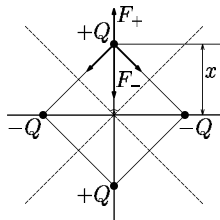


## Téma 1 – Elektron

Dr. Peter Čendula:

Niekoľkými slovami sa vrátim k minulým číslam M&amp;M.



V čísle 5 sa rozoberal prípad pádu náboja na uzemnenú rovinu. Platňa ho vo vzdialenosti  $x$  príťahuje silou

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot (2x)^2} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad (1)$$

pretože virtuálny náboj je od platne rovnako ďaleko ako reálny náboj. Z čísla 5 na základe analógie s Keplerovými zákonmi pre čas pádu  $z$  do 0 dostávame:

$$T = \pi \sqrt{\frac{d^3}{8\kappa M}}. \quad (2)$$

Na základe analógie  $\kappa M \rightarrow \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 m}$ , kde  $m$  je hmotnosť náboja  $Q$ , dostaneme pre čas pádu

$$T = \pi \sqrt{\frac{16\pi\epsilon_0 m d^3}{8Q^2}} = \frac{\sqrt{2\pi^3 d^3 \epsilon_0 m}}{Q}, \quad (3)$$

čo je výsledok pre  $\alpha \rightarrow \pi$ .

**Pozn. redakce:** Tento výsledok je správny, vzoreček (8) v čísle 5 je chybný v určení konstanty.

Zaujímá nás teraz, ako rozmiestniť virtuálne náboje tak, aby ekvipotenciálna plocha bola vždy zhodná s našimi platňami s nulovým potenciálom.

V minulom čísle *Doc. Michal Tarana* správne zistil, že ekvipotenciálne hladiny dvoch na seba kolmých platní možno vytvoriť pôsobením kvadrupólu. Je to možné preto, pretože akýkoľvek bod platní je rovnako vzdialený vždy od dvojice nábojov  $Q$  a  $-Q$ , teda vždy má nulový potenciál. Výsledná sila má tvar

$$F = -\underbrace{\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot (2x)^2}}_{F_+} + 2 \cdot \underbrace{\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (x\sqrt{2})^2}}_{F_-} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos \frac{\pi}{4}} \quad (4)$$

V případě, že náboje sa na platnách preskupujú dostatočne rýchlo v porovnaní s pohybom náboja  $Q$ , môžeme podobne ako v príspevku v čísle 5 určovať v každej polohe danej vzdialenosťou  $x$  od stredu dosiek virtuálne náboje. Ďalej analógiou s Keplerovými zákonmi podobne ako v čísle 5 dostaneme pre dobu pádu

$$T = \pi \sqrt{\frac{d^3}{\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right) \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m}}} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{8\pi^3 d^3 \epsilon_0 m}{2\sqrt{2}-1}}. \quad (5)$$

Konečne som pochopil, ako treba ukladať virtuálne náboje vo všeobecnom prípade, aby platne boli na ekv. ploche. Jediný spôsob, ako je niečo také možné dosiahnuť v každom bode platní, je ukladať náboje symetricky vzhľadom na platne v rovine náboja  $Q$ , aby sa každé dva potenciály vyrovnali. Nevieam, ako doviest túto teóriu do rozumnej formy. Bzučo

### Téma 3 – Gramatiky

Nejprve se vraťme k prvním úlohám z minulého čísla.

- (1) **Zadání:** Napište gramatiku, která vygeneruje slova  $a^{n^2}$ .

*Dr. Jiří Klimeš* uvedl trochu jiné řešení, které zde (mírně upravené) uvádíme:  $G = (N, T, P, S)$ ,  $N = \{A, B, S, G, R, Q, K, Z\}$ ,  $T = \{a\}$ ,  $P = \{S \rightarrow GZa, G \rightarrow K, KA \rightarrow K, KZ \rightarrow e, G \rightarrow BRA, RA \rightarrow ARaa, aA \rightarrow Aa, aZ \rightarrow Za, RZ \rightarrow QZa, AQ \rightarrow QA, BQ \rightarrow G\}$ .

Myšlenka tohoto řešení vychází z indukčního vztahu  $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ . Neterminál  $G$  je řídicí a určuje, zda budeme pokračovat ve zvyšování  $n$  ( $G \rightarrow BRA$ ), nebo zda ukončíme generování slova ( $G \rightarrow K$ ). Neterminál  $K$  je ukončovací – uklízí zbylé neterminály  $A$  a  $Z$  ( $KA \rightarrow K, KZ \rightarrow e$ ). Počet neterminálů  $A$  určuje číslo  $n$ . V každém kroku zvyšování čísla  $n$  zvyšujeme zároveň počet neterminálů  $A$  ( $G \rightarrow BRA$ ) a pro každý neterminál  $A$  vygenerujeme dva terminály  $a$  ( $RA \rightarrow ARaa$ ). Přidáme tedy  $a^{2n}$ . Navíc pravidlem  $RZ \rightarrow QZa$  přidáme jeden terminál  $a$ . K dosavadnímu  $n^2$  tak přidáme požadované  $2n + 1$ .

Nyní budeme pokračovat řešením úloh 4, 5, 7, 8 a 10:

- (4) **Zadání:**  $a^k b^l c^k d^l$ . **Řešení** *Dr. Karla Martiška:*  $G = (N, T, P, S)$ ,  $N = \{A, B, C, D, S, Q\}$ ,  $T = \{a, b, c, d\}$ ,  $P = \{S \rightarrow AD, A \rightarrow aAC, A \rightarrow Q, D \rightarrow BDd, D \rightarrow e, CB \rightarrow BC, QB \rightarrow bQ, Q \rightarrow e, C \rightarrow c\}$ .

Na začátku vygeneruji  $a^k Q C^k B^l d^l$ , a dále musím mezi sebou prohodit neterminály  $B$  a  $C$ , ze kterých se potom stanou terminály.  $Q$  může zmizet jedině, až se stanou ze všech  $B$ -ček  $b$ -čka, a nakonec všechna  $C$ -čka přemění na  $c$ -čka.

**Řešení** *Dr. Jiřího Klimeše* (mírně upraveno):  $G = (N, T, P, S)$ ,  $N = \{G, K, V, W, S, Z\}$ ,  $T = \{a, b, c, d\}$ ,  $P = \{S \rightarrow GK, G \rightarrow aGc, G \rightarrow ZV, Vc \rightarrow cV, VK \rightarrow WKd, cW \rightarrow Wc, ZW \rightarrow bZW, ZV \rightarrow e, K \rightarrow e\}$ .

Nejprve si vygeneruji  $a^k Z V c^k K$ . Pak nechám  $V$ -čko přejet zleva doprava a vygenerovat za  $K$ -čkem  $d$ -čko.  $V$ -čko převléknu za  $W$ -čko a jedu doleva. Uprostřed (u  $Z$ -ka) vygeneruji  $b$ -čko a převléknu se zpět za  $V$ -čko.

- (5) **Zadání:**  $a^{j+k} b^j c^k d^{j+k}$ . **Řešení** *Dr. Karla Martiška:*  $G = (N, T, P, S)$ ,  $N = \{B, D, E, S, Q\}$ ,  $T = \{a, b, c, d\}$ ,  $P = \{S \rightarrow EQ, E \rightarrow aDEc, E \rightarrow B, B \rightarrow aDBb, B \rightarrow e, Da \rightarrow aD, Db \rightarrow bD, Dc \rightarrow cD, DQ \rightarrow Qd, Q \rightarrow e\}$ . Myslím, že funkčnost této gramatiky nejlépe osvětlí předchozí příklad.

- (7) **Zadání:**  $a^k b^l c^{kl}$ . **Řešení** *Dr. Karla Martiška:*  $G = (N, T, P, S)$ ,  $N = \{A, B, C, Z, K, X, S\}$ ,  
 $T = \{a, b, c\}$ ,

$$P = \{S \rightarrow XK, X \rightarrow aXA, \\ X \rightarrow Z, Z \rightarrow bZB,$$

$$BA \rightarrow ABC, CA \rightarrow AC, \\ CK \rightarrow Kc, BK \rightarrow K,$$

$$ZA \rightarrow Z, ZK \rightarrow e\}.$$

Teď mám vygenerováno  $a^k b^l Z B^l A^k K$ . Terminály  $a$  a  $b$  již nechám být, teď musím vygenerovat příslušný počet  $c$ -ček. Podobně jako v prvním příkladě od *Mgr. Lady Oberreiterové* vždy, když  $B$ -čko přeleze  $A$ -čko, vygeneruje  $C$ -čko,  $C$ -ček tedy bude  $kC$ .  $C$ -čka doputují ke  $K$ -čku, kde se změní v  $c$ -čka.

**Pozn.:** Nyní dostáváme  $a^k b^l Z A^k K c^{kl}$ . Zbavíme-li se neterminálů, máme vyřešeno.

- (8) **Zadání:** Pravdivý výraz součtu. **Řešení:** *Dr. Jiří Klimeš* řešil tuto úlohu v desítkové soustavě. Idea jeho řešení je: vygenerovat si 2 desítková čísla s neterminály jako ukazateli na aktuálně sčítanou pozici, a jiným neterminálem provádět vlastní sčítání. Uvádíme zde kratší modifikaci jeho řešení:

Budeme používat značení  $C_{0-9}$  za libovolnou cifru  $0, 1, \dots, 9$  a  $C_i$  místo cifry  $i$  (pro  $i = 0, 1, \dots, 9$ ).  $G = (N, T, P, S)$ ,  $N = \{A, B, D, E, P, Q, S, Z, M_0, M_1, N_0, \dots, N_{10}, R_0, \dots, R_{19}\}$ ,  
 $T = \{0, 1, \dots, 9, +, =\}$ ,

$$P = \{S \rightarrow ZA+, A \rightarrow C_{1-9}B, \\ A \rightarrow 0D, B \rightarrow C_{0-9}B, B \rightarrow D, \\ D+ \rightarrow P+A, D= \rightarrow QM_0=,$$

$$C_i Q M_j \rightarrow N_{i+j} Q C_i,$$

$$+Q M_i \rightarrow N_i + Q,$$

$$C_i M_j \rightarrow M_j C_i,$$

$$C_i N_j \rightarrow N_j C_i,$$

$$+N_j \rightarrow N_j +,$$

$$C_i P N_j \rightarrow P C_i R_{i+j},$$

$$Z P N_j \rightarrow Z P R_j,$$

$$R_i C_j \rightarrow C_j R_i,$$

Na začátku vygeneruji  $Z$  [1. číslo]  $P+$  [2. číslo]  $Q M_0=$ , kde  $M_i$  znamená přenos jedničky do vyššího řádu při sčítání – tj.  $i = 0, 1$ .  $Q$  je ukazatel na pozici sčítání ve druhém a  $P$  v prvním čísle. pro  $i = 0 - 9, j = 0, 1$ . Tímto pravidlem přičtu k přenosové jedničce  $M_j$  cifru před pozicí ve druhém čísle  $C_i$ . Výsledek si uschovám do neterminálu  $N_{i+j}$ , kde  $i + j = 0 - 10$ .

pro  $i = 0, 1$ . V případě, že jsme již vyčerpali celé druhé číslo, čteme z něj samé nuly.

pro  $i = 0 - 9, j = 0, 1$ ,

pro  $i = 0 - 9, j = 0 - 10$ ,

pro  $j = 0 - 10$ . Nyní máme vygenerováno  $Z$  [1. číslo]  $P N_j +$  [2. číslo bez poslední cifry]  $Q$  [poslední cifra 2. čísla]  $=$ , kde  $j$  je hodnota poslední cifry 2. čísla.

pro  $i = 0 - 9, j = 0 - 10$ , tedy  $i + j = 0 - 19$ ,

pro  $j = 0 - 10$ . V neterminálu  $R_k$  pro  $k = 0 + - 19$  máme součet posledních cifer čísel (včetně přenosové jedničky).

pro  $i = 0 - 19, j = 0 - 9$ ,

$R_i P \rightarrow PR_i,$	pro $i = 0 - 19,$
$R_i + \rightarrow +R_i,$	pro $i = 0 - 19,$
$R_i Q \rightarrow QR_i,$	pro $i = 0 - 19.$ Nyní jsme neterminál $R_i$ dostali až k =. Musíme převést $R_i$ ( $i = 0 - 19$ ) na cifru a přenosovou jedničku.
$R_i = \rightarrow M_0 C_i,$	pro $i = 0 - 9,$
$R_i = \rightarrow M_1 C_{i-10},$	pro $i = 10 - 19,$ tedy $i - 10 = 0 - 9.$ Tato pravidla nám umožní vygenerovat $Z$ [1. část 1. čísla] $PN_j$ [2. část 1. čísla] + [1. část 2. čísla] $Q$ [2. část 2. čísla] = [součet druhých částí čísel bez přenosu]. Zbývá jen ukončit generování pravdivého součtu.
$M_0 = \rightarrow =E, E0 \rightarrow E, EC_i \rightarrow C_i,$	pro $i = 1 - 9,$
$ZP \rightarrow e, +Q \rightarrow +\}.$	Tato pravidla ukončí generování – stačí si rozmyslet, kdy a jak je který neterminál potřeba, a kdy ho lze tedy zničit.

(9) **Zadání:**  $a^p$ , kde  $p$  jsou prvočísla.

*Dr. Jiří Klimeš* tento příklad vyřešil. Jeho postup je však hodně technický a navíc dlouhý 10 stran A4, proto jej neotiskujeme. Řešení bylo uvedeno v desítkové soustavě, což je zbytečně pracné. Konstrukce se myšlenkově shodovala s postupem uvedeným v minulém čísle, pouze byla o něco pracnější.

*Ziki*

## Téma 4 – Čajové lístky

*Miroslav Frost:* Záhada míchaného čaje – přehled publikovaného výzkumu

Snaha o hlubší řešení tohoto problému se poprvé objevuje v pracích *A. Einsteina* z dvacátých let tohoto století. Od té doby byly na toto téma publikovány stovky prací, ale skutečně komplexní řešení tak komplikovaného problému je snad nemožné. Čtenáře bych chtěl seznámit s diskusí, která na toto téma probíhala v časopise *Věda, technika a my* v letech 1994-1996. Většina příspěvků byla založena na experimentech, věnujících se vždy jen části problému.

Impulzem k diskusi byl názor *P. Mareše* z Olomouce, že při vypouštění kapalného barviva brčkem do rotující kapaliny nezáleží výsledek na vzdálenosti ponořeného konce ode dna – u hladiny, ve středu i na dně nádoby se začne vypouštěné barvivo stáčet směrem ke středu nádoby, a proto jev s čajovými lístky také není závislý na působení dna či stěn nádoby. V reakci na tento pokus upozornil *Mgr. R. Weinlich* z Olomouce na skutečnost, že v kapalině dochází k difuzi a Brownovu pohybu – měření je podle něj „neprůkazné a nepřesné“. *M. Eberl* v diskusi doporučuje vstříkovat manganistan draselný.

Já osobně považuji měření *P. Mareše* za zajímavé a osobně jsem si ho ověřil litím tenkého proudu tekutého medu do rotujícího čaje. Vytvořenou spirálu lze dobře pozorovat a med má navíc větší hustotu než voda, takže pozorování se vztahuje i na tuto odlišnost.

*Ing. M. Hofman* z Antonínova postavil nádobu na rotující talíř, u kterého mohl měnit otáčky (zkuste si vyrobit podobnou aparaturu – starý gramofon, mixér, nebo využijte vrtačku s navrtaným špalkem obrácenou sklíčidlem (to je to, kam se strká vrták) vzhůru; ulehčíte si odhadování úhlových rychlostí čaje<sup>1</sup> (hlavně buďte opatrní)). Po delším roztáčení, když úhlová rychlost kapaliny byla shodná s úhlovou rychlostí nádoby (mám na mysli, že se soustava chovala jako pevné těleso), vhodil do kapaliny zrníčka hypermanganu: „Zbarvení od zrněk se drželo stále na místě nad místem dopadu, kapalina a nádoba byly v relativním klidu. Po snížení otáček talíře začala zbarvená voda místo dopadu předbíhat a nakreslila zřetelné dostředivé spirály. Bylo možné sledovat vzestupný proud ke středu nádoby přibližně tvaru šroubovice. Při zvyšování otáček se vykreslovaly odstředivé spirály směrem ke kraji a vzhůru ke stěnám nádoby.“

Z pokusu *Ing. Mareš* usuzuje, že proudění způsobující shromažďování částíček ve střed u dna probíhá pouze v mezní vrstvě, která je brzděna stěnami nádoby.

Dále *Ing. Mareš* přišel s následujícím pokusem: Nejprve dokázal vliv tření v kapalině na vytváření spirál – nakapal na hladinu rotující kapaliny olej a položil na něj nit tak, že jeden konec držel těsně nad hladinou (použil drátek) a druhý konec nechal volně na hladině. Dle jeho názoru se nit rozbíhala do kružnice proto, že se třecí síly zmenšily vlivem oleje na „zanedbatelné minimum“. Jakmile se zbavil oleje, proud kapaliny nit stočil do spirály. Dále se *Ing. Mareš* zaměřil na vliv dna na částičky čaje – do uzavíratelné sklenice nasypal těžší částičky kalafuny a lehčí kousky dřeva. Sklenici naplněnou po okraj uzavřel, obrátil dnem vzhůru a položil na rotující talíř. Po jeho zastavení pozoroval jednak shromážděné kousky kalafuny na dně a jednak kousky dřeva kryté „horním dnem“ – stáčely se ke středu, zatímco dřevo volně se vznášející ve vodě rotovalo po kružnici. K tomu podává následující vysvětlení: „Pokud nádoba (i uzavřená) rotuje s kapalinou jako tuhé těleso, jsou plochami konstantního tlaku paraboloidy (viz rozšíření důkazu *Mgr. Zoltána Micse* z M&M číslo 3). Tyto plochy protínají dno i víko nádoby v soustředných kružnicích, mezi nimiž je tlakový spád. Na obvodu nádoby je tlak největší, uprostřed nejmenší. Rozdíl tlaků na každou částici je v radiálním směru vyrovnán její odstředivou silou a v nastalé rovnováze nedochází tedy k jejímu pohybu. Rovnováhu porušíme dvěma způsoby:

1. Nádobu roztočíme rychleji. Vlivem tření se zrychlení přeneso v mezní vrstvě u stěn na kapalinu. Následkem toho působí na částice v mezní vrstvě větší odstředivá síla než na kapalinu ve zbylém objemu – ta překoná tlakový spád a u dna vzniká v mezní vrstvě dostředivé proudění.
2. Otáčky nádoby snížíme, nebo dokonce zastavíme. Tím snížíme rychlost kapaliny těsně u stěn. Menší odstředivá síla nestačí vyrovnávat působení tlakového spádu směrem ke středu a vzniká dostředivý proud. Při rotaci pouze na obvodu kapaliny se drobné částičky nepřemístí po zastavení ke středu, ale jen ke hranici mezi rotujícím obvodem a klidným středem. Vytvoření tohoto mezikruží lze vysvětlit absencí tlakového spádu, mezikruží obepíná klidný střed.“

I v dalších příspěvcích čtenářů VTM najdeme zajímavá shrnutí. *F. Mrkva* uvádí: „Dochází-li ke změně rychlosti otáčení kapaliny, dochází k změně převýšení hladiny kapaliny. Bude-li urychlována, poteče u dna od středu k okraji, při zpomalování poteče u dna od okraje ke středu.“ (Doporučuji srovnat s pozorováním *Mgr. Tomáše Svatoně* a *K. Forrové* z M&M č.A.)

<sup>1</sup> S podobnou aparaturou experimentoval v minulém čísle i *Dr. Peter Čendula*.

*M. Kišon:* „V rotující kapalině stoupá tlak směrem od osy rotace s druhou mocninou poloměru, na částice působí síla vznikající kvůli rozdílu tlaků. Je-li v rovnováze se silou odstředivou, je výsledná dráha kruhová. Těsně u dna nádoby se vytvoří mezní vrstva, ve které jsou částice kapaliny brzděné se zrychlením orientovaným opačně(!) než rychlost. Výsledné proudění má směr mimo střed rotace, dráhy částic jsou spirály směřující k ose rotace. To, jak se budou tělíska pohybovat (kružnice, spirála), závisí na velikosti tření u dna a na zrychlení, které jim dodává kapalina“

*A. Petrýl* si všimá i poloměru nádoby a uvádí, že na větším poloměru čaj rotuje rychleji, což může ovlivnit experiment (zamyslete se, zda se pozorování změní např. při rotování česnekové polívky na talíři – je to hezky pozorovatelné).

Jak jsme se mohli v diskusi přesvědčit, jev závisí na více faktorech, a proto je užitečné zaměřit se postupně na pozorování každého z nich (ostatní podmínky nechat konstantní).

*Já osobně plánuji na podzimním soustředění teoreticky i prakticky diskutovat tento problém ještě hloub. Byl bych rád, kdybyste si připravili ještě další experimenty a teoretické nápady týkající se tohoto problému.* *Bzučo*

*Dr. Jan Novotný:* Čajové lístky – III. přepracované a rozšířené vydání

## Úvod

Toto je třetí přepracované vydání práce k tématu Čajové lístky. Práce je tématicky rozdělena do tří hlavních částí.

- I. První část teoreticky vysvětluje proudění mezi dvěma nekonečnými rotujícími disky při jejich zrychlování a zpomalování.
- II. Druhá část popisuje speciální případ, kdy máme nádobu zcela naplněnou vodou, a speciální aplikaci výše zmíněné teorie pro tento případ.
- III. Poslední část se zabývá nádobou, která je úplně naplněna vodou, a rovněž je použita teorie pro tento případ.

### I.

Mějme dvě paralelní nekonečné desky, mezi kterými je kapalina. Celý systém rotuje určitou rychlostí jako pevné těleso (včetně! kapaliny). Náhle rychlost rotace vzroste o určitou hodnotu. Celý systém se bude opět chtít dostat do stavu, kdy rotuje jako pevné těleso. Dojde k přeuspořádání kapaliny. Tomuto jevu se říká spin-up. Problém řešili *Greenspan a Howard (Greenspan & Howard, 1963)*.

Prvopočáteční změna rychlosti způsobí vznik *smykové vrstvy* (tzv. *Rayleighovy*) u každého disku. Tato vrstva způsobí jakési zhuštění<sup>1</sup> kvůli viskozitě.

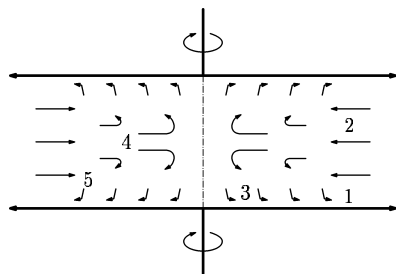
#### *smyková vrstva:*

Nejprve si představme kapalinu, která teče v nějaké válcové rouře. Uvažujeme-li tření, pak víme, že vrstva při stěně je brzděna nejvíce. Ta dále brzdí vrstvu nad ní atd. Čím více jsme ke středu, tím je brzdění o stěny menší. Nyní si představme, že kapalina teče, a

<sup>1</sup> **Pozn. redakce:** Nevím, o zhuštění čeho se jedná.

najednou ji obalíme rourou. Kde se roura bude projevovat nejdříve? Přece u dotykových ploch. Ty se zbrzdí a budou dále brzdit centrálnější vrstvy. V našem případě (čajové lístky) rovněž uvažujeme změnu pohybového stavu. Zde se disky rovněž začnou projevovat u dotykových ploch. Dříve, než začnou působit na vnitřní vrstvy, začnou se projevovat děje popsané dále (*Ekmanova vrstva*), které tento brzdící mechanismus „mírně“ zkomplikují, ale nezastaví.

Během několika otoček kapaliny vzniká kvasi-stabilní *Ekmanova vrstva* z vírové difuze. *Ekmanova vrstva* je charakterizována vně směřujícím radiálním odtokem, zapříčiněným odstředivými silami. Tento odtok je kompenzován malým přítokem zevnitř. Kvůli výskytu druhého disku tento vertikální tok do hraniční vrstvy může být udržován pouze malým přítokem, který je radiální a směřuje dovnitř. Jinými slovy, kvůli zachování hmoty je sbíhání kapaliny do *Ekmanovy vrstvy* kompenzováno radiálním prouděním do centra (obr. 1).



obr. 1

- (1) *Ekmanova vrstva*,
- (2) dostředivý radiální přítok, nový moment rotace,
- (3) odtok způsobený „nasáváním“ *Ekmanovy vrstvy*,
- (4) vnitřní nepřilnavý tok, starý moment rotace,
- (5) stěny viskozního proudění, pomaluje se zmenšuje oblast nepřilnavosti proudů

#### vírová difuze:

Vírová difuze je způsobena rozdílnými úhlovými rychlostmi v kapalině. Největší je u stěn. To znamená, že i gradient rychlosti proudící kapaliny je u stěn nejvyšší a šíření rostoucí úhlové rychlosti jde od stěn a při určitých podmínkách dojde k vytváření vírů.<sup>2</sup> Je to podobný jev, jaký nastává při přenosu tepla ve vařící kapalině od horkého dna.

Složitým matematickým postupem se dá předpovědět, kde a za jakých podmínek by mohly vzniknout víry. Na samotném dně je několik nestabilních bodů, v nichž je nejpravděpodobnější, že se zde „vyklubou“ víry. Podrobnější vysvětlení (Greenspan 1968).

Dalo by se říci, že vnitřní tok je téměř *nepřilnavý*, není ovlivněn brzděním o disky. Úhlový moment hybnosti prstence tekutiny, pohybujícího se dovnitř, aby nahradil tekutinu vstupující do *Ekmanovy vrstvy*, se zachovává a vnitřek pomalu přijímá větší úhlovou rychlost. *Ekmanova vrstva* působí jako odtokový kanál pro tekutinu s malým momentem hybnosti tekoucí z centra, tato tekutina

<sup>2</sup> **Pozn. redakce:** Jedná se pravděpodobně o množství energie přenášené mezi sousedními vrstvami pomocí vírů.

je nahrazena tekutinou s větším momentem rotace, tekoucí z míst o větším poloměru. Jakmile podmínky v centru dosáhnou hodnot příslušných konečnému stavu, *Ekmanova vrstva* zaniká.

Při počátečním impulzu zvětšení rychlosti vznikly setrvačností oscilace s dvojnásobnou frekvencí úhlové rychlosti tekutiny v nádobě, ale s velmi malou amplitudou. Tato oscilace by se dala připodobnit ke zvuku. Je to šíření mechanické energie v nádobě právě prostřednictvím kmitů. Tyto oscilace brzy zanikají působením viskozity kapaliny. Kromě toho už zaniká i výše zmíněný nepřilnavý tok, neboť viskózní hraniční vrstvy pronikly difuzním postupem do centra. Tedy přechodný pobyt tekutiny se skládá ze tří fází:

- (1) vznik viskózních hraničních vrstev,
- (2) spin-up a přenos hmoty,
- (3) doznívání a zánik předchozích efektů.

Pro čas  $t$  potřebný k tomu, aby se kapalina v nádobě opět točila jako pevné těleso – aby probíhal spin-up, platí:

$$t = \frac{\varepsilon L}{W_I} \doteq \left( \frac{L^2}{\nu \Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \doteq E^{-\frac{1}{2}} \Omega^{-1}, \quad (1)$$

kde  $\varepsilon$  — Ronbyho číslo, bezrozměrné číslo charakterizující rotaci kapaliny,

$L$  — poloměr podstavy,

$W_I = \frac{2U\delta}{L}$ , kde

$\delta$  — tloušťka Ekmanovy vrstvy

$$\delta = (\nu/\Omega)^{1/2},$$

$\nu$  — dynamická viskozita,

$\Omega$  — frekvence rotace

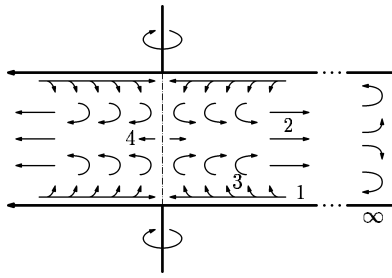
$$U = \varepsilon \Omega L,$$

$E$  — Ekmanovo číslo.

Platnost této teorie byla prověřena například *Bondim* a *Lyttletonem* při diskusi zpomalování zemského jádra.

Nyní ještě zbývá říci, jak tomu bude při zpomalování rotace. Úvahou se dá přijít na to, že budou probíhat děje opačné k předešlému (obr. 2). Při náhlém zmenšení rychlosti rotace okamžitě vznikne *Rayleighova smyková vrstva* a následně kvazistabilní *Ekmanova vrstva*. Ta bude nyní sloužit jako přítokový kanál, neboť tekutina z centra bude odstředivými silami odváděna radiálně ven. To bude kompenzováno právě přítokem zbrzděné tekutiny prostřednictvím *Ekmanovy vrstvy*. Bude docházet k výměně kapaliny s větším momentem hybnosti s kapalinou s menším momentem hybnosti, až dojde k úplnému přerozdělení a kapalina bude opět rotovat jako pevné těleso s novou, menší úhlovou rychlostí.



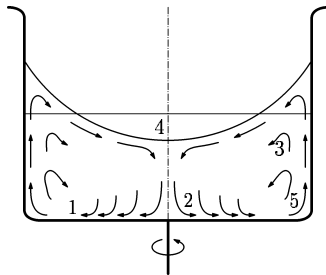


obr. 2

- (1) *Ekmanova hraniční vrstva*,
- (2) odstředivý odtok kapaliny se starým momentem hybnosti,
- (3) přítok *Ekmanovou vrstvou* nové kapaliny s novým momentem hybnosti,
- (4) postup zpomalování kapaliny

## II.

Mějme osově symetrickou nádobu napůl naplněnou vodou. Je v klidu. Nyní ji roztočíme. Má úhlovou rychlost  $\omega$  (obr. 3). Opět dojde k přeuspořádání kapaliny uvnitř. Ekmanova vrstva vzniká jen u dolní stěny (dna) nádoby. Zpočátku zde vzniká proudění, jak je patrné na obr. 3. Je zde rovněž vyobrazeno těleso lehčí než kapalina. To sklouzne po hladině k ose rotace (rovněž je strhnuto proudy). Dále je zde těleso těžší než kapalina. To je odstředivou silou a odstředivými proudy hnáno od osy. Stejně hustá tělesa jako kapalina jsou unášena proudy uvnitř.



obr. 3

- (1) *Ekmanova vrstva*,
- (2) odtokové proudy,
- (3) přítokové proudy,
- (4) těleso lehčí než kapalina,
- (5) těleso těžší než kapalina

Nyní ke tvaru hladiny: Obecně musí pro tvar hladinových ploch platit:

$$K_x dx + K_y dy + K_z dz = 0, \quad (2)$$

kde  $\vec{K}$  je vektor intenzity hmotových sil<sup>3</sup> (Hladký J. Ing. CSc.), v našem případě

$$K_x = \omega^2 x \quad \text{— odstředivé zrychlení,}$$

<sup>3</sup> Jedná se o vektor síly, která působí na těleso, dělený hmotností tělesa.

$K_y = -g$  — tíhové zrychlení, působí v záporném směru.

Zintegrujeme-li rovnici (2), dostaneme:

$$y = \frac{1}{g} \left( \frac{\omega^2}{2} x^2 - C \right) \leftarrow \text{parabola v obecném tvaru,} \quad (3)$$

$C$  — integrační konstanta,

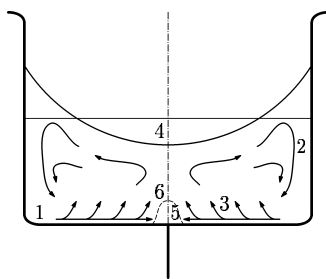
$\omega$  — úhlová rychlost rotující kapaliny.

Nyní nás ještě může zajímat tlak v nádobě v závislosti na poloze místa. Podobně odvodíme:

$$p = \rho \left( \left| \frac{\omega^2}{2} x^2 - gy \right| + C \right). \quad (4)$$

**Pozn. ke tvaru hladiny:** Do výše uvedené obecné rovnice můžeme přidat další pohyby, např. posun válce v určitém směru, vržení kolmo do vzduchu apod.

Zpomalování rotace je uvedeno na obr. 4. Těleso lehčí než kapalina zpočátku zůstává u osy, neboť je v „dolíku“ potenciální tíhové energie (jeho „grafem“ je tvar hladiny). Tvar hladiny se pomalu mění z úzké paraboly na parabolu širokou, která po určitém čase není téměř rozeznatelná od roviny, protože  $\omega$  jde k nule (viz rovnici (3)). Kapalina je brzděna odspodu od osy otáčení.

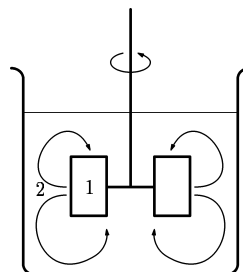


obr. 4

- (1) *Ekmanova vrstva*,
- (2) přítokové proudy,
- (3) odtokové proudy a jejich brždění u stěny,
- (4) těleso lehčí než kapalina,
- (5) těleso těžší než kapalina,
- (6) postup brždění

## Experimenty

**Pozn.:** Tekutina musí být roztáčena točením nádoby jako celku. Mícháme-li tekutinu uvnitř, vzniká jiné proudění, obr. 5. Vznikají zde tzv. „trailing vortices“ — putující víry. Tyto víry mají nestabilní osu rotace a nejsou kruhové, ale eliptického tvaru. Kvůli nim zde vzniká vysoce chaotické turbulentní víření. Vznikají zde fluktuace způsobené právě těmito víry.



obr. 5

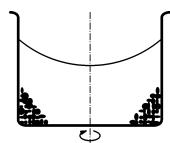
Jelikož byly experimenty prováděny v nelaboratorních podmínkách, nejsou zde uvedeny výpočty, ale jen popis situace (nádoba se netočila konstantní rychlostí apod.). V experimentech šlo o kvalitativní potvrzení teorie. Uvádím dále popisy experimentů, které jsem vykonal.

Pokusy byly prováděny ve sklenici s užitečným objemem 750 ml. Sklenice měla červené šroubovací víčko. Dno lze považovat za rovné. Průměr sklenice u dna je 9 cm. Sklenice nemá přímě válcovitý tvar, neboť se po 7 cm zužuje na celkových 6,5 cm

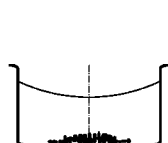
### Čaj

Závěry jsou podobné těm, ke kterým dospěl *Mgr. Svatoň* (Svatoň 2000). Při roztočení se čaj hromadí od středu ke stěnám (obr. 6a), při brzdění směřuje ke středu (obr. 6b). Výše zmíněný postup brzdění vysvětluje i to, že u dna vzniká pomalu se zvětšující kruh čaje, který se nepohybuje a na který se postupně nabalují další vrstvy (obr. 6c).

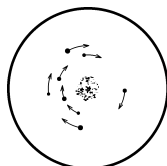
Měla-li nádoba nerovné dno (obr. 6d), pak proudy musí překonat právě tento potenciálový tíhový „kopeček“ (jehož grafem je tvar dna), aby se lístečky mohly hromadit u středu.



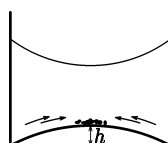
obr. 6a



obr. 6b



obr. 6c



obr. 6d

### Cukr

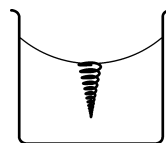
Když jsem dal do stejné zavařovací sklenice cukr, pak byly závěry stejné. Cukr je těžší než čajové lístky, a proto tolik „neběhal“ po dně, ale spořádaně se posouval ke středu (nebo od něj, v závislosti na roztáčení nebo zpomalování). Rovněž brzdění (obr. 6c) bylo rychlejší než u čajových lístků.

tělíška	čas zastavení
čajové lístky	100 s
cukr krupice	8 s
písek z dětského	12 s
pískoviště	

Měřil jsem čas zastavení rotace v závislosti na obsažených tělesech vevnitř sklenice, vždy byla do sklenice nasypána 1 vrchovatá lžička materiálu. Výsledný čas byl průměrován ze 2 měřených hodnot. Přibližná frekvence rotace  $f \doteq 3$  Hz.

### Zkoumání tvaru hladiny

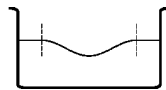
Při míchání byl patrný vznik centrálního souosého víru (obr. 7a). Ten po chvíli zmizel. Hladina měla tvar paraboly při stěnách rovněž mírně zdeformované — viz také (Svatoň 2000). Prakticky se mi však nepodařilo pozorovat nepohyblivé elementy u stěn, pokaždé se trochu pohybovaly. Teoreticky je tam ovšem rovněž předpokládám.



obr. 7a

## Olej

Na hladinu jsem vylil oranžový lampenol<sup>4</sup>. Vytvořil na hladině barevné víčko (obr. 7b). Hladina měla rovněž tvar paraboly, ale zdeformované části při stěnách byly nižší  $\implies$  jejich šíře závisela na viskozitě látky, jež je na hladině.



obr. 7b

## Pudr

Při tomto experimentu jsem hladinu posypal pudrem. Ten vytvořil slupku, téměř nepohyblivou. Zdeformovaný pás byl ještě širší. Pod touto slupkou byl patrný pohyb tekutiny, která se pohybovala rychleji než slupka. Zde se dá teoreticky předpokládat vznik další *Ekmanovy vrstvy*.

## Experimenty mimo rotaci nádoby

V osově symetrické nádobě (kastrůlek) máme vodu s čajem na dně. Ten je rovnoměrně rozptýlen. Do dna udeříme. Uprostřed vznikne vlna (obr. 8), neboť úder dodal vodě určitou energii. Tato vlna při ústupu vytvoří bezčajové kolečko, neboť při svém šíření k okraji vzala s sebou také část hmoty na dně. Toto kolečko se po několika sekundách opět zacelí, neboť se vlna odrazí od stěn a zarovná vzniklou díru. Rovněž na zacelení má vliv to, že nádoba nebyla pevně připoutána, ale mírně se chvěla (držel jsem ji v ruce).



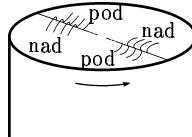
obr. 8

Ve stejné nádobě jsem vodu rozkmital ve směru osy tak, že jsem ji dostal do rezonance. Uprostřed vznikla stojatá vlna, která způsobila mezeru v čajovém pokryvu (obr. 9a). Odtok vody z vlny způsobil odnos čaje jako v předešlém případě. Dále je zde možný vznik ještě další čajové mezery, kolmé na tu výše uvedenou. Ta však nebyla pevně experimentálně prokázána. Mohlo jít jen o náhodné fluktuace ve tvaru nánosu čajových lístků na dně.



obr. 9a

Dále jsem pozoroval tvar hladiny v eliptické nádobě. Jev se mi zdál zajímavý, proto ho zde uvádím. Vznikala tam jakási dvě jádra, okolo kterých se kapalina točila. Dále tam vznikala dvě místa, kde se pod sebe dostávaly dvě masy vody (obr. 9b).



obr. 9b

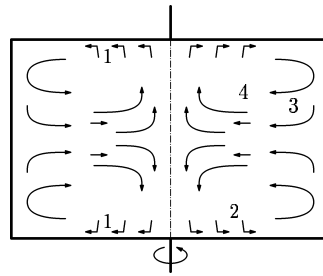
## Rybičky

Můj kamarád (začínající akvarista) mne požádal, abych mu přinesl nějaká *paví očka*<sup>5</sup>. Já jich mám mnoho (kolem sedmdesáti). On má jen několik málo rybek, které se mu nechtějí množit. A tak jsem rybky chytal sítkem do sklenice. Všiml jsem si, že rybky vždy plovaly proti proudu, tedy vlastně jsem mohl sledovat, jaké proudy tečou v sklenici. Žádná rybka nebyla při experimentu zraněna.

<sup>5</sup> akvariijní rybičky

III.

Pohyb tekutiny ve sklenici plné vody (obr. 10). Zde bychom mohli použít vysvětlení z I. části. Tekutina stržena *Ekmanovou vrstvou* se „odrážzí“ od vertikálních stěn. Zde (a v *Ekmanově vrstvě*) nabývá nový moment hybnosti a následně je nasávána do centra, kde nahrazuje tekutinu se starým momentem hybnosti.



obr. 10

## Experimenty

Při roztáčení sklenice se čaj hromadil u stěn vně. Důvody výše uvedené. Při zpomalování se čaj hromadil ve středu. Důvody opět zřejmé. Bylo-li dno vypouklé, proudy s čajem musely překonávat tíhový potenciálový „kopeček“.

Provedl jsem ještě další experiment.

Mějme nádobu, kompletně plnou vody. Nádoba se točí konstantní rychlostí. Horní stěnou je do nádoby veden píst, na jehož konci je v nádobě malý disk o průměru menším, než je průměr dna nádoby. Disk vykonává malé torzní kmity. V nádobě je rovněž rozpuštěna barevná emulze nebo suspenze, u které se snažíme pozorovat její pohyb.

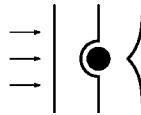
Na stoličku od piána (typ, který se točí) jsem si umístil 5-litrovou sklenici a vycentroval ji. Do této velké sklenice jsem přilepil menší sklenici (rovněž vycentrovanou). Téměř celou 5-l sklenici jsem naplnil vodou. Hladina byla výše než vrch menší sklenice (to proto, aby v menší sklenici byla stále jen voda). Do víčka od menší sklenice jsem udělal kruhový otvor. Tím jsem prostrčil tyčku, na jejíž konec jsem nalepil malý disk. Víčko jsem umístil na sklenici, avšak ještě předtím jsem do sklenice vsypal jemný pískový prach (ten se pro takovýto druh experimentů osvědčil). Stoličku jsem roztočil a začal kmitat tyčkou. Výsledek: celá soustava se rozpadla. Teoreticky je tento pokus odvozen v (Greenspan 1968) na straně 84. Nákres výsledného pohybu suspenze je vidět na obrázku 11.



obr. 11

Dále jsem se pokoušel prokázat to, že se kapalina ve sklenici pohybuje jinou rychlostí než sklenice (např. při zpomalování). Vznikl tzv. *Taylor-Proudmanův sloup*, který vzniká např. v kanálech s překážkami u dna. V tomto sloupu došlo k podivnému pohybu čajových lístků, což jsem si vysvětlil právě výše zmíněnou teorií *T.-P.* sloupů. Jelikož málokdo z vás asi ví, co to ty *Taylor-Proudmanovy* sloupky jsou, dovolte mi je vysvětlit.

Představme si nějaký kanál, v němž teče voda. Například hladké betonové ko-ryto řeky. Voda teče klidně. Teď doprostřed umístíme na dno velký balvan. Voda, která přes něj poteče, se bude pohybovat tak, že na hladině vytvoří pe-řeje, neboť jednotlivé vrstvy se valí na sebe, až toto navalování dostoupí na hladinu. Teď si představme, že na povrchu není volná hladina (jsme např. v rouře v potrubí). Voda se nebude moci tak „snadno“ převalit přes balvan. Ten nad sebou vytvoří sloup točící se vody, neboť voda, která je v kontaktu s překáž-kou, přímo ovlivní vrstvy nad sebou, které vůči okolní vodě zpomalí. Obr. 12 ukazuje pohled shora. Tmavé čáry představují postupující „vlny“ vody (samo-zřejmě se jedná o kontinuální tok). Onen sloup vody je vlastně protuberance, výtrysk, do kterého se dostává nově příchozí voda. Tento jev byl vysvětlen po-drobněji v (Proudman 1956).



obr. 12

To je vše k čajovým lístkům. Možná některé otázky a připomínky zůstaly nezodpovězeny. To mě mrzí, avšak musím se připravovat na maturitu. Doufám, že jsem alespoň trochu osvětlil problém čajových lístků.<sup>6</sup>

#### Literatura:

- sborník 1998 Aktuální problémy mechaniky tekutin; AV ČR
- Brdička M. 1959 Mechanika kontinua; NČSAV Praha
- Doc. Ing. Fleischer Petr a kol.; 1987 Sběrka řešených příkladů z mechaniky tekutin; Brno
- Ing. Hladký Jan CSc.; 1982 Mechanika tekutin v příkladech
- Prof. RNDr. Horský J. DrSc.; RNDr. Novotný J. 1984 Mechanika kontinua, SPN Praha
- Greenspan H. P.; The theory of rotating fluids; Cambridge 1968
- Greenspan H. P., Howard L. N. 1963 On a time dependent motion of a rotating fluid. J,Fluid Mech. 22; p.385-404
- Obeid Ahmed; 1979 Kandidátská disertační práce
- Proudman J.; 1956 On the motion of solids in liquids possessing vorticity; Proc. Roy. Soc.; A92-408-424
- Svatoň Tomáš 2000 Čajové lístky M&M 4/6
- osobní diskuse s účastníky soustředění semináře M&M Studenov 2000

Bzučo

## Téma 5 – Hodiny

Bc. Peter Murárik: Relativistická moucha

Peter Murárik se pokusil zjistit, co se bude dít, když se bude moucha pohybovat relativistickou rychlostí. Zjistil, že moucha může dosáhnout podle rovnice

$$m_{v,moucha} = \frac{m_{moucha}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

<sup>6</sup> Redakce velice kladně u autora oceňuje zejména experimentální část.

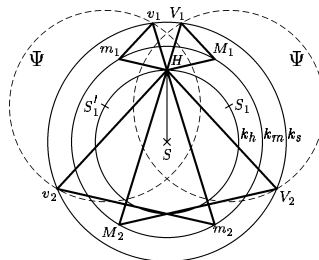
takové hmotnosti, že ji hodinový stroj neutáhne. Navíc se ručička pod tíhou mouchy (a také pod svou vlastní tíhou – i ona bude mít velkou rychlost, a tedy i hmotnost) může zlomit. Moucha se také nemusí udržet na hodinách, a může odletět někam pryč. Dostředivá síla bude také obrovská. Moucha proto musí na pohyb vynaložit obrovskou energii.

**Pozn. redakce:** Ručička bude mít také velkou hmotnost. Když bude úhlová rychlost  $\omega$  dostatečně velká, výraz  $v = \omega r$  může překročit hodnotu rychlosti světla. V takovém případě začnou konce tyče zaostávat, tyč se začne deformovat, a získá tvar písmena S. Jestliže budeme  $\omega$  nadále zvětšovat, zřejmě se konec tyče utrhne, protože neexistuje ideálně pevný materiál.

*Matouš Jiráček:* Různě dlouhé ručičky a rovnostranný trojúhelník

V minulém čísle jsem v bodě (i)(b) slíbil vysvětlit, proč křivku  $\psi_V$  tvoří dvě kružnice. Z postupu konstrukce každého bodu  $V$  plyne, že tento bod  $V$  můžeme získat otočením bodu  $M$  o  $60^\circ$  okolo bodu  $H$ . Všechny body  $M$  tvoří kružnici  $k_m$ . Můžeme si představit, že celou množinu bodů  $k_m$  otočíme kolem bodu  $H$  současně. Tzn. otočíme kružnici  $k_m$  na kružnici  $k_1$ . Střed  $S$  kružnice  $k_m$  se tak zobrazí na střed  $S_1$  kružnice  $k_1$ .

Symetricky ovšem zobrazujeme body  $M$  na body  $V'$  otočením o  $-60^\circ$  (resp. o  $300^\circ$ ) okolo bodu  $H$ . Obrazy bodů  $M$  při tomto otočení tvoří kružnici  $k'_1$  se středem  $S'_1$ .



Tím jsme ukázali, že křivka  $\psi_V$  se skládá ze dvou kružnic o stejném poloměru  $m$ . Ze způsobu, jakým jsme zobrazili bod  $S$  na  $S_1$ , resp.  $S'_1$ , plyne, že body  $S_1$  i  $S'_1$  musí nutně ležet na kružnici  $k_h$ .

Křivku  $\psi_V$  teď už umíme popsat např. parametrickými rovnicemi. Protože obrázek je symetrický podle svislé osy procházející bodem  $H$ , stačí, když se budeme zabývat kružnicí  $k_1$ . Zvolme kartézskou soustavu souřadnic se středem v bodě  $S$  a osou  $y$  totožnou s polopřímkou  $SH$ . Střed  $S_1$  má v této soustavě souřadnice  $[\frac{\sqrt{3}}{2}h; \frac{h}{2}]$ . Parametrická rovnice kružnice  $k_1$  je:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}h + m \cos \alpha, \tag{1}$$

$$y = \frac{h}{2} + m \sin \alpha, \tag{2}$$

kde  $\alpha \in (0; 2\pi)$  je parametr. Naším cílem je najít průsečíky  $k_1$  s kružnicí  $k_s$ . Kružnice  $k_s$  má rovnici

$$x^2 + y^2 = s^2. \tag{3}$$

Dosaďme (1) a (2) do rovnice (3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}h + m \cos \alpha\right)^2 + \left(\frac{h}{2} + m \sin \alpha\right)^2 &= s^2, \\ \frac{3}{4}h^2 + \sqrt{3}hm \cos \alpha + m^2 \cos^2 \alpha + \frac{h^2}{4} + hm \sin \alpha + m^2 \sin^2 \alpha &= s^2, \\ h^2 + m^2 + \sqrt{3}hm \cos \alpha + hm \sin \alpha &= s^2, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha &= \frac{s^2 - h^2 - m^2}{2hm}, \\ \sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha &= \frac{s^2 - h^2 - m^2}{2hm}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že na levé straně rovnosti se objevil součtový vzorec pro sinus součtu úhlů  $60^\circ$  a  $\alpha$ . Proto

$$\sin(60^\circ + \alpha) = \frac{s^2 - h^2 - m^2}{2hm}. \quad (4)$$

Z rovnice (4) určíme pro konkrétní hodnoty  $h$ ,  $m$ ,  $s$  úhel  $\alpha \in (0, 2\pi)$ . Tím najdeme průsečíky  $k_1 \cap k_s$ . Průsečíky  $k'_1 \cap k_s$  jsou s příslušnými průsečíky  $k_1 \cap k_s$  osově souměrné podle osy  $y$ . Pro všechny získané průsečíky zjistíme, zda situace může v nějakém čase nastat. A v tomto místě téma uzavřeme; myšlenka je jasná a technické výpočty pro různé trojice  $h, m, s$  ponecháme zájemcům jako cvičení na prázdniny. *Matouš & Bzučo*

## Téma 6 – Strategie

### NIM

*Mgr. Václav Cviček:* Odebírání libovolného počtu serek z některé z  $n$  hromádek

Nejprve uvažují, že vyhraje ten, kdo vezme poslední sirku. Definují si funkci  $f(k_1, k_2, \dots, k_n) = k_1 \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_n$ , kde  $k_i$  je počet serek na  $i$ -té hromádce,  $n$  je počet hromádek,  $\oplus$  je funkce XOR definovaná v minulém čísle. Abychom měli jistotu výhry, musí po našem tahu platit  $f(k_1, \dots) = 0$  (tedy zXORujeme počty serek na hromádkách).

Pro praktické hraní samozřejmě nebudeme počítat nějakou funkci  $f$ , ale všimněme si, jaké vlastnosti má operace  $\oplus$ . V hlavě si vždy čísla rozložíme na mocniny 2 a do výsledku přičteme ty řády, ve kterých je lichý počet jedniček (XORujeme jen 2 čísla najednou, pokud jsou větší). V tomto je nejlepší vlastní zkušenost.

Zbývá dořešit případ, když prohrává ten, kdo vezme poslední sirku, tj. naší snahou je nechat na ploše jedinou sirku. Pak by po našem tahu mělo platit  $f(1, k_1, \dots, k_n) = 0$ , tedy  $f(k_1, \dots, k_n) = 1$ .

**Pozn. redakce:** Řešení je sice naprosto správné, ale chybí v něm jakýkoliv důkaz. Je celkem zřejmé, že pokud před soupeřovým tahem platí  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ , pak po provedení jeho tahu to platit nebude – odebere-li soupeř z hromádky, kde je  $x_i$  serek, nenulový počet serek a zbyde jich tam  $y$ , kde  $y \neq x_i$  (tedy  $y \oplus x_i \neq 0$ ), pak  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) = (f(x_1, \dots, x_n) \oplus x_i) \oplus y = f(x_1, \dots, x_n) \oplus (x_i \oplus y) = x_i \oplus y \neq 0$ . Není však moc zřejmé, že pokud před naším tahem platí  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , pak bude existovat hromádka, ze které můžeme odebrat tolik serek, abychom výsledek funkce  $f$  vynulovali. Tento důkaz je obsahem následujícího článku.



Robert Špalek: Důkaz existence optimálního tahu

Při použití současného značení nechť  $f(x_1, \dots, x_n) = z \neq 0$ . Označme  $e$  řád nejvyššího nenulového bitu  $z$ .

Zcela jistě existuje mezi čísly  $x_1, \dots, x_n$  alespoň jedno číslo  $x_i$ , pro které platí  $x_i \geq 2^e$ . Plyne to z postupu výpočtu funkce  $f$ . Víme totiž, že počet jednotkových bitů na řádu  $e$  je lichý, tzn. existuje alespoň jedno číslo  $x_i$  s jednotkovým bitem na řádu  $e$ .

Nyní vezměme číslo  $y = x_i \oplus z$ . Platí  $y < x_i$ , protože bity na řádech vyšších než  $e$  zůstanou touto operací nedotčeny a bit na řádu  $e$  se změní z 1 na 0. To, co se děje na řádech nižších než  $e$ , nás nezajímá, protože v každém případě je jisté, že  $y < x_i$ .

Dokažme ještě, že  $F = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$ . To odvodíme obdobně jako při vyšetřování soupeřova tahu:  $F = (f(x_1, \dots, f_n) \oplus x_i) \oplus y = f(x_1, \dots, x_n) \oplus (x_i \oplus y) = f(x_1, \dots, x_n) \oplus z = 0$ , neboť  $x_i \oplus y = z$ . To dokážeme z rovnosti  $y = x_i \oplus z$  provedením operace  $\oplus x_i$  na obě strany rovnice.

Z těchto argumentů plyne, že jsme našli hromádku, ze které lze odebrat nenulový počet sirek tak, aby výsledek funkce  $f$  byl po provedení našeho tahu nulový. **q.e.d.**

Robert

## Téma 8 – Difrakce

Dr. Jiří Tománek:

- mýdlová bublina — barevné proužky, které po chvilce shora mizí, jsou způsobeny kapalinou, která v mýdlové bublině stéká dolů, což také vede ke ztenčování bubliny, a posléze k jejímu prasknutí u vrcholu.
- srpečky pod stromy — jedná se o obrazy Slunce v *dírkových komorách* vytvořených skulinami mezi listy.
- dvojlom — mějme pravouhlou destičku, na jejíž dvě protilehlé stěny působí kolmý tlak. Pak vznikají v destičce napětí (různá v různých místech a směrech). Jen pro případ rovinné napjatosti v řezu rovnoběžném s vnějším napětím se jeví účinek tím, že v každém místě přísluší jednomu směru největší napětí  $\sigma_1$  a v jiném směru nejmenší napětí  $\sigma_2$ . Dopadá-li světlo kolmo na destičku (pravítko), chová se tato destička jako dvojlomná, přičemž oba paprsky jsou polarizovány ve směrech hlavních napětí. Jestliže pro deformaci platí Hookův zákon, je rozdíl indexů lomu obou paprsků úměrný rozdílu hlavních napětí. Rozdíl optických drah paprsků je

$$\Delta = (n_1 - n_2)d = K(\sigma_1 - \sigma_2)d,$$

a tedy fázový rozdíl je

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{\lambda_0} = \frac{d}{\lambda_0} K(\sigma_1 - \sigma_2),$$

kde  $d$ , resp.  $K$  je tloušťka destičky, resp. fotoelastická konstanta.

- lesk diamantu — vysoký index lomu způsobuje totální odraz na vnitřních hranách v širokém rozmezí úhlů dopadu. Takto vzniká vysoký třpyt diamantu.
- zabarvení křídel hmyzu — blanitá křídla jsou pokryta tenkou vrstvičkou, na které dochází k interferenci. Různé vlnové délky se tedy odrážejí s různou intenzitou a v poměrném zastoupení vlnových délek v odraženém světle se křídla jeví zabarvená.

- barevné pásy na povrchu CD — neporušená místa CD odrážejí dopadající světlo, zatímco rýha (záznam) světelný paprsek pohlcuje; jedná se tedy vlastně o ohyb na mřížce.
- lesk perleťových knoflíků — při výrobě se na povrch nanáší jemné šrafování (tvorba optické mřížky).
- objektiv fotoaparátu — na čočkách je nanášena antireflexní vrstva, zabraňující zpětným odrazům paprsků.

**Pozn. redakce:** Zabarvením křídel hmyzu se také zabývala *Mgr. Dáša Eisenmannová*, která zdůrazňuje, že se jedná o čistě optický jev, a nikoli o nějaké chemické barvivo či pigment, „jak se mnoho lidí domnívá“.

*Dr. Jan Novotný:* Interference

Ačkoli se toto téma zabývá vlastnostmi světla způsobenými jeho vlnovou povahou, dovolím si na začátku odbočit a uvést několik zajímavých příkladů, které demonstrují vlastnosti (i nesvětelných) vln.

- podélné vlny v tuhých materiálech — každý element vlny kmitá v tomtéž směru, tj. dochází k místním změnám hustoty. Tyto podélné vlny se mohou šířit i v kovových strunách či deskách, kde se obvykle setkáváme s vlnami příčnými. Rychlost šíření podélných vln je asi o řád vyšší než rychlost příčných vln. Fázová rychlost podélných vln je

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu a  $\rho$  je hustota materiálu.

- akustické vlny — jde o speciální případ podélných vln. Jelikož výchylka plynu se špatně zavádí, píše se vlnová rovnice pro lokální akustický tlak. Lokální stlačování a rozpínání vzduchu se standardně pokládá za adiabatické, fázová rychlost zvukových vln je potom

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}},$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta plynu,  $R$  univerzální plynová konstanta a  $T$  jeho termodynamická teplota.

- vlny na vodě — patří mezi neklasičtější případ vln. Z fyzikálního hlediska je to velmi komplikovaný případ, neboť dochází ke skládání příčného a podélného vlnění v nelineárním prostředí s disperzí. Je zřejmé, že vlnění bude záviset na hloubce. Povrchové napětí odpovídá za vznik tzv. čeření (vlny do 2 cm). V hlubokých vodách dochází k přenosu části energie podélnými vlnami na dně. Nejvyšší fázovou rychlost mají dlouhé vlny. Jelikož je energie soustředěna do určitého objemu, dochází u břehu, kde se zmenšuje hloubka, k nárůstu amplitudy. To vede ke vzniku ničivých vln tsunami. Tyto vlny jsou tzv. solitonového typu a jejich původ je v zemětřesení na mořském dně: energeticky mohutná, byť pomalá, výchylka se jako rázová vlna šíří k pobřeží, kde nabude obrovské amplitudy.

Vlnová povaha světla má za příčinu jevy jako interference, odraz a lom, či ohyb. Příslušné zákony a popisy jsou v každé středoškolské učebnici, proto je zde nebudu citovat.

Mezi zajímavé jevy patří interference. Pro interferenci se používá koherentních svazků. Okem registrujeme nikoli okamžitý průběh amplitudy, ale intenzitu a její interferenční struktury. Jako příklad uvedu interferenci dvou koherentních vln a její strukturu.

- interference dvou divergujících kulových vln (z různých bodových zdrojů) – vlnoplochami jsou hyperboly, přesněji rotační hyperboloidy.
- interference divergující a konvergující kulové vlny — vlnoplochy jsou elipsy, resp. rotační elipsoidy.
- interference rovinné a kulové vlny — vlnoplochy jsou rotační paraboloidy.

Další „přístroj“ na ukázkou interferenčních vlastností světla se skládá z rovné skleněné desky a ploskovypuklé čočky. Tato dvě sklíčka na sebe přiložíme a dojde ke vzniku tzv. Newtonových kroužků. Pomocí průměrů dvou sousedních kroužků můžeme zjistit poloměr křivosti čočky. To se vpraxi rovněž využívá. Vztah pro výpočet poloměru křivosti  $R$  je

$$R = \frac{r_2^2 - r_1^2}{\lambda(m_2 - m_1)},$$

kde  $r_i$  je poloměr kroužku  $i$ ,  $m_i$  je pořadové číslo kroužku (počítáno od středu) a  $\lambda$  je vlnová délka použitého světla. Vidíme, že když vezmeme dva sousední kroužky, pak  $m_2 - m_1 = 1$ , a odpadnou starosti s odpočítáváním, o kolikátý kroužek se jedná, což může být v technické praxi problém.

- vlastní pozorování — opotřeбенé žehlicí plochy u domácí napařovací žehličky. Doma jsem zjistil zajímavý jev. Část žehlicí plochy u žehličky měla jinou barvu. Normální barva je stříbrolesklá. Zde byly obrazce tmavší barvy. Jejich okraje byly tvořeny proužky s barvami spektra. Nejprve jsem vyloučil mastnotu a podobné nečistoty tak, že jsem plochu vyčistil. Kvůli nesymetrickému rozmístění se dal vyloučit i vliv žhavicích těles z druhé strany. Dospěl jsem tedy k tomu, že na žehlicí ploše je určitý povlak. Ten se stálým žehlením na některých místech ztenčil, což vedlo právě k výše zmíněným interferenčním jevům.

**Pozn. redakce:** Autor dále uvádí několik příkladů optických interferometrů (např. Michelsonův-Morleyho, Jaminův a Sagnacův) i s jejich použitím. Vzhledem k tomu, že tato část článku neobsahuje žádné konkrétní výsledky či vztahy a je pouze stručným přehledem, nebyla z důvodu úspory místa otištěna. *Bzučo*

## Úloha 12 – Zmes

V čísle 4 byla položena otázka, jestli bude výsledná permitivita směsi dána vztahem podle *Mgr. Cvička* nebo podle *Mgr. Míše*.

Domnívám se, že problém je poněkud složitější, než se na první pohled zdá. Jednak určitě závisí na rozložení zrníček prášku uvnitř směsi, jednak také na tvaru částic. Jiný výsledek bude pro kostky, jiný pro náhodně zvolené tvary. Správná odpověď tedy zní: nemá pravdu ani jeden z autorů. Nejprve se podívejme na chyby, kterých se dopustili jednotliví autoři.

Mgr. Václav Cviček: (redakčně upraveno)

Elektrické pole uvnitř kondenzátoru nelze v žádném případě považovat za homogenní. Elektrické siločáry jsou velice klikaté, vždyť se musí lámat na každém rozhraní obou dielektrik (pro lom platí rovnice lomu ve tvaru:  $\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$ ). To znamená, že při přenosu částice dielektrika se mění intenzita pole v místě, kde se právě nachází, a tedy při přesunu se koná práce. Navíc se při přesunu změní i celkové pole v kondenzátoru. Kdybychom považovali argumenty v čísle 4 za správné, mohli bychom na jejich základě ukázat, že pouhým přeuspořádáním částic dostaneme z sériově umístěných monobloků dvou dielektrik dva monobloky umístěné paralelně. Jestliže kondenzátor není připojen k napětí, náboj na povrchu se nezmění. Energie tohoto kondenzátoru se musí zachovávat, tedy musí platit  $E = Q^2/C = \text{konst.}$ , protože podle předpokladů nekonáme při přemísťování zrníček žádnou práci. To ale znamená, že kapacita kondenzátoru musí být stále stejná. Jenže jestliže oba dva monobloky zapojíme jednou sériově a jednou paralelně, tak určitě budou mít rozdílnou kapacitu. Sporem jsme přišli na to, že při přeuspořádávání se musí konat práce.

Mgr. Zoltán Mics:

Předpoklad, že oba prášky se budou polarizovat, jako kdyby byly umístěny v elektrickém poli každý zvlášť, je také chybný. Toto tvrzení není úplně lehké dokázat. Jestliže si představíme, že siločáry končí na hranici prvního dielektrika a pokračují do dalšího prostředí, pak budou určitě vypadat jinak, když tam budeme vkládat různá dielektrika. Pole jednoho dielektrika ovlivňuje pole druhého. Jestliže je ale rozmístění rovnoměrné, tak můžeme uvážit, že toto ovlivňování nebude velké. Rozhodně toto řešení je víc „správně“ než předchozí. *Bzučo*

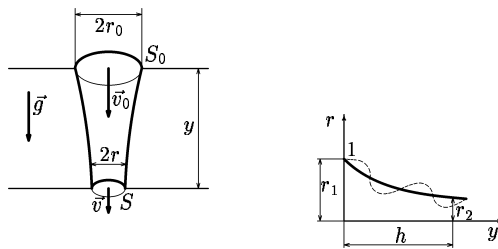
## Úloha 17 – Móóóc velká čísla

Permutovatelných prvočísel do 1000000000 je dvanáct. Jsou to: 2, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 37, 79, 113, 199, 337. Jejich permutace zde pro přehlednost neuvádím.

K výsledku se dá těžko dojít bez pomoci počítače. Při psaní programu je vhodné využít kritérií pro dělitelnost.

Permutovatelné prvočísla určitě nebude obsahovat cifry 2, 4, 6, 8, 0 (alespoň jedna permutace by pak byla dělitelná 2), ani cifru 5 (alespoň 1 permutace by byla dělitelná 5). Tedy čísla tvoříme pouze z cifer 1, 3, 7, 9, přičemž kontrolujeme, zda ciferný součet není dělitelný 3 (číslo by bylo dělitelné 3) apod. – tato kritéria pro dělitelnost určitě znáte. Méně známé je např. kritérium pro dělitelnost 11: rozdíl součtu cifer na lichých pozicích a na sudých pozicích musí být dělitelný 11. Vylepšené řešení problému permutovatelných prvočísel nám poslal jen *Dr. Jura Tománek*. Jeho program je však dost dlouhý, proto jej zde otiskovat nebudu, případným zájemcům jej však velmi ráda pošlu, ať už v psané, nebo v elektronické podobě. *Alča*

## Úloha 18 – Teče voda teče



Voda se při pádu nemůže ani objeovat, ani ztráčet. Objemový tok skrz danou plochou musí tedy být v každém okamžiku stejný. Proto platí

$$Q_1 = Q_2 \implies S_1 h_1 = S_2 h_2 \quad S_1 v_1 t = S_2 v_2 t \quad S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (1)$$

Voda musí mít při výtoku určitou nenulovou rychlost, jinak by nemohla platit rovnice (1). Uvažujme, že voda padá dolů volným pádem. Pak pro rychlost  $v_2$  platí:  $v_2 = v_1 + gt$ . Za čas  $t$  se tedy voda dostane do místa, kde má rychlost  $v_2$ . Pro tento čas dostaneme z rovnice volného pádu

$$h = v_1 t + \frac{1}{2} g t^2 \implies +1/2 = -\frac{v_1}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_1}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}; \quad t = \frac{v_1}{g} \left( \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_1^2}} - 1 \right). \quad (2)$$

Za výsledný čas musíme vzít kladnou hodnotu, protože záporný čas jaksi nemá fyzikální smysl. Jestliže dosadíme za  $v_2$  do (1), dostaneme

$$S_1 v_1 = S_2 \left( v_1 + g \frac{v_1}{g} \left( \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_1^2}} - 1 \right) \right) = S_2 \sqrt{v_1^2 + 2hg}. \quad (3)$$

Předpokládejme, že plochy  $S_1$  a  $S_2$  mají kruhový průřez, tedy  $S_1 = \pi r_1^2$ ,  $S_2 = \pi r_2^2$ . Odtud máme vztah pro poloměr  $r_2$  v závislosti na  $h$ :

$$r_1 = r_2 \sqrt[4]{\frac{v_1^2}{v_1^2 + 2hg}}. \quad (4)$$

Někteří z vás uváděli, že tlak se při pádu nemění. Podívejme se, jak závisí tlak na výšce. Platí Bernoulliho rovnice:

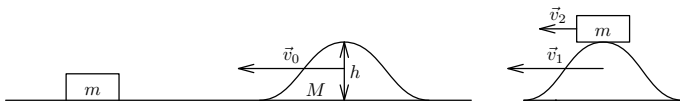
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho h g. \quad (5)$$

Podle této rovnice je kohoutek ve výšce  $h = 0$ . Pro rozdíl tlaků  $p_1 - p_2$  vyjde skutečně nula.

Další zajímavou skutečností, které si mnozí z vás všimli, je, že vodní sloupec se při pádu v určité hloubce začne trhat. Je to způsobeno především povrchovým napětím. Při výtoku vody z kohoutku nesleduje voda přesně stěny trubice, ale začne se zužovat. Při výtoku by měl proud v místě 1 prudce změnit tvar, ale jelikož voda má určitou setrvačnost, musí pokračovat ve směru, kterým teče. To znamená, že na začátku bude mít prakticky všude poloměr  $r_1$ . Vyjádřeno v řeči derivací: funkce popisující spojitý děj v přírodě nemůže mít první derivaci nespojitou. Aby tato matka Příroda dodržela, musí voda téci zpočátku rovně, a pak dohánět, co zameškala. V důsledku toho vlivem povrchového napětí vzniknou na vodě povrchové (tzv. Rayleigho) vlny, které se šíří směrem dolů a jejich amplituda závisí na rychlosti. V okamžiku, kdy je amplituda větší než poloměr  $r_2$ , začne se voda dělit do kapiček a vodní proud se roztrhá. Problém je to velice pěkný, můžete se ho pokusit namodelovat třeba ve Famulovi. *Bzučo*

## Úloha 19 – Jedeme z kopce!

Jelikož výslednice vnějších sil působících na soustavu tělísko-kopeček je nulová, platí v ní zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie. Označme  $m$  hmotnost tělíska,  $M$  hmotnost kopečku,  $h$  výšku kopečku,  $v_0$  počáteční rychlost kopečku,  $v_1$  rychlost kopečku a  $v_2$  rychlost tělíska po jeho průchodu přes nejvyšší bod kopečku (viz obrázek). Nejprve nás bude zajímat, jaká může být nejmenší rychlost  $v_0$ , aby se tělísko dostalo přes vrchol kopečku, za předpokladu, že tvar kopečku je „hezký“. Pak se zamyslíme, jaké podmínky musí „hezký“ tvar kopečku splňovat.



Zákony zachování hybnosti a energie nám dají tyto dvě rovnice:

$$Mv_0 = Mv_1 + mv_2,$$

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh.$$

Rychlost  $v_0$  bude minimální, když se tělísko na vrcholu kopečku zastaví, tj. bude se dál pohybovat stejnou rychlostí jako kopeček, a proto položíme  $v_1 = v_2$ . Dosazením této rovnosti do rovnic uvedených výše a jejich řešením dostáváme, že postačující počáteční rychlost kopečku  $v_0$ , potřebná k tomu, aby se tělísko na kopeček dostalo, je

$$v_0 = \sqrt{2gh \left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Nyní se zamysleme nad tvarem kopečku. Na něm závisí, zda se tělísko vůbec dostane přes vrchol kopečku. Je zřejmé, že pokud bude kopeček začínat svislou stěnou, pak se tělísko o ni zastaví a k vrcholu už nedospěje. Je tedy důležité, aby tělísko po cestě nikdy nemuselo stoupat kolmo vzhůru. Dále je důležité, aby tvar kopečku byl rozumně hladký, tj. aby se tělísko nezarazilo v nějaké prasklině. Můžeme tedy učinit závěr, že tělísko překoná kopeček, jestliže rychlost kopečku je větší než spočtená  $v_0$  a tvar kopečku je hladká křivka, která nejde nikdy kolmo vzhůru. *Aleš*

## Úloha 20 – Úloha pana Banacha

- (a) V tomto případě se jedná o stejnolehlost obou map. Bodem, který je v nich nad sebou, je jistě jediný samodružný bod této stejnolehlosti, a to její střed. Stačí tedy proložit přímkou sobě odpovídajícími rohy velké a malé mapy. V jejich průsečíku se nachází hledaný bod.
- (b) Nyní máme mapy v obecné poloze. Pro lepší představu se na situaci budeme dívat jako by zpod stolu, na němž máme mapy rozloženy. Nyní je tedy menší mapa nvrchu a můžeme se pustit do práce. Námi hledaný bod bude jistě (existuje-li) ležet v té části velké mapy, kde je tato překryta mapou menší. Označme tento obdélník na velké mapě  $V_1$ . Obraz oblasti  $V_1$  vyřezává na malé mapě obdélník  $M_1$ , který leží nad nějakým obdélníkem  $V_2$  (mimořádně  $5 \times$  menším než  $V_1$ ), jehož obraz v malé mapě označme  $M_2, \dots$ . Takto můžeme pokračovat libovolně dlouho a postupně dostávat obdélníky  $V_3, V_4, \dots$ . Bod, který hledáme, musí ležet ve všech těchto obdélnících současně. Z toho, že každý další obdélník vždy celý leží v předchozím, a z úplnosti roviny plyne, že průnik těchto obdélníků je neprázdný. Zřejmě také obsahuje právě jeden bod: pokud by v něm totiž ležely dva různé body (které tedy mají nenulovou vzdálenost), snadno bychom našli obdélník  $V_k$ , do kterého už by se oba nevešly. Tento jednobodový průnik obdélníků  $V_1, V_2, \dots$  je tedy tím jediným bodem, ležícím v obou mapách nad sebou.

*Stáňa*

## Úloha 21 – Rodinka

Tato úloha patřila k těm nejjednodušším (mírně zamotanější verze známé úlohy o koze, vlkovi a zelí), takže byla hodnocena pouze třemi body.

Většina řešitelů správně přišla na ten trik, že spolu půjdou tatínek s maminkou a synek s dcerkou. Vyskytlo se několik zábavných nápadů: Tato úloha je protiprávní, neboť oprávnění projít tunelem má pouze zaměstnanec drah (za předpokladu, že to je železniční tunel). Nebo, že tam půjdou dva lidé a dítě. Podobné úvahy – jako že dítě vlastně není člověk – by asi narazily na tvrdé odmítnutí našeho semináře organizací, jako je UNICEF, takže nebyly akceptovány. Dále se vyskytla spousta nápadů, jak svíčku dělit – někteří experti chtěli svíčku rozdělit dokonce na části, jako je  $\frac{1}{10}$  – to asi nikdy nezkoušeli dělit svíčku (ten parafín se strašně drolí a jakmile by to někdo začal dělit, vydrořil by většinu na zem).

Správná úvaha, která vedla k cíli, byla poměrně jednoduchá. Bylo potřeba si uvědomit, že neefektivnější bude průchod tehdy, když spolu půjdou ti, co jsou rychlostně co nejbližší – aby se navzájem co nejméně zdržovali. Dále, protože se celkem mají přepravit 4 lidé, musí se cesta tunelem uskutečnit minimálně 5-krát, protože při jednom kole, kde se svíčka ocitne zase na počátečním okraji tunelu, se může přepravit maximálně jeden člověk na druhou stranu. Při posledním cyklu už není potřeba se vracet, takže to vyjde 5. Pokud by syn a dcera prošli zvlášť, potom by cesta musela trvat minimálně 5 (dcera) + 4 (syn) + 1 (doprava svíčky na opačný konec) + 2 (maminka se také musí přepravit) + 1 (druhá doprava svíčky na původní konec tunelu). Když už musí jít spolu, rozhodně se nemůže ani jeden z nich vracet (i kdyby se vracel syn, trvala by jen jemu cesta  $4 + 4 + 4 = 12$ ). Proto už na druhém konci někdo musí stát, aby se se svíčkou mohl vrátit. Se svíčkou bude chodit tatínek, který je nejrychlejší.

Celkem získáme 2 řešení: V prvním kroku se musí na cílový konec (označme C) dostat oba rodiče (nemůže jít jen jeden – svíčka se sama nevrátí), aby tam někdo byl, až tam přijdou dítko. V dalším

kroku se obě řešení oddělují: se svíčkou se může vrátit buď tatínek, nebo maminka (časově to vyjde nastejno, protože ten druhý se vrátí hned v následujícím kroku). Předá svíčku dětem, aby mohli přejít na druhou stranu. Tam si ji vyzvedne druhý z rodičů a přispěchá na druhou stranu ke své lepší polovičce. V tomto bodě se obě řešení zase spojují, protože teď prostě oba rodičové spolu projdou na druhou stranu. A je to.

Rodiče musí přenášet svíčku, děti musí jít spolu. Stejně rychlí by měli jít spolu.

*Drak*



## Finální výsledková listina za ročník 1999-2000

Pořadí	Jméno	Škola	$\Sigma_{-1}$	Témata					Úlohy					$\Sigma_0$	$\Sigma_1$			
				1	3	4	5	6	8	12	17	18	19			20	21	
1.	Dr. Hanss Novotný		50			32			15			3		1	3	54	104	
2.	Dr. Peter Čendula	G M. Hodžu, 3.B	72	6								6	4	5	6	3	30	102
3.	Dr. Jiří Klimeš	Jiráskovo G, 2.B	72		22							0	2		2	1	27	99
4.	Dr. Karel Martišek	G Elgart., kvinta	70		12								1			3	16	86
5.	Dr. Ondřej Plašil	G Chodov., sept.	67										5	5	0	3	13	80
6.	Dr. Jiří Tománek	G Hranice, 3.	51						10			5	4		5	3	27	78
7.	Dr. Miroslav Frost	G Elgart., kvinta	54		10							5	3	2	3		23	77
8.	Mgr. Václav Cviček	G P. Bezruč, 1.	38					5			3	5				3	16	54
9.	Mgr. Zoltán Mics	G maď. Šahy, 3.	42								5						5	47
10.	Mgr. Jan Rychmberk Klusůň	G Jiráška, kvinta	36									2	2		3		7	43
11.-12.	Mgr. Dáša Eisenmannová	G Heyrov., 3.A	24					4				6	2	2	3		17	41
	Mgr. Jan Beneš	Bišk. G, sexta B	41														0	41
13.	Mgr. Jana Krátka	G Piešťany, 3.	23											2	3		5	28
14.	Mgr. Lada Oberreiterová	G Třebíč, 3.B	31												3		3	26
15.	Mgr. Jiří Novák	G Ledč n. S., 4.	24														0	24
16.-17.	Bc. Lenka Burešová	G Dopplera, 2.	17									4			3		7	21
	Bc. Peter Murárik	G L. Štúra, 2.G	13			3						5	0	0			8	21
18.-19.	Mgr. Pavel Augustinský	G Havřírov, 4.	48														0	20
	Mgr. Miro Urbánek	GVOZA, 2.B	20														0	20
20.	Bc. Tomáš Vyskočil		17														0	17
21.	Mgr. Martin Rosol		20												3		3	16
22.	Bc. Miroslav Šulc	G Stavbařů, kvinta B	15														0	15
23.	Mgr. Majka Hanzlíková		23												1		1	14
24.	Doc. Michal Tarana	GVOZA, 4. ročník	130														0	13
25.-27.	Lenka Beranová	G Vrchlického, sexta C	3									5			3		8	11
	Bc. Jan Chmelař	G Hranice, 1.	11														0	11
	Martin Beránek	G Ohradní	0									4	2	2	3		11	11
28.-29.	Mgr. Tomáš Svatoň	GJKT, 3.A	39														0	7
	Kristýna Forrová	GJKT	7														0	7
30.	Stanislav Hampl	GOA Sedčany, septima	6														0	6
31.	Martin Troják	GVOZA, 4.B	5														0	5
32.-33.	Robert Meixner	G Slovan., V.A	2														0	2
	Jiří Vlach	GOA Sedčany, 2. ročník	2														0	2

Adresa redakce:

Matouš Jirák  
V Zátíší 670  
251 64 Mnichovice

## Výsledky dosažené za všechny ročníky

Řešitel	Loni	Série					Letos	Celkem
		2	3	4	5	6		
Doc. Michal Tarana	117				13		13	130
Doc. Hanss Novotný	0		12		38	54	104	104
Doc. Peter Čendula	0	16	5	5	46	30	102	102
Dr. Jiří Klimeš	0	7	31	19	15	27	99	99
Dr. Karel Martišek	0	5	14	15	36	16	86	86
Dr. Ondřej Plašil	0	18		21	28	13	80	80
Dr. Jiří Tománek	0	7	7	5	32	27	78	78
Dr. Miroslav Frost	0			9	45	23	77	77
Dr. Václav Cviček	0	7	7	9	15	16	54	54
Mgr. Pavel Augustinský	28	11	9				20	48
Mgr. Zoltán Mics	0	21	17	4		5	47	47
Mgr. Jan Rychmberk Klusoň	0	3	23		10	7	43	43
Mgr. Dáša Eisenmannová	0	4	5	5	10	17	41	41
Mgr. Jan Beneš	0	5	18		18		41	41
Mgr. Tomáš Svatoň	32	0		7			7	39
Mgr. Lada Oberreiterová	8	1			22	3	26	34
Mgr. Jana Krátka	0	7	13	3		5	28	28
Mgr. Jiří Novák	0	6		14	4		24	24
Mgr. Majka Hanzlíková	10	9			4	1	14	24
Mgr. Lenka Burešová	3		4		10	7	21	24
Mgr. Martin Rosol	7	4	6	3		3	16	23
Mgr. Peter Murárik	0	0	7		6	8	21	21
Mgr. Miro Urbánek	0	20					20	20
Bc. Tomáš Vyskočil	0	2		7	8		17	17
Bc. Miroslav Šulc	0				15		15	15
Bc. Jan Chmelař	0	5	6				11	11
Bc. Lenka Beranová	0				3	8	11	11
Bc. Martin Beránek	0					11	11	11
Kristýna Forrová	0	0		7			7	7
Stanislav Hampl	0				6		6	6
Martin Troják	0	5					5	5
Jiří Vlach	0				2		2	2
Robert Meixner	0	2					2	2