{\min} = \frac{1}{2}\kappa m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

Důkaz nejvýhodnější trajektorie

Ted dokážeme, že uvedená trajektorie má stejnou energetickou spotřebu.

Podle předpokladu je trajektorie elipsa s ohniskem ve středu centrálního tělesa. Po této trajektorii se těleso pohybuje samovolně (podle Keplerových zákonů), jediná energetická spotřeba tedy je při okamžitém urychlení rakety na takovou rychlost, aby se po této trajektorii pohybovalo, a poté při okamžitém zpomalení v afelu, aby raketa zaujala kruhovou dráhu.

S použitím naší trajektorie tedy spotřebujeme energii $E = \frac{1}{2}m(v_p^2 - v_{k1}^2 + v_{k2}^2 - v_a^2)$, přičemž nemusíme složitě počítat perihelovou a afelovou rychlost, protože $\frac{1}{2}m(v_p^2 - v_a^2) = E_p = \kappa mM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$, což plyne z faktu, že je gravitační pole konzervativní (tj. součet energie kinetické a potenciální zůstává konstantní). Tedy $E = \frac{1}{2}m(v_{k2}^2 - v_{k1}^2) + E_p$, což převedeme na:

$$E = E_{k2} + E_p - E_{k1}, \quad \text{tedy} \quad E = E_{\min} = \frac{1}{2}\kappa mM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Dokázali jsme, že energie zadané trajektorie je minimální.

Súhrn myšlienok zvyšných budúcich Martňanov

Bc.^{MM} Jozef Cmar nám poslal návrh, ako dostať veľké množstvá materiálu na obežnú dráhu. Podľa neho je možné použiť obrovské superdelo, ktoré by dokázalo na obežnú dráhu vyniesť aj niekoľko ton.

Bc.^{MM} Karla Procházková nám poslala návrh, že pri brzdení by bolo dobré využiť brzdenie o atmosféru – *aerobraking*, ušetrili by sme palivo. Rovnako upozornila na skutočnosť, že po pristáti sa nájdu ľudia, ktorí budú chcieť drancovať Mars rovnako ako kedysi Zem.

Bc.^{MM} Petra Malá sa domnieva, že na ochladzovanie kozmickej lodi bude treba použiť hydraulický systém (kvapalina sa na osvetlenej strane zohrieva a na protíľahlej ochladzuje). Rovnako doporučuje elektrickú energiu vyrábať z fotoelektrických článkov, ktorým sa pre toto použitie hovorí solárne. Z 1 m² plochy získame asi 100 W.

Bzučo

Téma 2 – Tetris

Pozn. red.: Prišlo nám niekoľik riešení venovaných tvorění tetrisových dílků z nečtverečků, tj. rovnostranných trojúhelníků a šestiúhelníků a také třírozměrných dílků z krychlíček. Obzvláště dvě autorky nás zahltily záplavou tetrisových kostiček. Byly to *Mgr.^{MM} Lenka Studničná* a zejména *Dr.^{MM} Zuzka Rozlůvková*. Následující řádky jsou tvořeny výtahem z prací obou autorek. Zároveň se omlouváme, že jsme všechny kostičky vzhledem k rozsahu časopisu otisknout nemohli.

Dílky z jednoho, dvou, tří a čtyř rovnostranných trojúhelníků (obarvení kostiček odpovídá tomu, že dotyk hranou je a dotyk vrcholem není považován za dotyk) jsou na obrázku 1.

Pozn. red.: U dílků složených z trojúhelníků narážíme na něco, s čím jsme se u kostiček složených z čtverců nesetkali: existují „lineární“² kostičky, ze kterých lze otočením v prostoru vyšší dimenze získat kostičku jinou. Dokázali byste najít pravidlo, které by nám řeklo, kdy tímto postupem můžeme získat další kostičku a kdy to možné není (libovolným otočením v prostoru vyšší dimenze dostaneme kostičku stejnou, nanejvýš pootočenou)? A jak to bude u kostiček „nelineárních“?

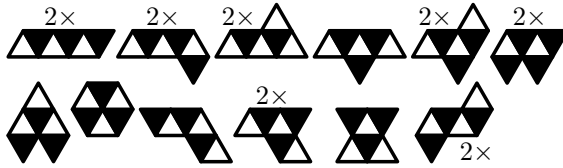


Obr. 1



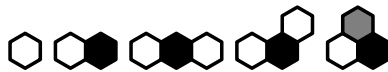
Obr. 2

Dílky z pěti rovnostranných trojúhelníků vidíte na obrázku 2 a dílky z šesti rovnostranných trojúhelníků pak na obrázku 3.



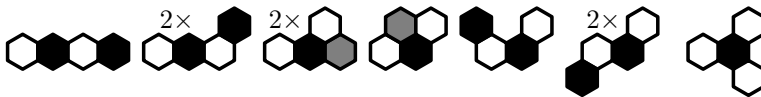
Obr. 3

Dílky z jednoho, dvou a tří pravidelných šestiúhelníků (všimněte si, že na některé kostičky stačí dvě barvy, na některé je třeba barev tří):



Obr. 4

Dílky ze čtyř šestiúhelníků:

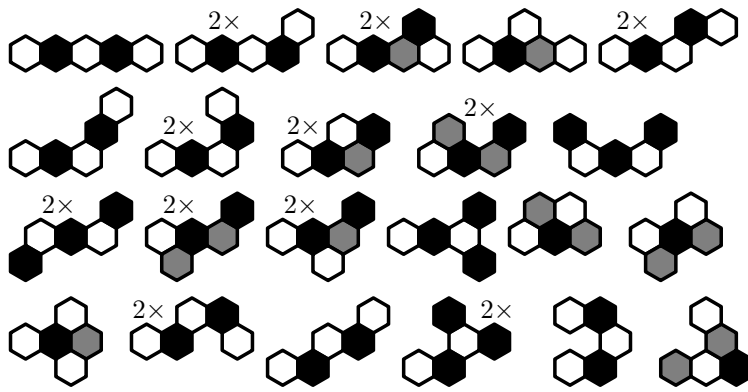


Obr. 5

Na obrázku 6 vidíte dílky z pěti šestiúhelníků.

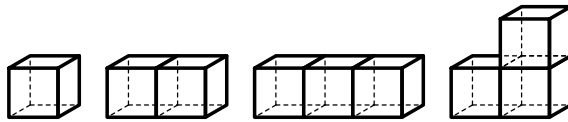
Pozn. red.: Dílky z šesti šestiúhelníků pro nedostatek místa bohužel neotiskujeme.

² Tj. takové, které vzniknou pouhým narovnáním všech dílků vedle sebe, jinak řečeno mají minimální „výšku“ a maximální „délku“, například první, druhá a čtvrtá kostička na obr. 1 a první kostička na obr. 2.



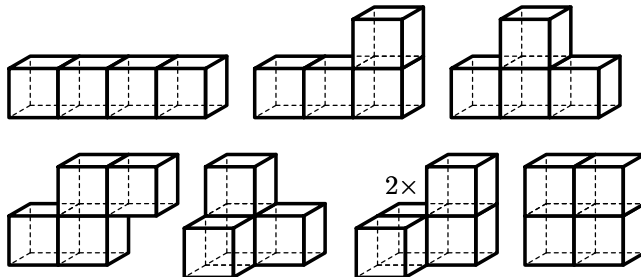
Obr. 6

Dílky z jedné, dvou a tří krychliček:



Obr. 7

Dílky ze čtyř krychliček:



Obr. 8

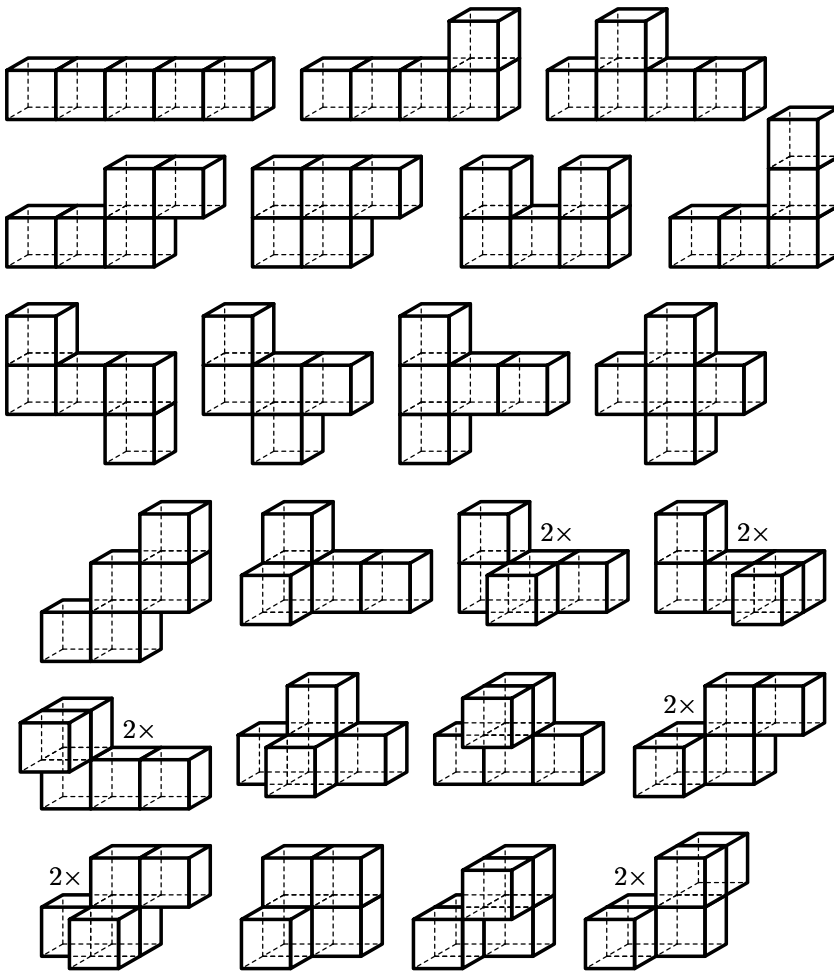
Dílky z pěti krychliček jsou na obrázku 9.

Pozn. red.: Dílky z šesti krychliček pro nedostatek místa bohužel neotiskujeme.

Jak správně poznamenaly Mgr.^{MM} Tereza Klimošová a Dr.^{MM} Zuzka Rozlůvková, jinými pravidelnými mnohoúhelníky nelze vyplnit rovinu, tedy ostatní mnohoúhelníky se na tetrisové kostičky moc nehodí. Jaká je však situace v prostoru, existují i jiná platónská tělesa než krychle, kterými lze vyplnit prostor?

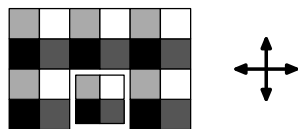
Diskusi na téma, kolik barev je potřeba na obarvení kostiček, aby každé dva sousední dílky měly různou barvu, se věnovaly všechny výše zmíněné autorky.

Máme-li čtvercovou síť (hóódně velký dílek), pak se v jednom průsečíku přímek, kterými je tvořena, dotýkají čtyři čtverečky. Pokud chceme, aby měly



Obr. 9

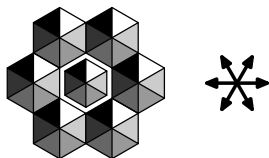
každé dva čtverce dotýkající se vrcholem jinou barvu, musíme použít nejméně čtyři barvy. Abychom zajistili, že se stejné čtverečky nebudou dotýkat nikde jinde, stačí neustále opakovat útvar vyznačený zmenšením ve směrech naznačených šipkami na obr. 10.



Obr. 10

Pokud bychom měli za základní tvar rovnostranný trojúhelník, bude potřeba šest barev, protože v jednom průsečíku trojúhelníkové sítě se dotýká šest

trojúhelníků:



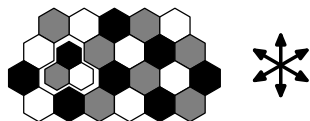
Obr. 11

Pokud bychom za sousedící považovali trojúhelníky se společnou stranou, opět bychom vystačili se dvěma barvami:



Obr. 12

Když si za základní tvar zvolíme pravidelný šestiúhelník, odpadne nám problém s rozlišováním sousedství vrcholem a stranou. Šestiúhelníky, které mají společný vrchol, mají i společnou stranu. V každém vrcholu se budou dotýkat tři šestiúhelníky, proto budou potřeba tři barvy:



Obr. 13

Pozn. red.: Problémem obarvování kostiček složených z krychliček se nikdo nezabýval. Zkuste se zamyslet nad potřebným počtem barev pro prostorové mnohostěny (minulá čísla našeho časopisu by vám mohla pomoci).

Hanss & Martin Krsek

Téma 3 – Fyzika a doprava

Do tohoto čísla nám přišel pouze příspěvek od *Bc.^{MM} Jozefa Cmara*. Poslal nám některá další fakta k různým konstrukčním řešením osobních automobilů. Redakce má k jeho článku jedinou výtku – chybí zde jak jakékoliv (fyzikální) zdůvodnění předkládaných tvrzení, tak i odkazy, odkud se tato tvrzení vzala.

Autor nám navíc napsal několik poznámek k tomu, co vyšlo ve třetím čísle. K umístění motoru dodává, že existovaly i staré škodovky, které měly motor vpředu (jsou to prakticky všechny modely starší než 1000 MB). Dále píše, že supersporty zmíněné v redakčních komentářích ke článku *Mgr.^{MM} Lenky Studničné* nemají správně řečeno motor vzadu, ale před zadní nápravou. Tento rozdíl je vysvětlen v následujícím článku.

Vliv poháněné nápravy a umístění motoru na jízdní vlastnosti osobních aut

Bc.^{MM} Jozef Cmar

U osobních aut máme 3 různé typy umístění motoru:

1. motor vpředu (nachází se u přední nápravy)
2. motor před zadní nápravou (motor se nachází přímo za sedadly)
3. motor vzadu (motor se nachází u zadní nápravy)

Ad 1. – motor vpředu a pohon předních kol. Toto řešení převažuje u automobilů s poměrně malým výkonem. Dá se říci, že převažuje u aut do výkonu 100 kW. Výjimečně se hodí a používá i u velkých a výkonných automobilů, např. Cadillac Toronto a Eldorado. Vozy s tímto uspořádáním bývají nedotáčivé, tzn. že v rychle projížděné zatáčce vůz nemá tendenci zatočit a snaží se pokračovat v přímé jízdě. Vozy s tímto uspořádáním mají také v rychle projížděné zatáčce sklon ke zvednutí vnitřního zadního kola, což se může stát příčinou havárie. Typickými představiteli jsou Škoda Felicia a Škoda Fabia, dále pak Volkswagen Golf či Fiat Punto.



Ad 1. – motor vpředu a pohon zadních kol.

Toto řešení převažuje u vozů se středním výkonem. Tomuto uspořádání se také říká klasické. Typickým představitelem je Ford Escort. Vozy s tímto uspořádáním bývají přetáčivé, tzn. že zadní náprava má sklon ke smyku. Toto se nám může stát osudným při výjezdu ze zatáčky, zvláště na mokru, když brzy přidáme plyn a zadní část se překývne na druhou stranu. Vlastnosti vozů s tímto uspořádáním lze dosti dobře upravit vhodným umístěním nákladu, kdy můžeme zadní nápravu zatížit více a tím zlepšit vlastnosti automobilu.

Ad 2. – motor před zadní nápravou. Toto řešení převažuje u vozidel s velkým výkonem. Patří sem novější vozy Lamborghini a také například Ferrari F50. Vozy s tímto uspořádáním jsou neutrální, což znamená, že nejsou ani nedotáčivé, ani přetáčivé. Tyto vozy mají perfektní ovládání. Všem těmto superlativům vždy odpovídá vysoká cena.³ Pro tyto vozy je také charakteristické rozdělení hmotnosti na nápravy v poměru 50 : 50,⁴ což jízdní vlastnosti ještě zlepšuje.

Ad 3. – motor vzadu. Toto se vyskytuje téměř výhradně ve spojení s pohonem zadních kol. Tyto vozy bývají přetáčivé nejvíce. Dlouho však zůstávají neutrální a smyk přichází skutečně náhle.⁵ Jakmile však smyk nastane, hrozí

³ Pozn. red.: Další nevýhodou tohoto uspořádání je zmenšení vnitřního prostoru vozu, takže je pro běžné automobily nevhodné.

⁴ Pozn. red.: To většinou není pravda – zadní náprava bývá zatížena více.

⁵ Pozn. red.: Je toto tvrzení pravdivé? A dokážete pro svůj názor najít nějaké zdůvodnění?

havárie, protože „těžký zadek“ nelze jen tak vrátit do původního směru. Typickými představiteli jsou vozy Škoda 100, 110 a 120.

Nyní bych se věnoval vozům s pohonem všech čtyř kol. Existují také vozy, které nemají stálý pohon všech kol a normálně nepoháněná náprava se přiřadí až po proklouznutí přední nápravy. Tyto vozy patří mezi bezpečné a to díky tomu, že i v dešti a na sněhu disponují dobrou ovladatelností. Většinou se vyskytuje pohon všech čtyř kol ve spojení s motorem umístěným vpředu. Existují však výjimky jako např. Lamborghini Murcielago, které má pohon všech kol a motor před zadní nápravou. Tento vůz je zejména na sněhu a v dešti zřejmě nejlépe ovladatelným vůbec.⁶

Komentáře redakce

V minulých číslech i v tomto článku je zmíněna přetáčivost a nedotáčivost automobilů při průjezdu zatáčkami a další jízdní vlastnosti v závislosti na konstrukčním řešení vozidla. Ovšem zatím nikdo neposlal přesvědčivé zdůvodnění, proč tomu tak je. Zkuste tedy vymyslet nějaký fyzikální model automobilu, který bude co nejjednodušší (aby s ním vůbec bylo možné počítat), ale zároveň dostatečně přesný, aby výsledky z něj získané odpovídaly realitě. Vymyslete několik základních charakteristik tohoto modelu (rozměry, poháněná náprava, rozložení hmotnosti) a zjistěte, jak na nich závisí jízdní vlastnosti. Můžete buďto přímo vyřešit některé jednoduché situace, nebo použít počítač.

Nejjednodušší představa je asi následující. Pokud auto nemá dělat smyky a podobné nežádoucí věci, musí se pohybovat po oblouku kružnice s poloměrem daným zatočením kol. Tím je hotova kinematická stránka problému a víme, jak se auto má pohybovat.

Druhou stránkou je dynamická část – tedy působící síly. Ve zjednodušeném případě můžeme automobil považovat za tuhé těleso (zanedbat např. posun těžiště vlivem odpružení kol), a působící síly se pak redukují na síly působící na jednotlivých kolech a na odpor vzduchu. Tyto síly se dají složit do jedné výsledné translační síly a jednoho momentu síly. Podle impulsových rovnic pak můžeme určit, jaký efekt budou mít tyto síly na pohyb automobilu.

Pokud se na problém podíváme opačně (tj. začneme od toho, že víme, jak se má auto pohybovat), můžeme zpětně určit jednotlivé potřebné síly a pak např. ověřit, že poměr mezi horizontální třecí silou a vertikální složkou tíhy je u každého kola menší než koeficient smykového tření. V opačném případě by se kolo odtrhlo od vozovky a vůz by se dostal do smyku.



⁶ Pozn. red.: Ovšem je otázkou, nakolik jsou těmito podmínkám přizpůsobeny například pneumatiky. Nesmíme zapomínat, že tento vůz je konstruován pro jízdu po kvalitní silnici a ne v terénu.

Nákladní automobily

Bc.^M Jozef Cmar

Rád bych se věnoval nákladním autům. Na světě existují 2 základní typy: v Americe a v Austrálii to jsou tahače, které mají „nos“, ve kterém je ukryt motor. Druhým, pro nás známějším, je tahač evropského typu, kde je motor pod kabinou řidiče.

Americký typ s nosem

Výhody umístění motoru jsou zřejmé – řidič má pro sebe několikanásobně větší prostor. Další výhodou je to, že se v případě, kdy se potřebujeme dostat k motoru, nesklápí celá kabina, ale pouze nos. Nevýhod je více – především větší rozměry vozu, který je až o tři metry delší než evropský typ. Dále pak větší vzdálenost mezi motorem a nápravami a z toho plynoucí složitosti. Poslední je také nepoměrně horší manévrovatelnost. Všechny tyto problémy však řeší Amerika i Austrálie po svém. Všude v těchto zemích máte dost místa na otočení a také zatáčky jsou všeobecně táhlejší. Je tu také rozdíl z hlediska předpisů – v Americe a v Austrálii je předepsána pouze délka návěsu a je jedno, zda je tahač dlouhý 5 nebo 10 metrů. Naproti tomu v Evropě je dána celková délka soupravy. Kromě toho však v USA a v Austrálii můžete za tahač přívěsů zapojit více, takže převezou najednou klidně třikrát tolik co evropské.

Evropský typ

Hlavní výhodou evropského typu tahače je, že má celkově malé rozměry a z toho plynoucí nízkou hmotnost. Nevýhodou je však špatná přístupnost motoru a také velmi stísněný prostor pro řidiče. Důležité jsou také evropské podmínky – všude je málo místa a dopravci se snaží převážet co největší objem nákladu. Z hlediska jízdních vlastností je na tom lépe evropský typ, který má (bez návěsu) výrazně lepší rozložení hmotnosti.

Konstrukce obou typů je velmi pokročilá. Oba typy se vyvíjely podle podmínek, které měly.

Marble

Řešení úloh

Úloha 3.1 – Kouzelné sklíčko (5b)

Zadání:

Máme kouzelné (špinavé?) sklíčko, které třetinu na něj dopadajícího světla propustí dál, třetinu odrazí zpět a třetinu pohltí. Jaká část původní intenzity projde skrz dvě takováto sklíčka postavená rovnoběžně za sebou, když na ně posvítíme kolmým paprskem? Jaká část se odrazí zpět?

Jak bude situace vypadat, když za sebou budou postaveny tři nebo čtyři sklíčka? A co když jich bude obecně n ?

Řešení:

Poznámka: Redakce se omlouvá za zmatení pojmů „zrcátko“ a „sklíčko“. Sklíčko bylo zvoleno jako výstižnější, ovšem v některých zadáních zůstalo původní označení „zrcátko“. V následujícím textu jsou tyto dva pojmy zcela ekvivalentní.

Kouzelná zrcadla se zřejmě staly velmi oblíbeným problémem, soudě alespoň podle počtu řešení. Bylo potěšením číst všechna ta řešení, protože se mezi nimi vyskytovalo velké množství zajímavých nápadů. Byla by škoda ukázat jen jeden způsob řešení, takže zkusím ukázat několik vašich přístupů k věci.

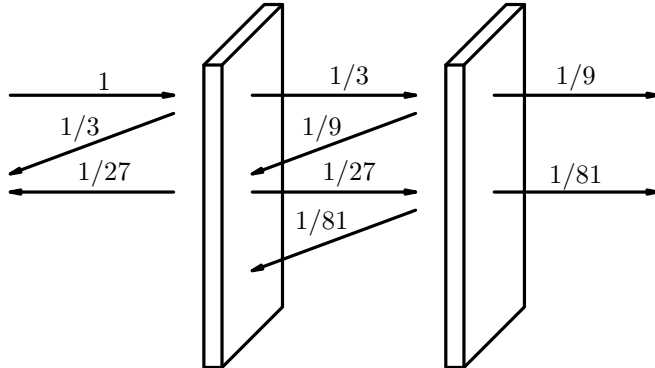
Nejdříve si pro přehlednost zavedeme značení: p_n je část světla, kterou propustí n zrcadel, o_n značí odraženou část světla. Dále budu počítat s tím, že ze zdroje dopadá na povrch prvního zrcadla intenzita světla rovna 1 – tím si zjednoduším zápis.

Pro jedno zrcadlo je výpočet jednoduchý. Už v zadání je řečeno, že jedno zrcadlo propustí $\frac{1}{3}$ světla, $\frac{1}{3}$ světla odrazí a $\frac{1}{3}$ pohltí, tj.

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad o_1 = \frac{1}{3}.$$

U dvou zrcadel je už třeba trochu zapřemýšlet. Zkusme nejdříve najít vztah pro prošlé světlo. Prvním zrcadlem projde $\frac{1}{3}$ světla k druhému a přes něj přejde $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Stejně množství ($\frac{1}{9}$) se od druhého zrcadla odrazí zpět. Tady však výpočet nekončí. Světlo odražené od druhého zrcadla zpět se z jedné třetiny odrazí zase na druhé zrcadlo a z jedné třetiny projde před obě zrcadla, tj. musíme přičíst $\frac{1}{81}$. Tak bychom mohli pokračovat ještě mnoho stránek, pokud si nevšimneme, že další prošlé paprsky budou slabší a slabší o stále tentýž koeficient – odrazem na prvním zrcadle a průchodem druhým zrcadlem se každý další paprsek zeslabí na $\frac{1}{9}$ předchozího.

Nezbývá než dát za pravdu *Dr.^{MM} Lukáši Chvátalovi*, že „jeden obrázek hovoří jasněji než slova“.



Obr. 1

Celkovou intenzitu prošlého světla vypočítáme jako součet nekonečné řady, tedy

$$p_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots = \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{9})} = \frac{1}{8}.$$

U odraženého světla postupujeme úplně stejně. První odražený paprsek bude mít třetinovou intenzitu, další odražené paprsky budou mít vždy devětinu intenzity předchozího, takže opět musíme počítat nekonečnou řadu

$$\begin{aligned} o_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{9})} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

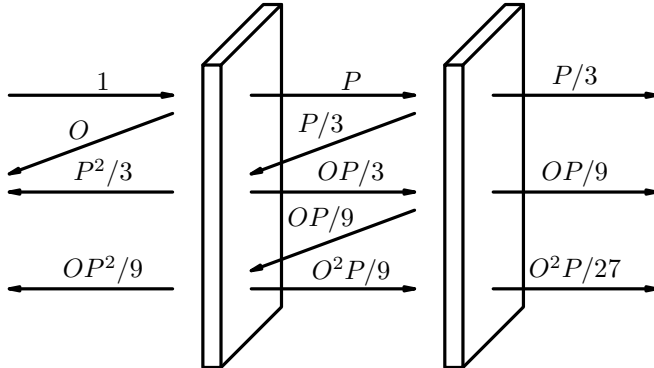
Abychom to shrnuli:

$$p_2 = \frac{1}{8}, \quad o_2 = \frac{3}{8}.$$

Pokud bychom chtěli postupovat dál a počítat problém 3 zrcadel, můžeme si situaci zjednodušit – dvě kouzelná zrcadla nahradíme jedním ještě kouzelnějším, které $\frac{1}{8}$ světla propustí, $\frac{3}{8}$ světla odrazí a $\frac{1}{2}$ světla pohltí. Výpočet se nám tím vlastně zredukuje na problém dvou zrcadel, které ale budou mít různé vlastnosti.

Teď už lze vytušit, že problém n zrcadel lze vždy změnit na problém $n - 1$ zrcadel, resp. po $n - 1$ zjednodušeních na problém dvou zrcadel. První bude zastupovat soustavu $n - 1$ zrcadel a bude mít odrazivost o_{n-1} a propustnost p_{n-1} , druhé bude klasické s třetinovou odrazivostí i propustností.

Zkusíme si opět nakreslit obrázek a pro přehlednost budu u „superkouzelného“ zrcadla značit odrazivost O místo o_{n-1} a propustnost P místo p_{n-1} .



Obr. 2

Začneme zase u počítání prošlého světla. Jak je vidno z obrázku 2, první paprsek bude mít intenzitu $P/3$. Každý další paprsek bude mít $O/3$ intenzity předchozího – O kvůli odrazu na prvním zrcadle a $1/3$ kvůli průchodu druhým. Takže zase půjde o sčítání nekonečné řady:

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{P}{3} + \frac{P}{3} \cdot \frac{O}{3} + \frac{P}{3} \cdot \left(\frac{O}{3}\right)^2 + \dots = \frac{P}{3} \left(1 + \frac{O}{3} + \left(\frac{O}{3}\right)^2 + \dots\right) = \\ &= \frac{P}{3} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{O}{3})} = \frac{P}{(3 - O)}. \end{aligned}$$

Teď ještě musíme určit odražené světlo. První odražený paprsek má intenzitu O . Protože však nepočítáme dvě stejná zrcadla, první paprsek nebude tentokrát prvním členem nekonečné řady. Musíme začít až u druhého paprsku. Ten má intenzitu $P^2/3$. Každý další paprsek bude mít $O/3$ intenzity předcházejícího – koeficient O kvůli odrazu na prvním zrcadle a koeficient $1/3$ kvůli odrazu na druhém.

Platí tedy

$$\begin{aligned} o_n &= O + \frac{P^2}{3} + \frac{P^2}{3} \cdot \frac{O}{3} + \frac{P^2}{3} \cdot \left(\frac{O}{3}\right)^2 + \dots = \\ &= O + \frac{P^2}{3} \left(1 + \frac{O}{3} + \left(\frac{O}{3}\right)^2 + \dots\right) = \\ &= O + \frac{P^2}{3} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{O}{3})} = O + \frac{P^2}{3 - O}. \end{aligned}$$

Tyto vzorce lze přepsat do rekurentního tvaru, neboť víme, že $O = o_{n-1}$ a $P = p_{n-1}$:

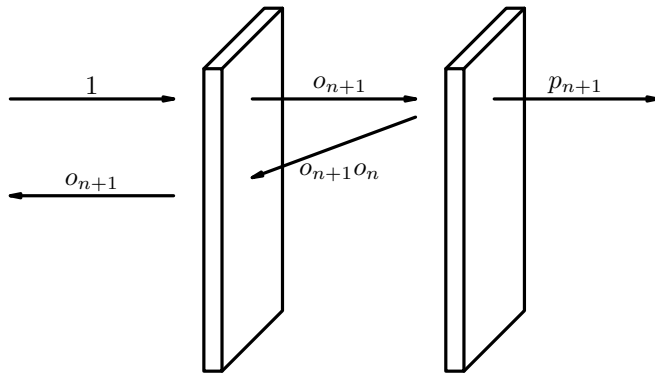
$$p_n = \frac{p_{n-1}}{3 - o_{n-1}}, \quad o_n = o_{n-1} + \frac{p_{n-1}^2}{3 - o_{n-1}}.$$

Tímto tedy máme dány rekurentní vzorce pro p_n a o_n . Můžeme si je zkusit ověřit pro výpočet vlastností dvou zrcadel protože známe p_1 a o_1 :

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{p_1}{3 - o_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{8}, \\ o_2 &= o_1 + \frac{p_1^2}{3 - o_1} = \frac{1}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^2}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Slíbil jsem ale ještě jiné přístupy, tady jsou: Budeme využívat stejný trik jako v prvním řešení, tj. problém s $n + 1$ zrcadly budeme počítat jako problém dvou zrcadel, kde jedno ze zrcadel bude zastupovat známé vlastnosti n zrcadel.

Označené paprsky na obrázku 3 jsou výsledné celkové intenzity, které v daném směru půjdou, tj. například p_{n+1} je celková intenzita světla, která projde $n + 1$ zrcadly.



Obr. 3

Ujasněme si, co všechno víme o zrcadlech:

- 1) Paprsek, který projde levým kouzelným zrcadlem má stejnou intenzitu jako paprsek, který se odrazí. Proto (viz obrázek) má celkový paprsek směřující od levého k pravému zrcadlu stejnou intenzitu jako celkově odražená intenzita světla o_{n+1} .
- 2) Výsledná intenzita jdoucí od prvního (levého) zrcadla libovolným směrem (tj. která se odrazí nebo projde) je vždy rovna $\frac{1}{3}$ součtu všech paprsků dopadajících na toto zrcadlo (zrcadlo vždy $\frac{1}{3}$ propustí i odrazí). Neboli: $o_{n+1} = (1 + o_{n+1}o_n)/3$.
- 3) Pravé zrcadlo (zastupující n zrcadel) má propustnost p_n a dopadá na něj intenzita o_{n+1} : $p_{n+1} = o_{n+1}p_n$.

Když tyto rovnice vyřešíme, zjistíme, že

$$o_{n+1} = \frac{1}{3 - o_n}, \quad p_{n+1} = p_n o_{n+1}.$$

Jak jste si asi všimli, dostali jsme tímto způsobem jiný rekurentní předpis, který nám ale dává stejné výsledky. A hlavně tyto výsledky získáváme bez potřeby počítat nekonečné řady.



Můžeme se ptát, co by se stalo, kdybychom dali za sebe nekonečný počet zrcadel. Výpočtem limity bychom dostali

$$o_{\infty} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad p_{\infty} = 0.$$

Další řešení už neuvedu, ačkoli je třeba říct, že se našlo ještě několik jiných způsobů, jak ke správnému výsledku dojít – od uhodnutí řešení z výsledků pro několik zrcadel *Dr.^{MM} Zuzkou Rozlúvkovou* až po velmi rychlé (a zároveň velmi složité) řešení *Mgr.^{MM} Jana Olšiny*, který se jako jediný pokoušel najít explicitní vyjádření propustnosti n -tého zrcadla.

A to je vše, přátelé.

Charlie

Úloha 3.2 – Já, robot (6b)

Zadání:

Možná někteří z vás znají Isaaca Asimova. Byl to jeden ze zakladatelů sci-fi jako takové. V jedné své povídce chtěl najít zlobivého robota, který se mu schoval mezi ostatní. Pokoušel se o to různými způsoby. Například nechal na hlavní hrdinku – doktorku Susan Clainovou – padat veliký kvádr, jenž byl v poslední chvíli odstrčen světelným (gama) paprskem. Mezi roboty a doktorku Clainovou umístil pole, které by roboty zničilo, kdyby do něj vešli. Předpokládal, že hledaný robot se, na rozdíl od ostatních, nepohne doktorku zachránit. O tom, že robot přesvědčil ostatní, aby se také nepohnuli, nebudeme psát. Jak robota nakonec našel, se můžete dočíst ve sbírce povídek Já, robot.

Nám jde ale o to, odhadnout parametry takového světelného paprsku – laseru. Pro jednoduchost uvažujme případ, kdy má paprsek takový výkon, aby kompenzoval tíhovou sílu působící na kvádr.

Odhadněte, jaký výkon by to musel být. Co se bude dít s kvádrem, když na něj bude tento paprsek působit?

Jestliže se vám zdá příklad těžký, použijte při odhadu namísto světla proud vody.

Řešení:

Na kvádr nám budou působit dvě síly: tiažová F_g a síla tlaku žiarenia F_z . Pre tiažovú silu platí

$$F_g = mg = Sh\rho g, \quad (1)$$

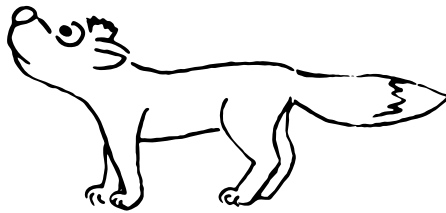
kde ρ je hustota kvádra, h jeho výška a S plocha podstavy. Rovnako predpokladajme, že na kvádr pôsobí laserový lúč a nie gama lúč. Zatiaľ čo vo viditeľnom svetle existuje veľa látok s vysokou odrazivosťou, v gama oblasti nieje žiadna.

Odrzivost'

Odrzivost' je miera schopnosti telesa odrážať dopadnuté žiarenie. Teleso, ktoré všetku energiu pohltí, má odrzivost' nula. Ak všetku energiu odrazí, má odrzivost' naopak jedna. Žiadna látka nemôže mať odrzivost' vyššiu ako jedna, pretože to by znamenalo, že odráža viacej svetla, ako na ňu dopadá. Obyčajné látky majú odrzivost' vysoko zvyčajne desiatky percent. Čierne uhlie a sadze okolo 3 až 7%. Čím viacej povrch látky vyleštíme, tým vyššia bude odrzivost'.

Vyleštené kovy majú veľkú odrazivosť v infračervenej (IR) oblasti, v optickej oblasti už menšiu. Napríklad zlato dosahuje viacej ako 98 %. Striebro má v širokom rozmedzí viditeľného spektra odrazivosť viac ako 96 %. Spomenutý wolfrám naopak iba niečo menej ako 65 %. Vyššiu odrazivosť dosahujú zliatiny, bežne nad 99 %. U nich rovnako platí, že najlepšie výsledky majú v IR oblasti. Príkladom priemyselne vyrábanej zliatiny s odrazivosťou väčšou ako 99 % môže byť *Double YAG-H*, ktorá je schopná pracovať s výkonom 500 W/cm^2 .

Najkvalitnejšie (ale zároveň najdrahšie) priemyselne vyrábané sú dielektrické zrkadlá. Ich odrazivosť je extrémne vysoká na konkrétnej vlnovej dĺžke, mimo nej veľmi rýchlo klesá. Odrazivosť niektorých zrkadiel (udávaná výrobcom) je vyššia ako 99,97 %. Sú určené na ultrakrátke pulzy, pretože vďaka svojim slabým tepelným vlastnostiam nie sú schopné pracovať s vysokým tepelným výkonom. Sú citlivé na akékoľvek čiastočky špiny, jedno zrnko prachu ich môže vážne poškodiť až úplne zničiť.



Sila tlaku žiarenia

Pre silu žiarenia môžeme podľa impulzovej vety písať

$$F_z = \frac{\Delta p}{\Delta t}, \quad (2)$$

kde Δp je hybnosť, ktorú predajú fotóny kvádru za čas Δt . Vieme, že pre hybnosť fotónu platí $E = pc$, kde E je jeho energia a c rýchlosť svetla. Potom

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc, \quad \text{teda} \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}. \quad (3)$$

Planckovu konštantu $6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ značíme h , rýchlosť svetla $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}$ zase c , ako ste si už všimli. Niektoré fotóny na kváder dopadnú a absorbujú sa. Tieto odovzdajú kvádru hybnosť p . Tie, ktoré sa od kvádra odrazia, mu odovzdajú hybnosť $2p$. Je to spôsobené skutočnosťou, že v prvom prípade sa hybnosť fotonu zmenila z p na nulu a v druhom prípade na $-p$ (vektor hybnosti bude po odraze opačne orientovaný). Nech ďalej ϵ je odrazivosť povrchu.

Pre celkovú hybnosť, ktorú odovzdajú fotóny kvádru, platí

$$\Delta p = (1 + \epsilon) \frac{h}{\lambda} \Delta N, \quad (4)$$

kde ΔN je počet fotónov dopadnutých na povrch kvádra za čas Δt . Do tejto rovnice dosadíme z rovníc (2) a (3):

$$F_z = \frac{\Delta p}{\Delta t} = (1 + \epsilon) \frac{h}{\lambda} \frac{\Delta N}{\Delta t} = (1 + \epsilon) \frac{\Delta E}{\Delta t} \cdot \frac{1}{c} = (1 + \epsilon) \frac{P}{c}. \quad (5)$$

Kváder a rovnovážna poloha

Na základe rovníc (1) a (5) dostaneme pre rovnováhu kvádra rovnicu

$$(1 + \epsilon) \frac{P}{c} = Sh_{\rho g}. \quad (6)$$

Kváder časť tejto energie absorbuje. Množstvo absorbovanej energie bude $P(1 - \epsilon)\Delta t$, P v našom prípade označuje dopadajúci výkon. Neskôr uvažíme, či táto energia roztopí alebo neroztopí kváder. Najskôr si spočítame hrúbku kvádra, ktorý bude v tepelnej rovnováhe.

V okamihu rovnováhy bude platiť, že energia prijatá od laserového lúča sa celá vyžiari vo forme žiarenia. Pre jednoduchosť predpokladajme, že vrchná stena kvádra (naproti stene, na ktorú dopadá laserový lúč) nevyžaruje žiadne žiarenie. Pre spodnú stenu potom platí

$$P(1 - \epsilon) = S\sigma(T^4 - T_0^4). \quad (7)$$

Kombináciou rovníc (6) a (7) dostaneme

$$\frac{h_{\rho g c}}{\sigma} \cdot \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} = T^4 - T_0^4. \quad (8)$$

Nanesieme na povrch kvádra tenúčku vrstvy odrazivého materiálu s odrazivosťou $\epsilon = 0,998$. Ak berieme hustotu materiálu $\rho(\text{Cu}) = 8\,900 \text{ kg/m}^3$ a teplotu topenia materiálu zhruba $1\,800 \text{ }^\circ\text{C}$ (meď), pre hrúbku kvádra dostaneme zhruba $100 \mu\text{m}$. Tiažové zrýchlenie sme položili rovné $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Ak zoberieme do úvahy wolfrám, ktorý má zo všetkých kovov najvyššiu teplotu topenia $3\,410 \text{ }^\circ\text{C}$, pre hrúbku dostaneme 2 mm ($\rho(\text{W}) = 19\,300 \text{ kg/m}^3$). Ak akceptujeme nižšie tiažové zrýchlenie na kozmickej stanici a vyššiu odrazivú schopnosť, hrúbka „kvádra“ by nebola viac ako niekoľko milimetrov až centimetrov. Dovolím si v tomto prípade premenovať kváder na plechový plát.

Použijeme už spomenutý materiál *Double YAG-H*, ktorého odrazivosť položíme rovnú $99,5\%$. Z rovnice (7) určíme minimálnu teplotu, ktorú musí byť materiál schopný vydržať: 810 K . Z rovnice (6) dostaneme

$$h = \frac{P}{S} \cdot \frac{1 + \epsilon}{\rho g c}. \quad (9)$$

Ak použijeme hliník, pre hrúbku kvádra dostaneme $10 \mu\text{m}$.

Počiatočné okamihy zohrievania telesa

Vidíme teda, že nie je možno udržať kváder v rovnovážnej polohe dlhšiu dobu. Pozrime sa preto na tepelnú bilanciu telesa.

Toto bude prijímanú energiu transformovať do žiarenia, zohrievania materiálu a vedenia tepla v ňom. (Vedenie tepla do okolia zanedbáme.) Samozrejme, iba prvá položka je stála, zvyšné dve budú po dosiahnutí rovnováhy nulové.

Úloha by sa dala pomocou diferenciálnych rovníc riešiť presne, ukážeme si len odhad tohto riešenia. Budeme riešiť tento problém pre tri kovy – hliník, meď a wolfrám.

Odhadnime najprv, za aký čas sa nám kváder zohreje na teplotu topenia. Najprv uvažujme, že všetko dodané teplo sa zmení na vnútornú energiu telesa. V modeli nepredpokladáme, že by sa kváder začal topiť.

Podľa kalorimetrickej rovnice

$$P(1 + \epsilon)\Delta t = mc_v\Delta T \quad (9.1)$$

Ak do tejto rovnice dosadíme rovnicu (6), dostaneme

$$\Delta t = \frac{c_v\Delta T}{gc} \cdot \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \quad (9.2)$$

Uvážme, že sme zohrievali kváder z teploty 20 °C na teplotu topenia prvkov. Hliník by sa začal topiť za pol sekundy, meď za sekundu a wolfrám za dve. Ak uvažíme vyžarovanie, čas by sa o niečo predĺžil. Svoju úlohu tu bude hrať aj tepelná vodivosť. Aby na doktorku Clainovú pršal roztavený hliník, to nie je príjemná predstava.

prvok		Al	Cu	W
teplota topenia	[°C]	660	1080	3410
tepelná vodivosť	[W/m · K]	220	390	170
tepelná kapacita	[J/kg · K]	920	390	130

Aký ťažký kváder vlastne potrebujeme?

Na to, aby kváder zabil doktorku, mu stačí energia niekoľko sto joulov. Nech by na ňu padal z výšky 20 metrov a mal hmotnosť 50 kg. Pri tiažovom zrýchlení 1 m/s² by pri dopade mal energiu 1 kJ a padal by o niečo viac ako 6 sekúnd. Stačilo by zrejme, aby dopadol dva metre od doktorky. Podľa rovnice (5) pre výkon laseru dostaneme

$$P = \frac{mgc}{1 + \epsilon} \approx 5 \text{ GW}.$$

Takýmto výkonom nedisponuje žiaden súčasný rozumný laser po dostatočne dlhú dobu.

Prúd vody

Podľa rovnice (2) spočítajme silu vody pôsobiacu na kváder. Predpokladajme, že prúd vody sa odráža naspäť od kvádra:

$$F_v = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2\Delta(mv)}{\Delta t} = 2Q_v\rho v. \quad (10)$$

Ak dáme do rovnosti rovnice (1) a (10), dostaneme

$$Q_v = \frac{mg}{2\rho v} \approx 11/\text{s},$$

kde rychlost vody sme si zvolili 25 m/s. Tiažové zrýchlenie a hmotnosť kvádra sme brali z predchádzajúcich odhadov.

Jeden liter za sekundu nie je mnoho, asi by bolo lepšie použiť vodné delo namiesto svetelného. Ale v budúcnosti budeme mať určite lepšiu technológiu. :-)

Bzučo

Úloha 3.3 – Šachovnice (5b)

Zadání:

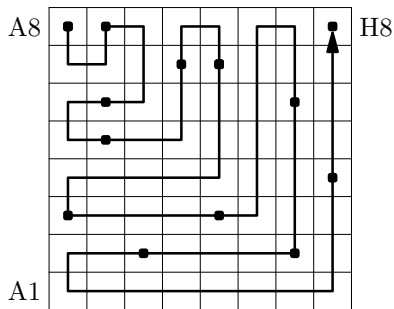
Na pole A8 šachovnice položte krychličku, která má stěnu stejně velkou jako jedno pole. Horní stěnu krychličky barevně označte. Vaším úkolem je přetáčet krychličku přes hranu z pole na pole, projít tak celou šachovnicí (na každém poli musí být krychlička právě jednou) a skončit na poli H8. Na konci musí mít barevné označení opět nahore.

Teď položte krychličku na libovolné pole šachovnice, stejným způsobem ji přetácejte po všech polích (tedy tak, aby na každém byla jen jednou) a skončete na výchozím poli. Přitom krychlička nesmí mít označenou stěnu nahore na žádném políčku mimo výchozího.

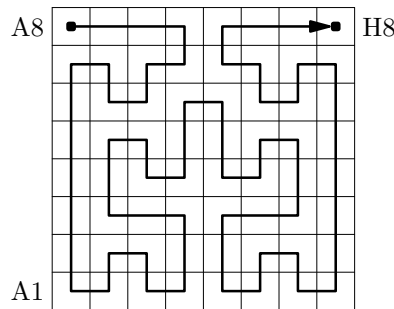
Zkuste určit, jestli v prvním a druhém případě existuje více cest a případně kolik.

Řešení:

Počet cest, jak dostat krychličku po šachovnici 8×8 z levého horního rohu do pravého horního rohu, aby se každé políčko navštívilo a na konci mělo stejnou stranu nahore, nespočetl nikdo, ale příklady některých takových cest zaslali *Bc.^{MM} Vladimír Vinařský*, *Mgr.^{MM} Lenka Studničná*, *Dr.^{MM} Lukáš Chvátal*, *Jan Rieger*, *Bc.^{MM} Karla Procházková*, *Dr.^{MM} Peter Bališ* a *Prof.^{MM} Martin Demín*.



Obr. 1



Obr. 2

Příklady takových cest jsou na obrázcích 1 a 2. Čtvereček označuje ta políčka, na kterých byla obarvená strana nahore.

Prof.^{MM} Martin Demín za pomoci počítače spočetl počet cest pro šachovnici 6×6 , na které chceme přesunout krychličku z A6 na F6, a zjistil, že takových cest (aby obarvená strana skončila nahoru) je 467.

Podobně se k problému postavil *Mgr.^{MM} Stanislav Basovník*, který také napsal program na prohledávání všech možných cest.

Třebaže úloha na první pohled nevypadá těžká, přesto se nám nepodařilo najít počet cest pomocí matematických úvah, a tak jsme podobně jako *Prof.^{MM} Martin Demín* použili počítač.

Počet cest na šachovnici 7×7 je 13 276 (když jdeme z políčka A7 na G7 a chceme, aby obarvená strana skončila nahoru) a pro šachovnici 8×8 , což bylo zadání úlohy, nám počítač našel dokonce 1 423 941 správných cest. Celkový počet cest z A8 na H8 takových, že každé políčko projdeme právě jednou (ale nemusí být na konci obarvená strana nahoru) je 8 934 929. Zajímavé je, že poměr těchto dvou posledních čísel je 6,275 což nemá daleko k šesti. Jelikož krychle má 6 stran, naznačuje to, že všech šest možností, jak krychle skončí, je přibližně stejně pravděpodobných. Zjistili jsme, že existují cesty, při kterých obarvená strana skončí „vpravo“, „vlevo“, „nahore“, „dole“, „vepředu“ nebo „vzadu“ a všechny se realizují přibližně stejně často.

Kdyby měl někdo zájem si tyto cesty prohlédnout, redakce je ochotna poskytnout asi 800 MB soubor, ve kterém jsou zapsány.

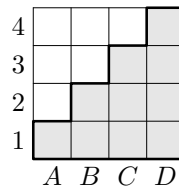
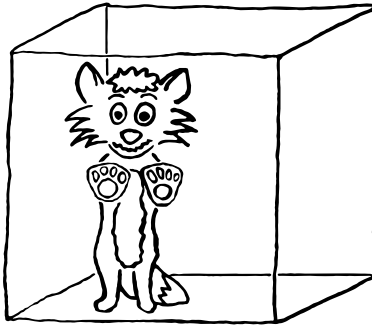
Ve druhé části úlohy máme najít cestu, po které se má krychle přetáčet, aby skončila na výchozím poli obarvenou stranou nahore, navíc s podmínkou, že tato strana *nebude nahore* během přetáčení nikde jinde.

Řešení této části úlohy poslali *Mgr.^{MM} Stanislav Basovník* a *Bc.^{MM} Vladimír Vinařský*.

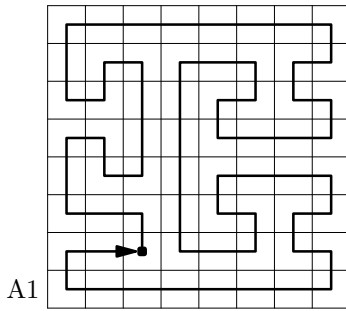
Oba dospěli k závěru (*Mgr.^{MM} Stanislav Basovník* to dokonce programoval), že libovolná cesta z nějakého políčka P je ekvivalentní nějaké cestě z bodu P' , kde P' vznikne z P rotací šachovnice o 90° , 180° , resp. 270° . Proto stačí prohledat cesty, ve kterých výchozí (a koncové) políčko je z jedné čtvrtiny šachovnice. Ale i tady jsou ještě některá políčka „ekvivalentní“, neboť libovolná cesta, která kupříkladu začíná na A2, se zrcadlením podle úhlopříčky A1–H8 promítne na cestu, která začíná (a končí) na B1. Není těžké si rozmyslet, že operace rotace cesty o násobek 90° nebo zrcadlení cesty podle úhlopříček nemění vlastnost, že obarvené políčko bude nahore jen na začátku a na konci cesty. Proto nám stačí najít cesty, které začínají na jednom z políček podle obrázku 3.

Samozřejmě, pokud najdeme nějakou cestu z políčka P , našli jsme hned i cestu obrácenou, která vznikne tak, že s kostkou pojedeme „zpátky“. Proto počet možných cest vycházejících z nějakého políčka musí být vždy sudý. *Mgr.^{MM} Stanislav Basovník* zjistil, že je jen jedno políčko (až na ekvivalenci ve smyslu zrcadlení a rotace), pro které je počet cest nenulový: je to políčko C2 a vycházejí z něho čtyři cesty, tj. dvě z nich vypadají různě když se nakreslí a další dvě vzniknou změnou směru. Jelikož políčko C2 je teď ekvivalentní s B3, B6, C7, F7, G6, G3, F2 a z každého vycházejí čtyři cesty, je jich dohromady $8 \times 4 = 32$. Z toho jsou ovšem jen dvě „skutečně různé“. Viz obrázky 4 a 5.

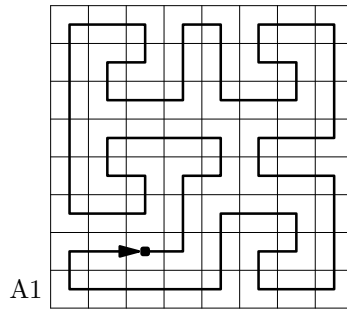
Tento příklad může sloužit jako demonstrace toho, že i velice lehké formulovatelný problém může být ve skutečnosti obtížný, nebo možná i neřešitelný.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Počítačové prohledávání by totiž nebylo možné pro větší šachovnice (9×9 nebo víc), protože možností by bylo „příliš mnoho“.

Peto & Ondra

Pořadí	Jméno	\sum_{-1}	Úlohy							\sum_0	\sum_1
			t1	t2	t3	t4	t5	r1	r2		
41.–43.	Monika Martinisková	3						1		1	3
	Jan Kaštil	3								0	3
	Pavla Grubhofferová	3								0	3
44.–46.	Richard Bobek	3							2	2	2
	Petra Guhlová	2								0	2
	Vendula Dvořáková	2								0	2
47.–53.	Mgr. ^M Zuzana Svobodová	29						0		0	1
	Mgr. ^M Jana Babováková	27								0	1
	Michal Rychnovský	5								0	1
	Michal Matějů	1					0	1		1	1
	Jan Vrba	1								0	1
	Michal Kočař	1								0	1
	Zuzana Míčová	1								0	1

Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235

E-mail: MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz>



Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory střeďočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.