



Termín odeslání: pondělí, 22. 6. 2009

Milí kamarádi,  
prázdniny se už zvolna blíží. A to značí, že další ročník M&Mka je za námi. Ale ještě nezoufejte, v tomto čísle se můžete těšit na poslední úlohy tohoto ročníku.

Vedle úloh zde najdete také články k tématkům. V rámci tématu jedna **vyhlášíme třetí a poslední kolo hry Nejmenší nevybrané**, do kterého se máte možnost zapojit i pouhým e-mailem! Více se dočtete na straně 11.

Vydařený konec školního roku vám přejí

organizátoři 

## Zadání úloh

### Úloha 6.1 – Manželské páry (4b)

MatFyzák Eduard úspěšně odpromoval. Začal studovat postgraduální studium. Na katedře se zakoukal do sličné MatFyzačky a slovo dalo slovo a byli zasnoubeni. Ovšem, jak se blížil termín svatby, byl Eduard zamýšlenější a zamýšlenější.

V knize o etiketě doporučovali, aby manželské páry, které jsou pozvány na hostinu, neseděly vedle sebe. V knize byly také další rady, ale na ty Eduard nehleděl.

Na hostině budou všichni sedět u velkého kulatého stolu a Eduarda by zajímalo, kolika způsoby si může sednout  $n$  manželských párů na  $2 \cdot n$  židliček tak, aby žádný pár neseděl vedle sebe.

### Úloha 6.2 – Ohníčku hoř! (3b)

Lišák Riki si během jednoho letního dne vyrazil do hor. Jak už to tak bývá, zastihla ho na hřebeni bouřka. A než se stihl schovat, promokl on, jeho věci, ale hlavně zápalky.

„Tak to ne, musím vymyslet, co si příště vzít místo zápalek, aby to nenavlhlo,“ řekl si. „A co takhle lupa? Ale co když se zpozdím a slunce zapadne?“

Jak velkou lupu by Riki potřeboval, aby s ní mohl zapálit papír i při měsíčním světle? Stačí řádový odhad. Bude mít v průměru centimetry, metry, kilometry?



## Úloha 6.3 – Přívoz (1b)

U přívozu v Podhoří se na břehu řeky sešli otec se svými dvěma syny, matka se svými dvěma dcerami a kriminálník s policistou. Všichni se chtějí dostat na druhou stranu, ale není to tak snadné, neboť převoz lidí na druhou stranu se řídí těmito pravidly:

- Na loďce se mohou převážet najednou jen dvě osoby.
- Otec nesmí zůstat ani s jednou dcerou bez přítomnosti matky.<sup>1</sup>
- Matka nesmí zůstat ani s jedním synem bez přítomnosti jejich otce.
- Kriminálník nesmí zůstat ani s jedním členem rodiny, když tam není policista.
- Jen otec, matka a policista se umí přeplavit (tj. ovládat loďku).

Jak dostat všechny na druhou stranu?

Úloha je inspirována hrou, kterou si můžete zahrát na

<http://freeweb.siol.net/danej/riverIQGame.swf>

## Řešení úloh

### Úloha 4.1 – GeoMag (4b)

#### Zadání:

*Riki dostal pod stromeček stavebnici GeoMag. Tato stavebnice funguje na principu magnetismu. Základem jsou zmagnetizované tyčky, ke kterým je možno díky magnetickým silám přichytit malé kuličky.*

*Z této stavebnice je tak možné sestavit nejrůznější tělesa. Riki začal tím, že postavil čtverec. Ovšem tento čtverec není moc stabilní, neboť pokud na něj jen trochu zatlačí, tak se zdeformuje na kosočtverec. Jak by měl Riki postupovat, aby dostal stabilní čtverec?*

*Zdá se, že řešení by mohlo být snadné – Riki postaví oktaedr, a čtverec se už nebude deformovat. Oktaedr však zabere spoustu prostoru. Proto se pokuste vymyslet konstrukci, která by byla v ploše. A zkuste k tomu použít co nejméně tyček.*

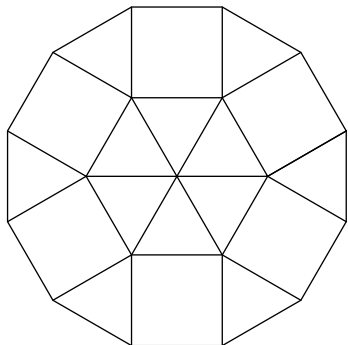
*Reálnou tloušťku tyček a kuliček neuvažujte. Tyčky si zidealizujte jako úsečky a kuličky jako body.*

#### Řešení:

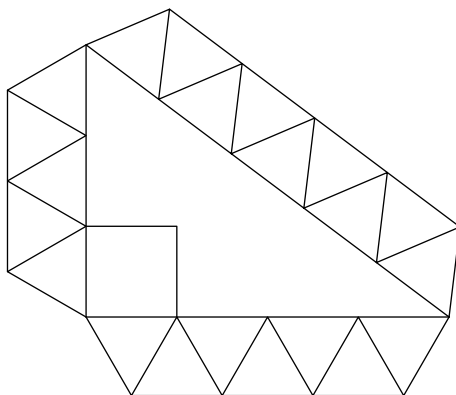
V zadání bohužel chyběla informace o tom, že všechny tyčky jsou stejně dlouhé a že se smí přichytávat pouze na konci. Většina z vás to našťestí považovala za samozřejmost a nebo jste se zeptali. Řešení, která porušují jedno z těchto pravidel, jsou velmi snadná, proto jsem v takovém případě uděloval poloviční počet bodů.

Řešení přišla opravdu pěkná hromádka a nutno říct, že jste všichni vymysleli zajímavé konstrukce. Jako příklad bych uvedl obrázek r4.1.1. Tato konstrukce není stabilní, jak by se mohlo na první pohled zdát, protože je možné všechny vnější trojúhelníky najednou vzít a společným směrem zrotovat.

<sup>1</sup> To platí jak na břehu, tak na loďce.



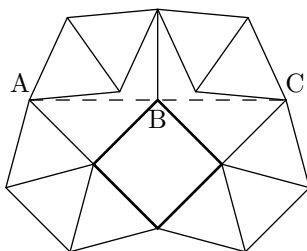
Obr. r4.1.1 – Nestabilní konstrukce.



Obr. r4.1.2 – Správné řešení.

Daleko zajímavější konstrukce je již na obrázku r4.1.2. Tento způsob používá 47 tyček, což není zas tak mnoho. Na tohle řešení přišla většina z vás. Myšlenka je taková, že vzhledem k tomu, že trojúhelník je stabilní útvar, pak útvar složený z trojúhelníků (dotýkajících se hranou) je také stabilní. Můžeme tak vytvořit tři úsečky délek 3, 4 a 5 a protože  $3^2 + 4^2 = 5^2$ , je jimi trojúhelník pravouhlý. Nejenom to, je i stabilní, protože je sestavený ze stabilních úseček. Není tedy problém doplnit do něj dvěma tyčkami u pravého úhlu čtverec.

Nejlepší známé řešení (na které ale nikdo nepřišel) sestává z 27 úseček a je znázorněno na obrázku r4.1.3. Body  $A$ ,  $B$  a  $C$  leží na přímce.



Obr. r4.1.3 – Nejlepší známé řešení.

Exaktně dokázat stabilitu tohoto útvaru je poněkud složitější problém. Místo toho zde pouze „ukážeme, že to funguje“ bez přesného důkazu. S útvarem můžeme dělat pouze dvě deformace. Tahat za body  $A$  a  $C$  od sebe, nebo je tlačit k sobě. Když je budeme tlačit k sobě, bod  $B$  by se měl pohybovat směrem vzhůru. Ale tyčka seshora ho bude táhnout větší rychlostí, než dvě tyčky zespona tlačit. Nejde tedy dosáhnout deformace. Podobně to platí i při roztahování bodů  $A$  a  $C$  od sebe.

## Úloha 4.2 – Není válec jako válec (3b)

### Zadání:

Správce královské pokladnice se rozhodl, že si trochu přilepší k platu. Zalíbil se mu zlatý válec o průměru  $d = 10$  cm a délce  $l = 30$  cm. Aby se na krádež nepřišlo, rozhodl se, že vyrobí stejně veliký válec z mědi, kterým nahradí ten chybějící.

Měď má ovšem menší hustotu než zlato. Správci se podařilo sehnat kus iridia, které je těžší než zlato. Trápi ho však jedna věc. Pokud by pouze obalil iridium mědí, měl by jeho válec jiný moment setrvačnosti než válec z čistého zlata. A to by bylo nápadné. Poradíte správci, jak by měl válec vyrobit tak, aby na povrchu byla vrstvička mědi a válec měl správný moment setrvačnosti?

### Řešení:

Správce pokladnice v jeho nekalých úmyslech raději podporovat nebudeme, ale kdybychom byli, zcela teoreticky, na jeho místě, tak bychom si určitě poradili. Na začátek upřesníme, co budeme chápat pod momentem setrvačnosti. Budeme chtít najít takové rozložení iridia, aby moment setrvačnosti válce při rotaci kolem libovolné osy byl stejný<sup>2</sup>. K zajištění této podmínky u rotačně symetrického tělesa stačí, aby se shodoval moment setrvačnosti kolem geometrické osy a kolem osy k ní kolmé. (Zájemci najdou podrobnější informace na konci tohoto textu.)

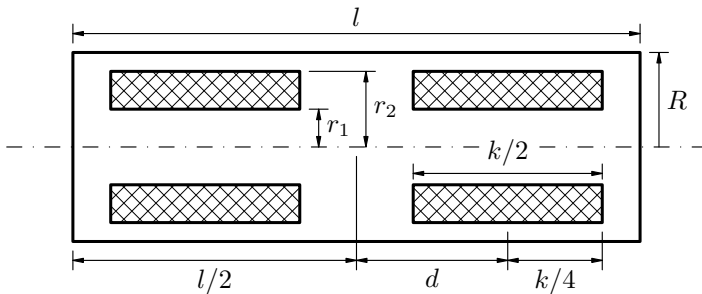
Pro takový kus zlata se určitě vyplatí věnovat výrobě nějaké úsilí, ale není nutné to zbytečně komplikovat. První poznatek je, že nemáme žádný důvod porušit rotační symetrii válce, naopak bychom si tím jen vše zesložili. Pro zjednodušení výpočtů budeme mít všechny části jak měděné, tak iridiové, ve tvaru válce nebo válcové mezivrstvy. To nám stále nechá dost volnosti pro splnění zadání. Abychom ovlivnili hmotnost, musíme pochopitelně měnit objem iridia. Pro změnu momentu setrvačnosti je třeba umět posouvat iridiovou oblastí dál od osy anebo blíže k ose.

Nabízí se následující konfigurace: Iridium bude v měděném válci tvořit dva válcové „prstýnky“. Každý z nich má vnitřní poloměr  $r_1$  a vnější  $r_2$  ( $r_1 < r_2 < R$ , poloměr celého válce je  $R = d/2$ ). Prstýnek má výšku ve směru osy válce rovnou  $k/2$  a jeho střed je podél geometrické osy posunut o  $d$  pryč ze středu válce. Situaci zobrazuje obrázek r4.2.1.

Moment setrvačnosti válce si můžeme buďto spočítat (zájemci najdou postup na konci tohoto článku), anebo najít ve vhodné literatuře. Každopádně zjistíme, že moment setrvačnosti válce o hmotnosti  $m$  a poloměru  $r$  při rotaci kolem geometrické osy je

$$J_{\parallel} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{\pi}{2}\rho hr^4.$$

<sup>2</sup> Předpokládejme, že válec třeba někdo vezme do ruky a zatočí s ním ve všech směrech. Je sice vcelku nepravděpodobné, že by při takovémto průzkumu nerozeznal zlato a měď už od pohledu, ale tímto se teď nebudeme zabývat. :-)



Obr. r4.2.1 – Řez válce rovinou obsahující geometrickou osu. Umístění iridia je znázorněno šrafováním.

Při rotaci kolem osy kolmé ke geometrické je moment

$$J_{\perp} = \frac{1}{4}m \left( r^2 + \frac{h^2}{3} \right) = \frac{\pi}{4}\rho hr^4 + \frac{\pi}{12}\rho h^3 r^2,$$

kde  $h$  je výška válce a  $\rho$  jeho hustota.

Je dobré si uvědomit, že momenty setrvačnosti jde sčítat a odčítat. Tedy pokud máme měděný válec s kusem iridia uvnitř, stačí spočítat moment setrvačnosti válce, který by byl celý z mědi, odečíst část obsazenou iridiem a přičíst zpět moment setrvačnosti příslušné části z iridia. Vyjádříme teď moment oblasti o tvaru iridiových „prstýnků“, ale s hustotou  $(\rho_{\text{Ir}} - \rho_{\text{Cu}})$ , tj. náhrada mědi  $(\rho_{\text{Cu}})$  iridiem  $(\rho_{\text{Ir}})$ . Pro vyjádření  $J'_{\perp}$  je třeba použít Steinerovu větu, která říká, že při rotaci kolem osy neprocházející těžištěm musíme k momentu setrvačnosti připočíst člen  $md^2$ , kde  $d$  je vzdálenost těžiště od osy.

$$J'_{\parallel} = \frac{\pi}{2}(\rho_{\text{Ir}} - \rho_{\text{Cu}})k(r_2^4 - r_1^4),$$

$$J'_{\perp} = \frac{\pi}{4}(\rho_{\text{Ir}} - \rho_{\text{Cu}}) \left[ k(r_2^4 - r_1^4) + \frac{1}{12}k^3(r_2^2 - r_1^2) + 4d^2k(r_2^2 - r_1^2) \right].$$

### Vlastnosti „náhradního“ válce

Napišeme podmínku pro shodnou hmotnost. Hustoty zlata, mědi a iridia označíme postupně  $\rho_{\text{Au}}$ ,  $\rho_{\text{Cu}}$  a  $\rho_{\text{Ir}}$ .

$$\pi\rho_{\text{Au}}lR^2 - \pi\rho_{\text{Cu}}lR^2 = \pi(\rho_{\text{Ir}} - \rho_{\text{Cu}})(r_2^2 - r_1^2)k,$$

$$\frac{\rho_{\text{Au}} - \rho_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Ir}} - \rho_{\text{Cu}}} lR^2 = k(r_2^2 - r_1^2). \quad (\text{r4.2.1})$$

Pro moment setrvačnosti kolem geometrické osy platí následující podmínka:

$$\frac{\pi}{2}\rho_{\text{Au}}lR^4 - \frac{\pi}{2}\rho_{\text{Cu}}lR^4 = J'_{\parallel},$$

$$(\rho_{\text{Au}} - \rho_{\text{Cu}})lR^4 = (\rho_{\text{Ir}} - \rho_{\text{Cu}})k(r_2^4 - r_1^4),$$

$$\frac{\rho_{\text{Au}} - \rho_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Cu}} - \rho_{\text{Ir}}} lR^4 = k(r_2^4 - r_1^4). \quad (\text{r4.2.2})$$

Zbývá vyřešit moment setrvačnosti kolem osy kolmé ke geometrické. Opět napíšeme podmínku, že rozdíl momentů zlatého a měděného válce musí být roven přídatku díky iridiu:

$$\frac{\pi}{4} (\rho_{\text{Au}} - \rho_{\text{Cu}}) \cdot \left( lR^4 + \frac{1}{3} l^3 R^2 \right) = J'_{\perp},$$

$$\frac{\rho_{\text{Au}} - \rho_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Ir}} - \rho_{\text{Cu}}} \cdot \left( lR^4 + \frac{1}{3} l^3 R^2 \right) = k(r_2^4 - r_1^4) + \frac{1}{12} k^3 (r_2^2 - r_1^2) + 4d^2 k (r_2^2 - r_1^2).$$

Dosadíme z rovnic (r4.2.1) a (r4.2.2) za  $k(r_2^4 - r_1^4)$  a  $k(r_2^2 - r_1^2)$ :

$$\begin{aligned} lR^4 + \frac{1}{3} l^3 R^2 &= lR^4 + \frac{1}{12} lk^2 R^2 + 4d^2 lR^2, \\ d^2 &= \frac{4l^2 - k^2}{48}. \end{aligned} \quad (\text{r4.2.3})$$

Dosadíme číselné hodnoty hustot a poměr jejich rozdílů označíme  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Au}} &= 19\,320 \text{ kg/m}^3, & \rho_{\text{Cu}} &= 8\,960 \text{ kg/m}^3, & \rho_{\text{Ir}} &= 22\,420 \text{ kg/m}^3; \\ \alpha &= \frac{\rho_{\text{Au}} - \rho_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Ir}} - \rho_{\text{Cu}}} \doteq 0,7697. \end{aligned}$$

Nejprve vyřešíme rovnice (r4.2.1) a (r4.2.2) tak, že  $k$  budeme považovat za parametr. Podělením rovnic dostaneme

$$R^2 = r_2^2 - r_1^2, \quad r_1^2 = R^2 - r_2^2.$$

Dosazením do rovnice (r4.2.1) získáme řešení

$$r_1^2 = \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha l}{2k} \right) R^2, \quad (\text{r4.2.4})$$

$$r_2^2 = \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha l}{2k} \right) R^2. \quad (\text{r4.2.5})$$

Z podmínek  $r_2 < R$  a  $r_1 \geq 0$  a z definice  $k$  plyne omezení

$$\frac{\alpha l}{2k} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k > \alpha l; \quad k < l.$$

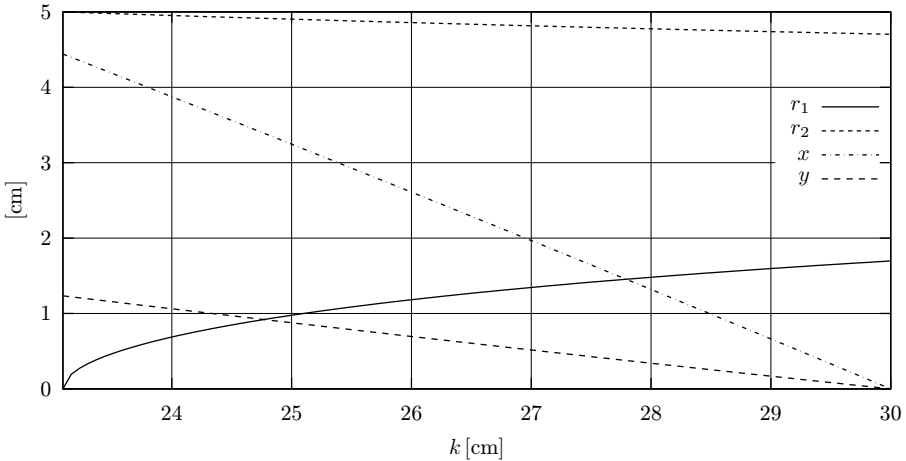
Z tohoto rozsahu si můžeme při výrobě válce vybrat libovolně, ale pro jednu zvolenou hodnotu  $k$  už jsou ostatní ( $d$ ,  $r_1$  a  $r_2$ ) pevně dané.

Vybereme si, vcelku náhodně, třeba  $k = 0,85l = 25,5 \text{ cm}$ . Tím nám podle (r4.2.3), (r4.2.4) a (r4.2.5) vyjde

$$d = 0,2562l = 7,69 \text{ cm},$$

$$r_1 = 0,2173R = 1,09 \text{ cm},$$

$$r_2 = 0,9761R = 4,88 \text{ cm}.$$



Obr. r4.2.2 – Rozsah možných parametrů pro výrobu válce.

Iridium tedy bude tvořit dva prstýnky, každý o délce 12,75 cm s uvedenými vnitřními a vnějšími poloměry. Tyto prstýnky budou posunuty o 7,69 cm od středu válce, resp. budou mezi sebou mít 2,63 cm mezeru.

Pro úplnost přidáváme graf všech možných řešení pro různá  $k$ , viz obrázek r4.2.2. Hodnota  $x$  je mezera mezi iridiovými prstýnky,  $y$  je vzdálenost iridia od bočního okraje válce.

### Dodatek: výpočet momentu setrvačnosti válce

Moment hybnosti hmotného bodu (příp. dostatečně malého objektu) o hmotnosti  $dm$  je

$$dJ = r^2 dm,$$

kde  $r$  je vzdálenost od osy otáčení. V případě válce rotujícího kolem geometrické osy si tento rozdělíme na tenké válcové vrstvy, každou o velmi malé tloušťce  $dr$ . Takováto vrstva má celá stejnou vzdálenost od osy otáčení. Pokud si její poloměr označíme  $r$ , platí pro její hmotnost  $dm = \rho \cdot 2\pi r h \cdot dr$ , kde  $\rho$  je (konstantní) hustota válce a  $h$  jeho výška. Tedy

$$dJ_{\parallel} = r^2 \cdot \rho \cdot 2\pi r h \cdot dr = 2\pi \rho h \cdot r^3 dr.$$

Sečteme tento výraz pro všechny hodnoty  $r$  od nuly do  $R$  (poloměr válce), což je integrál:

$$J_{\parallel} = 2\pi \rho h \cdot \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 h \rho \cdot R^2 = \frac{1}{2} m R^2,$$

kde  $m$  je hmotnost celého válce.

Výpočet momentu kolem osy kolmé ke geometrické je složitější, protože nemáme k dispozici kompletní vrstvy s konstantní vzdáleností od osy. Vyjdeme z toho, že momenty kolem osy  $x$  a  $y$  musí být shodné ze symetrie (osa  $z$  je geometrická osa). Výraz pro moment setrvačnosti integrovaný v kartézských souřadnicích je

$$J_x = \int_V (y^2 + z^2) dm = J_y = \int_V (x^2 + z^2) dm,$$

kde symbolem  $\int_V$  označujeme trojitý integrál přes objem válce. Dále zřejmě platí

$$J_{\perp} = \frac{1}{2} (J_x + J_y) = \frac{1}{2} \int_V (x^2 + y^2 + 2z^2) dm.$$

Integrál můžeme rozložit na známou hodnotu  $J_{\parallel}$  (výraz  $(x^2 + y^2)$  je vzdálenost od geometrické osy) a na integrál přes  $z^2$  (využíváme  $dm = \pi R^2 \rho dz$ ):

$$\begin{aligned} J_{\perp} &= \frac{1}{2} J_{\parallel} + \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \pi R^2 \rho dz = \frac{1}{4} m R^2 + \pi R^2 \rho \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \\ &= \frac{1}{4} m R^2 + \pi R^2 \rho \frac{h^3}{12} = \\ &= \frac{1}{4} m \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right). \end{aligned}$$

**TENZOR SETRVAČNOSTI.** Pro popis rotace kolem obecné osy si už nevystačíme s jediným číslem. Místo toho musíme každé těleso charakterizovat tenzorem setrvačnosti (matice  $3 \times 3$  reálných čísel). Ten popisuje, jak se bude těleso chovat při rotaci kolem jakékoliv dané osy. Nás v tuto chvíli zajímá především fakt, že pokud mají dvě tělesa stejný tenzor setrvačnosti, budou rotovat stejně.

Každé těleso jde v kartézském souřadném systému natočit tak, že jeho tenzor setrvačnosti bude mít nenulové pouze tři prvky na diagonále. Osy souřadné soustavy pak mají směr tzv. hlavních os tělesa. V případě rotačně symetrického tělesa je geometrická osa taktéž hlavní osou. Zbylé dvě hlavní osy můžeme umístit kamkoliv do kolmé roviny (kvůli symetrii tělesa to nemá vliv).

Pokud najdeme tři momenty setrvačnosti vzhledem k hlavním osám tělesa, máme určen celý tenzor (zbylé členy jsou nulové). Z toho plyne, že pro kompletní určení tenzoru setrvačnosti válce stačí moment setrvačnosti při rotaci kolem geometrické osy a kolem libovolné osy k ní kolmé.



## Úloha 4.3 – Kámen, nůžky, papír, ještěrka... (3b)

### Zadání:

MatFyzáci Adam a Bohouš se nemohli rozhodnout, kam půjdou na oběd. A tak se rozhodli, že si „stříhnou“. Ovšem hrát klasický kámen, nůžky, papír jim přišlo málo zajímavé. Proto se dohodli, že přidají další symboly.

Původní kámen, nůžky, papír má tu vlastnost, že všechny symboly jsou stejně výhodné. Dále platí, že mezi žádnými dvěma symboly nenastává remíza. Adam s Bohoušem by rádi věděli, kolik symbolů mohou přidat, aby se tyto vlastnosti zachovaly.

Své tvrzení nezapomeňte dokázat.

### Řešení:

Nejprve si sjednotíme terminologii. Symboly hry budeme reprezentovat množinou bodů  $V$ , nazvěme je vrcholy. Vztahy ve hře budeme chápat jako dvojici bodů  $(a, b)$ ,  $a, b \in V$  a budeme je nazývat množinou orientovaných hran  $E$ .

Slovo „orientovaná“ zde znamená, že v této dvojici záleží na pořadí. Pokud řekneme, že  $(a, b) \in E$ , znamená to, že symbol  $a$  poráží symbol  $b$ . Dvojici  $(V, E)$  nazvu grafem  $G$ . Chci-li vyloučit možnost remízy, musím dobře definovat vztahy mezi každými dvěma symboly, tedy  $(a, b) \notin E \Leftrightarrow (b, a) \in E$ . Graf  $G$  tedy bude úplný – mezi každými dvěma vrcholy musí existovat hrana. Přesněji vyjádřeno, remíza může nastat ve chvíli, kdy oba hráči zvolí stejný symbol. Proto hrany  $(a, a) \notin E$ .

Každé dva symboly by měly být stejně výhodné, tedy z každého bodu by měl vést stejný počet hran, jako počet těch, které do něj vchází.

$$\forall x \in V | (x, a) | = | (b, x) |, (x, a), (b, x) \in E.$$

Jelikož každý vrchol  $x$  se tak nalézá v  $n - 1$  hranách, z čehož  $(n - 1)/2$  hran z něj vychází a také  $(n - 1)/2$  hran do něj vstupuje, je jasné, že číslo  $n - 1$  musí být sudé a  $n$  je pak lichým číslem.

Nyní jsme odvodili, že jakýkoliv graf  $G$  na lichém počtu vrcholů představuje korektní hru. Pro úplnost bychom však měli dokázat, že taková hra vznikla jako rozšíření původní hry, tedy že každý graf  $G$  na  $n > 3$  vrcholech, kde  $n$  je liché, obsahuje jako svůj podgraf orientovaný cyklus o délce 3. Podgraf grafu  $G = (V, E)$  je

$$(V_p, E_p), V_p \subseteq V, E_p \subseteq \{(a, b) | a, b \in V_p, (a, b) \in E\},$$

cyklus je

$$C = \{(c_0, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{n-2}, c_{n-1}), (c_{n-1}, c_0)\} \subseteq E.$$

V našem případě je to nějaká množina  $\{(a, b), (b, c), (c, a)\}, a, b, c \in V$ . V grafu existuje  $(n - 1)/2$  cyklů délky  $n$ . Při rovinném nakreslení grafu bychom mohli nejprve vykreslit první cyklus, který tvoří postupně vrcholy  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ , a následně zjišťovat, jaká je orientace hran  $(c_i, c_{i+k})$  pro  $k \in \{2, \dots, (n - 1)/2\}$ . Zjistíme přitom, že buď tvoří námi hledaný cyklus hrany

$$(c_i, c_{i+k-1}), (c_{i+k-1}, c_{i+k}), (c_{i+k}, c_i),$$

nebo najdeme cyklus

$$(c_i, c_{i+(n-1)/2}), (c_{i+(n-1)/2}, c_{i+(n+1)/2}), (c_{i+(n+1)/2}, c_i).$$

Tím je důkaz dokončen. Jelikož původní hra má 3 vrcholy, počet přidávaných vrcholů  $k = n - 3$  musí být sudý (a přirozeně kladný). Mohli bychom také řešit otázku, jakým způsobem můžeme dobře definovat orientaci hran, aby hra splňovala všechny požadavky.

Algoritmus sestavení množiny hran je však triviální.

1.  $V := \{1, \dots, n\}$ ,  $E := \emptyset$ , vyber náhodně  $x \in V$ .
2. Pokud už je graf úplný, skonči.
3. Vyber náhodně  $y \in E$ .
4. Pokud do  $y$  už vede dostatek hran, tedy

$$|\{z \mid (z, y) \in E\}| \geq \frac{(n-1)}{2},$$

jdi do bodu 3.

5. Pokud  $(x, y) \in E$  nebo  $(y, x) \in E$ , jdi do bodu 3.
6.  $E := E \cup (x, y)$ .
7.  $x := y$ .
8. Jdi do bodu 2.

Můžeme tedy projít vrcholy v libovolném pořadí a za sebou zanechávat orientovanou cestu a pouze před vstupem do každého bodu ověřovat, že přidáním nové orientované hrany neporušíme žádný z požadavků uvedených výše. Jelikož do každého bodu vstoupíme a vystoupíme stejným počtem hran (do bodu, ze kterého jsme začínali, povedeme poslední hranu), budou všechny symboly stejně výhodné. Žádný přitom nemůžeme vynechat, protože bychom tak nedosáhli maximálního počtu hran.

*Radim*

## Úloha 4.4 – Skořáčky (2b)

### Zadání:

*Znáte hru skořáčky? Je to jednoduché, pod jednu skořáčku se dá čokoláda a skořáčky se pak zamíchají. Vaším úkolem je pak uhádnout, pod kterou skořáčkou se čokoláda skrývá. Nemáte šanci sledovat míchání, proto je vaší jedinou možností náhodně zvolit jednu ze tří možností.*

*Představte si, že jste si vybrali jednu ze tří možností. Skořápkář pak odhalil jinou skořáčku a ukázal, že tam čokoláda není, a dal vám možnost změnit váš tip. Je pro vás výhodné svůj tip změnit?*

*Pokud si nevíte rady, zkuste se zamyslet nad případem, kdy hraje se 42 skořáčkami a po vašem tipu je odhaleno 40 skořápek, pod kterými nic není. Jaké jsou vaše šance v tomto případě?*

### Řešení:

Na první pohled by se mohlo zdát, že pokud si náhodně vybírám ze dvou možností, tak je pravděpodobnost, že si vyberu odměnu,  $1/2$ . To je sice pravda,

ale nesmíme zapomínat, že už jsme si jednou vybírali. Ale nepředbíhejme a zkusme se zamyslet na tímto problémem pořádně.

Pokud si v prvním případě vybíráme, vybereme si čokoládu s pravděpodobností  $1/3$ . S pravděpodobností  $2/3$  si vybereme prázdnou skořápku. Pokud si vybereme prázdnou skořápku, tak jak asi tušíte, na stole zůstaly dvě skořápky, pod jednou je čokoláda a pod druhou není nic. V tomto případě musí skořápkář odhalit tu, kde nic není. A pak nám dá vybrat, zda si chceme nechat svou volbu, kde, jak nyní předpokládáme, nic není, a nebo volbu změnit na skořápku, kde musí být čokoláda. Jak jde vidět, je v tomto případě, který nastane s pravděpodobností  $2/3$ , vhodnější volbu změnit.

Naopak s pravděpodobností  $1/3$  jsme si čokoládu vybrali již v prvním kole. Pak na stole zůstaly dvě prázdné skořápky a skořápkář vybere libovolně jednu a tu odhalí. Pokud svůj tip změnit, tak si s pravděpodobností  $1/3$  čokoládu nevybereme.

Zkusme se nyní zamyslet nad dalšími strategiemi. Pokud bychom si na začátku náhodně zvolili jednu ze tří skořápek, vyhraje čokoládu s pravděpodobností  $1/3$ . Předpokládejme, že se rozhodneme ignorovat druhé kolo – to znamená, že zůstaneme u svého tipu. Pak se pravděpodobnosti nezmění a my vyhraje s pravděpodobností  $1/3$ .

Co se stane, pokud si na začátku druhého kola náhodně zvolíme? Pak máme volbu ze dvou možností, a tedy pravděpodobnost, že si vybereme čokoládu je  $1/2$ . Možná se vám zdá divné, že pokud bychom si vždycky „náhodně vybrali“ původní možnost, čili nezměnili svůj tip, tak v jednom případě nám vyšla pravděpodobnost výhry  $1/3$  a v druhém  $1/2$ . Ovšem v tomto případě se nejedná o náhodný výběr.

Správné řešení tohoto problému je, jak většina z vás správně předpokládala, svůj tip změnit. Stejně budeme postupovat i v případě, že na stole leží 42 skořápek. Zde bude rozdíl ještě znatelnější. Pokud mi stále nevěříte, zkuste si rozepsat jednotlivé případy, které mohou nastat. Pokud si spočítáte poměr těch, kdy vyhraje a kdy ne, tak zjistíte, že je opravdu nejvhodnější svůj tip změnit.

(R)adim

## Řešení témat

### Téma 1 – Nejmenší Nevybrané

Řešitelé a řešitelky! Proběhlo další kolo soutěže *Nejmenší nevybrané*! Tipovaná čísla byla:

2, 3, 4, 6, 7,

a šťastná výherkyně je Mgr.<sup>MM</sup> Zuzana Dočekalová s číslem 2. Gratulujeme!

Zároveň vyhlasujeme *třetí a poslední* kolo soutěže *Nejmenší nevybrané* ! Pro nízkou účast ve druhém kole Vám připomínáme, že k tipnutí si stačí pouhý e-mail obsahující jediné číslo! Hraje se o neuvěřitelných **5 000 000  $\mu$ bodů!**

K tématu nám přišlo několik zajímavých článků a postřehů. Omlouváme se vám za zpoždění, se kterým vám předkládáme články našich řešitelů.

Dr.<sup>MM</sup> Štěpán Šimsa vytvořil on-line verzi této hry na stránce [1], kde si ji můžete zahrát. Níže si můžete přečíst jeho článek, kde mimo jiné rozebírá výsledky a specifika své verze hry.

Dr.<sup>MM</sup> Jakub Töpfer rozebírá ve svém článku různé pohledy na počet hráčů a hry s prohlášením čísla ještě před tahem. Kromě shrnutí zkušeností s těmito hrami předkládá i další zajímavou myšlenku – možnost situace, ve které nikdo nevyhraje, ale nikdo není ochoten změnit svou volbu. Takové situace stojí za zamýšlení – může k nim dojít i při jiném počtu hráčů než 6? Mohlo by se to stát, i kdyby hráči neoznamovali přímo své volby, ale svou osobní distribuci pro náhodný výběr? (Všimněte si, že „vždy 1“ je také distribuce.)

Dr.<sup>MM</sup> Alena Bušáková se ve svém článku zamýšlí nad způsoby volby a odhaduje rozložení čísel jak teoreticky, tak na základě dat z on-line hry Dr.<sup>MM</sup> Šimsy.

Jako další směry bádání se nabízí sbírání dat pro velké skupiny hráčů. To je možné buď simulací virtuálních hráčů na počítači, nebo s menší skupinou skutečných hráčů, z nichž každý bude mít několik tipů.

*Tomáš*

## Nejmenší nevybrané

*Dr.<sup>MM</sup> Štěpán Šimsa*

*Pozn. red.: redakčně upraveno*

### Problematika

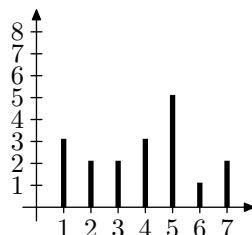
V tomto článku se budu zabývat jak psychologickým, tak částečně matematickým rozborem hry *Nejmenší nevybrané* na základě výsledků ze stránky [1]. Vytvořil jsem ji přímo kvůli tomuto tématku, abych měl zdroj, ze kterého můžu dělat závěry.

Ovšem hra, jejíž simulaci jsem vytvořil, se přece jenom liší od hry, která se hraje zde. V první řadě se liší informací o počtu hráčů. Zatímco ve hře po internetu všichni hráči vědí, že hraje patnáct lidí, v této hře nikdo neví, kolik lidí bude hrát. Druhý rozdíl je ve skupině lidí. Ve hře po internetu se skupina, která hru hraje, obměňuje. Jenom pár lidí hraje hru vícekrát. Narozdíl od toho, tady hrajou lidi stejní. Tedy předpokládám, že alespoň většina (nejspíše nějakí lidé, kteří číslo poslali, další posílat nebudou a možná dokonce pošle číslo někdo, kdo ho minule neposílal).

### Psychologický rozbor

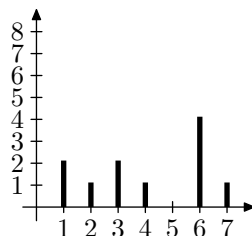
V této části článku se budu snažit psychologicky rozebrat výsledky ze hry po internetu a udělat z toho závěr. Nejdříve rozeberu čísla 1, 2, 3 a 4.

1: V grafu jsem se pokusil vyjádřit, kolik lidí v jednotlivých hrách dalo číslo jedna (na vertikální ose, klasicky osa  $y$ , je počet hráčů, kteří číslo v jednotlivých hrách dali a na horizontální ose, klasicky osa  $x$ , jsou jednotlivé hry):



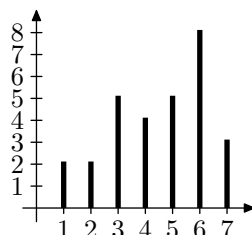
Jak je vidět z grafu nejsou u čísla jedna přílišné výkyvy v počtu lidí, kteří ho dávají. Nic zvláštního se mi k jedničce vyzkoumat nepodařilo. Přejde mi, že její výskyt je celkem očekávaný.

2: Tady je to naopak velice zajímavé. Dvojka skoro na střídačku vyhrávala. Vidím pro to dva důvody. První je, že si hráči říkali možná něco jako: „Dvojka vyhrává každou chvíli, tu bude dávat každý.“



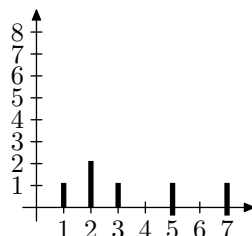
Nebo třeba: „Dvojka vyhrála předminule, to by byla moc velká náhoda, aby vyhrála znovu.“ Druhý důvod přisuzuji tomu, že jejich pozornost odpoutala trojka. To rozvedu za chvíli.

3: Zde je to zajímavé opravdu nadmíru. Z grafu je vidět, že trojku dávalo opravdu spoustu lidí a se zvyšujícím se počtem her se počet hráčů, kteří jí dávali, spíše zvedal než klesal. Pro to mám taktéž dvě vysvětlení. První je, že si možná hráči říkali: „Trojku dalo minule tolik lidí. Teď už jí určitě nikdo nedá.“



Druhé vysvětlení je, že si říkali možná něco jako: „Pořád vyhrává dvojka a čtyřka a trojka nevyhrála ani jednou. Teď už určitě musí vyhrát.“ Myslím si, že kdyby si neříkali to druhé, pak by se z trojky nestala „legenda“ a lidi by si neříkali ani to první. Ale obojí jsou samozřejmě jen domněnky a mohli si říkat úplně něco jiného (třeba se vůbec neovlivňovali předchozími hrami).

4: Tohle je taky velice zajímavé. Čtyřku dávalo málo lidí, ještě méně než dvojku. Zajímavé je hlavně to, že jí dvakrát nikdo nedal po tom, co vyhrála. Myslím, že důvody jsou podobné jako u dvojky s tím rozdílem, že „dvojka je přece jenom menší, a tak je větší pravděpodobnost, že vyhraje“. Jiné důvody, než ty již zmíněné u dvojky a než tento, už nemám.



### Závěr

Nyní se pokusím udělat závěr z nastřádaných informací. Objevil jsem zajímavou věc. Pokud neustále vyhrávají 2 čísla a číslo, které je *mezi* těmito čísly (pokud nějaké je) nevyhrává, dává ho spoustu lidí. Také jsem si všiml, že většinou stejné číslo nevyhraje dvakrát po sobě a čísla, která vícekrát vyhrávají, bývají dosti zavržovaná.

Všechna tato pozorování jsou ale neověřená a jen hádám, jak by to mohlo platit.

## Nejmenší nevybrané

*Dr.<sup>MM</sup> Jakub Töpfer*

*Pozn. red.: výtah z příspěvku*

Při mém rozhodování mi nejvíce vadí, že nevím, kolik hráčů se zúčastní. Nízká účast v prvním kole mě opravdu překvapila. Dodatečně jsem ale zjistil, že někteří dokonce poslali příspěvek, ale nezvolili žádné číslo. Předpokládám, že počet hrajících se tentokrát ještě o trochu sníží, ale už ne o moc. Mladí řešitelé mají poslední dobou tendenci přispívat i během roku.

Psychologicky existuje dobrá strategie pro hráče hrajícího v nějakém uzavřeném kruhu lidí. Ještě před volbou čísla prohlásí, jaké číslo zvolí. Může to být třeba i 1. Ostatní nemají důvod mu nevěřit. Pokud tedy někdo z nich zvolí 1, ví, že určitě nevyhraje. Pokud zvolí číslo vyšší, má stále teoretickou možnost. Když by se hrálo o něco velmi podstatného, bylo by možné tímto způsobem dost přesvědčivě vyhrávat.

Pokud by hráči tato strategie nevycházela s jedničkou, může zkusit nějaké jiné číslo. Ostatní pak budou dávat čísla nižší. Číslo tedy musí být zvolené tak, aby se ostatní se svými nízkými čísly dost shodovali, ale aby to zároveň nebylo na první pohled patrné. Odhadoval bych něco jako  $2/5$  počtu hráčů.

Ještě doplním, že tuto hru jsme (pravděpodobně díky M&M) hráli docela dost na PŠMF. Nejdříve jsme dost dlouho hráli ve velké skupině. Pak jsme ale chvíli hráli i ve skupině šesti lidí. A to verzi, kdy jsme neznali volby ostatních, i kdy jsme je znali. Když jsme věděli, co ostatní dávají, podařilo se nám zaseknout na situaci 1, 1, 2, 2, 3, 3. V tuto chvíli nikdo nechtěl své číslo změnit a všichni dávali stále dokola to samé. Existují tedy i zablokované situace.

## Nejmenší nevybrané

*Dr.<sup>MM</sup> Alena Bušáková*

*Pozn. red.: výtah z příspěvku*

Jako statistiku jsem použila, s jeho laskavým svolením, Štěpánových 7 her pro 15 hráčů (viz. [1]). 6 her splňuje to, že  $2/3$  tipů jsou čísla do poloviny počtu tipujících hráčů (7,5), u té sedmé to kazí akorát jeden tip 9.

Předpokládejme tedy, že  $2/3$  hráčů tipne číslo ve spodní polovině počtu tipujících. Spočítejme, kolik existuje možností, jak budou tipy rozloženy ( $p$  je počet tipujících lidí,  $k$  je počet hráčů, kteří tipovali čísla do  $n$ ):

$$C'_k(n) = C'_{2p/3}(p/2) = \binom{p/2 + 2p/3 - 1}{2p/3}$$

tedy označuje počet možností, jak lze daná čísla vybrat.

Můžeme také spočítat, kolik z nich bude splňovat podmínku, že se „vymlátí“ (po dvou či po víc tipech), a nevzejde z nich vítěz. Například pro 6 hráčů lze čísla rozdělit 15-ti způsoby (pokud předpokládáme, že  $2/3$  hráčů tipovaly čísla ve spodní polovině počtu hráčů), z čehož 6 kombinací splní, že všichni hráči,

kteří tipovali číslo do poloviny počtu hráčů, se „vybijí“ a vyhraje někdo s tipem nad  $1/2$ . To znamená, že jen ve 40% případů vyhrávají pro 6 lidí tipy nad polovinu počtu lidí, co hrají. A i přesto, že s vyššími čísly než mnou uvedených 6-ti, bude tato pravděpodobnost, že se všechny tipy do  $1/2$  vybijí, sází na tuto strategii ve Štěpánově hře celá třetina hráčů (opět by bylo zajímavé zkoumat, zda jsou to titíž v průběhu dalších kol).

Kdyby se této strategie někdo (například po přečtení mého příspěvku, protože usoudí, že to není až tak výhodné) vzdal, příbude zase lidí tipujících čísla pod  $1/2$  počtu hráčů, čímž se zase zvýší šance na úspěch těm, kdo u této strategie zůstanou. Ještě dodejme, že úspěšnost strategie tipovat čísla nad  $1/2$  počtu hráčů s tím, že ti pode mnou se vymlátí, klesá s počtem hráčů rapidně. Například pro 12 hráčů je 6435 možností, jak  $2/3$  hráčů tipne (v té spodní polovině), ale jen 188 z rozložení se „vymlátí“, tedy šance, že nikdo z nich nevyhraje, jsou pouhá 3%. Kdyby tohle věděli lidi v Štěpánově 15-tihráčové hře, asi sotva kdo by tipoval čísla tak vysoká jako 9 a 10.

### Rozložení tipů

Pro 100 nebo 1000 hráčů by rozložení tipů však vypadalo jistě jinak. Hranice, pod níž by byla většina tipovaných čísel, by nejspíš byla mnohem nižší než polovina, tedy 50 či 500. Bylo by velmi zajímavé mít prostředky k tomu uspořádat takovou hru třeba pro 200 lidí; byla bych velmi zvědavá na výsledky.

Takže můj námět na další přemýšlení: zkuste sehnat 1000 hráčů, nebo se aspoň zamyslet, jak by to vypadalo podle vás.

*Pozn. red.: Nezkusili byste větší množství hráčů alespoň nasimulovat?*

### Reference

[1] <http://mam-xv-tema1.ic.cz/>

## Téma 5 – Deratizace

Na pomoc Hammelským radním přišel tentokrát pouze jeden příspěvek. Napsala ho Bc.<sup>MM</sup> Michaela Kochmanová. Přináší jednak shrnutí a rozšíření již objevených řešení a navíc se zabývá zcela novou kapitolou – sklepeními ve tvaru platónských těles. Tuto část jejího článku nyní otiskujeme.

### Platónská tělesa

*Bc.<sup>MM</sup> Michaela Kochmanová*

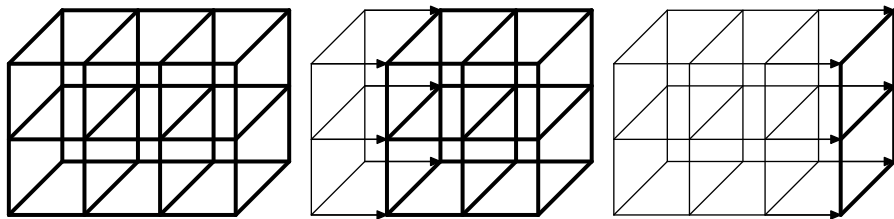
Hammelským, libujícím si v extravaganci, obyčejné sklepy s plochými patry nestačily – a tak se začali předhánět v různých bláznivých prostorových podzemních komplexech. . .

### Čtyřstěn

Čtyři stěny, čtyři vrcholy, z každého vrcholu vychází tři hrany. Proto, vyjdeme-li z jednoho vrcholu všemi třemi směry (tj. třemi krysaři), potřebujeme čtvrtého, který zderatizuje zbylý trojúhelník.

## Šestistěn (krychle)

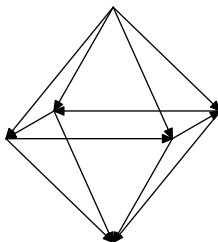
Podstava má čtyři spojnicové body s pláštěm, proto jsou potřeba čtyři krysaři, kteří půjdou horizontálně (vertikálně) a pátý, který bude průběžně deratizovat vertikálně (horizontálně). Pokud je naskládáno víc krychlí vedle sebe či na sebe a tvoří kvádr, označíme jeho nárys, půdorys a bokorys  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Pak vezmeme dvojici nejmenších čísel z  $a$ ,  $b$ , nebo  $c$ . Počet potřebných krusařů je  $A \cdot B + 1$ , kde  $A$  a  $B$  je nemnější dvojice. Budou postupovat jako u krychle, všichni jdou horizontálně (vertikálně) a jeden jde vertikálně (horizontálně).



Obr. t5.1 – Šestistěn.

## Osmistěn

Šest vrcholů, vyjdeme-li z jednoho vrcholu, půjdeme čtyřmi směry – čtyři krysaři plus jeden, který zderatizuje „okružní“ čtverec, na kterém stojí, aby mohli pokračovat do posledního vrcholu.



Obr. t5.2 – Osmistěn.

## Dvacetistěn

Dvanáct vrcholů, třicet hran. Z každého vrcholu vychází pět hran, avšak musíme si uvědomit, že každá stěna je tvořena třemi hranami, které vytváří trojúhelník. Pokud z jednoho bodu vyšleme pět krysařů, šestý opět dodělá zbytek, přidáme čtyři (tj. celkově deset) a tím umožníme každému se posunout o krok dál, nyní už jsme za polovinou, máme pět přebytečných a nic nám nebrání doderatizovat dvacet stěn.

## Koule v euklidovském zobrazení

Pro větší jednoduchost to přirovnám k zeměkouli a jejím rovnoběžkám a polodívkům. Dalo by se to rozložit na plášť, který by vytvářel mřížku, takže by



stačilo pouze zjistit, jestli je více rovnoběžek (i s oběma póly) což je  $r$  nebo více poledníků označíme  $p$ , pak k nim stačí pouze přičíst jednoho krysaře, kdy  $p$  (nebo  $r$ ) krysařů půjde po polednicích (nebo rovnoběžkách) a ten zbývající po rovnoběžkách (nebo polednicích).

*Honza*

## Konference Hříběcí 2009

V březnu tohoto roku jsme uspořádali asi pro 20 řešitelů tradiční soustředění. Na tomto soustředění, jak bývá zvykem, proběhla konference. Otiskujeme dva příspěvky, které nám přišly a těšíme se na další.

### Tenzor setrvačnosti

*Mgr.<sup>MM</sup> Kateřina Honzáková, Prof.<sup>MM</sup> Alžběta Pechová*

Cílem naší konfery bylo experimentálně určit tenzor setrvačnosti nepravidelného tělesa. Nejprve jsme se ale seznámily s tím, co to jsou tenzory, dále jsme se naučily počítat tenzor setrvačnosti různých útvarů a těles a poté jsme se již vrhly na pokusy.

#### Teoretická část

Nejprve tedy krátce několik slov o tenzorech. Tenzory jsou takové fyzikální veličiny, které mají v různých směrech různé vlastnosti. Příkladem mohou být některé materiálové konstanty jako např. modul pružnosti, index lomu, elektrická a tepelná vodivost nebo permitivita a permeabilita. Tenzor zapisujeme jako matici  $n \times n$  (v  $n$ -rozměrném prostoru). Takže v nerelativistickém světě má devět složek (matice  $3 \times 3$ ).

*Pozn. red.: Ve fyzice se můžeme setkat také se složitějšími tenzory (například v mechanice kontinua), které mohou mít až  $n^k$  složek.*

Platí, že když tenzor vynásobíme vektorem, dostaneme zase vektor a když ho vynásobíme dvěma vektory, tak dostaneme číslo. Tenzor setrvačnosti má tedy devět složek a je symetrický. Takto vypadá v obecném tvaru:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}. \quad (\text{kII} - 1.1)$$

Pokud jej známe pro dané těleso, již můžeme určit velikost momentu setrvačnosti podél libovolné osy. Pokud prochází těžištěm, pak tenzor dvakrát vynásobíme jednotkovým směrovým vektorem osy.

$$\mathbf{I} = \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{v}_s. \quad (\text{kII} - 1.2)$$

Neprochází-li osa těžištěm, určíme nejprve moment setrvačnosti podél rovnoběžné osy, která ale těžištěm prochází a výsledný moment setrvačnosti podél původní osy vypočítáme pomocí Steinerovy věty.

$$I = I_i + md_i^2. \quad (\text{kII} - 1.3)$$

Jednotlivé složky tenzoru setrvačnosti získáme integrováním přes objem tělesa.

$$\mathbf{I}_{i,j} = \int_{x_1} \int_{x_2} \int_{x_3} \varrho [\delta_{i,j}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_i x_j] dx_1 dx_2 dx_3. \quad (\text{kII} - 1.4)$$

*Pozn. red.:*  $x_1, x_2$  a  $x_3$  značí popořadě osy  $x, y$  a  $z$ .

Takto postupně získáme všechny jeho složky. Počátek souřadného systému volíme v těžišti a z rozměrů tělesa určíme meze integrálů. Většinou jsme počítaly v kartézských souřadnicích, ale někdy bylo výhodnější zavést souřadnice polární, hlavně u rotačních těles.

My jsme se zabývaly výpočty pro tyčku, trojúhelník, obdélník, kvádr, válec, kužel, elipsoid a paraboloid. Jako příklad uvádíme výpočet několika složek a výsledný tenzor u obdélníku.

*Pozn. red.:* Při výpočtu je uvažován obdélník, jehož strany jsou  $a$  ve směru osy  $x$  a  $b$  ve směru osy  $y$ .

$$\mathbf{I}_{i,j} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \varrho [\delta_{i,j}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_i x_j] dx_1 dx_2,$$

$$\mathbf{I}_{11} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \varrho [(x_1^2 + x_2^2 + 0) - x_1 \cdot x_1] dx_2 dx_1 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \varrho x_1^2 dx_2 dx_1,$$

$$\mathbf{I}_{11} = \int_{-a/2}^{a/2} \varrho \frac{b^3}{12} dx_1 = \varrho \frac{ab^3}{12} = \frac{1}{12mb^2},$$

$$\mathbf{I}_{12} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \varrho x_1 x_2 dx_2 dx_1 = 0,$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}. \quad (\text{kII} - 1.5)$$

Dále ještě uvádíme některé vypočítané výsledky:

– tenzor setrvačnosti tyčky (osa tyčky prochází osou  $x$ ):

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{kII} - 1.6)$$

- tenzor setrvačnosti kvádru (kvádr je orientován tak, že strany  $a$ ,  $b$  a  $c$  jsou ve směru os  $x$ ,  $y$  a  $z$ ):

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}, \quad (\text{kII} - 1.7)$$

- tenzor setrvačnosti válce (osa válce prochází osu  $z$ ):

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(v^2 + 3R^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(v^2 + 3R^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{kII} - 1.8)$$

- první složka tenzoru setrvačnosti rotačního paraboloidu:

$$\mathbf{I}_{11} = \frac{8}{21}ma^2, \quad (\text{kII} - 1.9)$$

- tenzor setrvačnosti elipsoidu:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}. \quad (\text{kII} - 1.10)$$

Výpočet pro obecné rotační těleso, vytvořené rotací křivkou  $f(x)$  (symetrické podél osy  $y$ ) podél osy  $x$ :

$$\mathbf{I}_{i,j} = \int_{-a}^a \int_0^{f(x)} \int_0^{2\pi} r \varrho [\delta_{i,j}(r^2 + x^2) - x_i x_j] d\varphi dr dx. \quad (\text{kII} - 1.11)$$

## Praktická část

Nakonec jsme uskutečnily dva pokusy, jednak jsme ověřovaly teoreticky vypočítané hodnoty momentů setrvačnosti pro kvádr a válec a pak jsme pomocí experimentu určovaly tenzor setrvačnosti nepravidelného tělesa, za které jsme si zvolily šišatou bramboru.

K měření jsme si sestavily aparaturu. Na špejli, kterou jsme položily vodorovně, jsme umístily jednak měřené těleso a pak také cívku s nití tak, aby se cívka vůči špejli neprotáčela. Na konec nití jsme přivázaly menší závaží. Tuto aparaturu jsme umístily do určité výšky a nechaly závaží padat. Tím se odmotávala nit a špejle s tělesem se otáčela. Měřily jsme čas, za který dopadne závaží na zem.

Podle zákona zachování energie platí

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (\text{kII} - 1.12)$$

Rychlost dopadu a úhlovou rychlost otáčení si vyjádříme pomocí výšky umístění špejle, času dopadu závaží a poloměru cívky.

Moment setrvačnosti v rotační kinetické energii je ale součet momentu setrvačnosti tělesa a momentu setrvačnosti samotné cívky nití (její rozměry již nejsou zanedbatelné), takže jsme nejprve měřily bez tělesa, čímž jsme určily moment setrvačnosti samotné cívky, který pak od ostatních naměřených momentů setrvačnosti musíme odečíst.

Odtud můžeme vypočítat velikost momentu setrvačnosti tělesa

$$I = \frac{mr^2(gt^2 - 2h)}{2h} - I_0. \quad (\text{kII} - 1.13)$$

### Ověření platnosti tenzoru setrvačnosti kvádrů a válců

Tělesa jsme si vyrobily z brambor, díky čemuž pak šla dobře napíchnout na špejli. Posuvným měřítkem jsme změřily rozměry těles a pak jsme také určily jejich hmotnost. Z těchto údajů jsme vypočítaly moment setrvačnosti podél těch os, podél kterých jsme měřily. Tím nám vyšel jeden údaj pro moment setrvačnosti, druhý jsme vypočítaly přímo z měření popsáním výše.

U obou měření jsme určily standardní odchylku. U měření rozměrů, výšky umístění měřicí aparatury a hmotnosti jsme odhadly chybu měřících přístrojů, čas jsme měřily vždy pětkrát a poté vypočítaly statistickou chybu, do které jsme pak ještě zahrnuly hrubou chybu měření způsobenou rozdílnou reakční dobou člověka (při pouštění stopek, když víme, kdy pustíme závaží a při dopadu, který sledujeme a nevíme, kdy dopadne). Určení momentu setrvačnosti z rozměrů bylo přesnější, poněvadž nejméně přesně jsme měřily čas. Pro kvádr jsme provedly tři měření a to podél osy  $y$ , osy  $z$  a tělesové úhlopříčky a pro válec dvě měření, podél osy  $x$  a osy  $z$ .

	$J_1$	$\sigma J_1$	$J_2$	$\sigma J_2$
Kvádr				
osa $y$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-8}$
osa $z$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-8}$
uhlopříčka	$3 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-8}$
Válec				
osa $x$	$6 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-8}$
osa $z$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-8}$

Tabulka kII-1.1: Výsledky měření tenzoru setrvačnosti kvádrů a válců.

V tabulce kII-1.1 jsou hodnoty  $J_1$  vypočítané z naměřených hodnot času a ostatních parametrů měřicí aparatury a hodnoty  $J_2$  jsou vypočítané podle teoretických vzorců z naměřených rozměrů.

### Určení tenzoru setrvačnosti brambory

U vybrané brambory, která měla velmi nepravidelný tvar, jsme nejprve zavedly souřadný systém (osy  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) s počátkem v těžišti. Pak jsme prováděly měření momentu setrvačnosti podél námi zvolených os. Chybu tohoto měření jsme vypočítaly stejným způsobem jako v předchozím pokusu. Měření jsme provedly šest, protože tenzor setrvačnosti je symetrický a má tedy jen šest různých složek.

směrový vektor osy otáčení	$J_1$	$\sigma J_1$
(1,0,0)	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
(0,1,0)	$3 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$
(0,0,1)	$8 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
(1,1,-1)	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
(1,-1,-1)	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
(-1,1,-1)	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$

Tabulka kII-1.2: Výsledky měření tenzoru setrvačnosti brambory.

Z šesti experimentálně určených momentů setrvačnosti jsme vypočítaly jednotlivé složky tenzoru setrvačnosti brambory. Moment setrvačnosti se rovná tenzoru setrvačnosti vynásobeném dvěma normovanými směrovými vektory osy otáčení

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (\text{kII} - 1.14)$$

$$\mathbf{v}_s = (x, y, z), \quad (\text{kII} - 1.15)$$

Z toho jsme dostaly šest rovnic pro šest neznámých, odkud jsme již snadno určily jednotlivé složky tenzoru.

Experimentálně určený tenzor setrvačnosti brambory

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 10^{-5} & 1 \cdot 10^{-4} & 1 \cdot 10^{-4} \\ 1 \cdot 10^{-4} & 3 \cdot 10^{-4} & 9 \cdot 10^{-5} \\ 1 \cdot 10^{-4} & 9 \cdot 10^{-5} & 8 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}. \quad (\text{kII} - 1.16)$$

*Pozn. red.: Naměřené výsledky nejsou zapsány zcela nejšťastněji. Pokud se někde uvádějí naměřená data a není u daného čísla uvedena chyba měření, automaticky se předpokládá, že chyba měření je polovina neuváděného řádu. Chyby je tak lepší uvádět ve tvaru např.  $m = (1,42 \pm 0,07)$  g.*

*Jak je vidět z textu, tak autorky dosáhly při některých měřeních mnohem menších chyb než je polovina neuváděného řádu. Zaokrouhlování zde tedy nebylo na místě.*

Podrobné vysvětlení, jak je vhodné zpracovávat měření a uvádět výsledky, můžete nalézt například v M&M ročník 14, číslo 1, str. 5 a 6.

## Závěr

Toto téma jsme si vybraly, jelikož nás zaujalo a zatím jsme se s tenzory neselekaly. Byly jsme s naší prací spokojeny, jelikož jsme se dozvěděly něco nového, co jsme ještě neuměly počítat a také měla jak část teoretickou, tak i část experimentální, čímž byla zajímavá.

## Matematické vzorce pro goniometrické funkce

*Dr.<sup>MM</sup> Štěpán Šimsa*

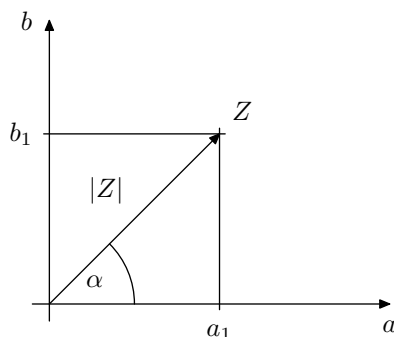
Na této konferenci jsem se zabýval goniometrickými funkcemi. Mým úkolem bylo odvodit některé vzorečky a dozvědět se více na téma goniometrických funkcí. Nejdříve jsem si vyjádřil funkce sinus a kosinus pomocí exponenciálního tvaru komplexních čísel a poté jsem se na základě toho pokusil vyjádřit některé vzorce typu  $\sin(\alpha + \beta)$ . Na konci jsem se zabýval ještě goniometrickými funkcemi v těživých čtyřúhelnících.

Pro začátek bych ještě rád zmínil, že funkce sinus je lichá a funkce kosinus sudá. Platí tedy:

$$\sin \alpha = -\sin(-\alpha),$$

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha).$$

## Goniometrické funkce s využitím komplexních čísel



Obr. kII-2.1 – Komplexní číslo v Gaussově rovině.

Komplexní číslo se dá vyjádřit několika způsoby. Já využiji goniometrického a exponenciálního zápisu. Víme:

$$Z = |Z|(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) = |Z|e^{i\alpha}.$$

Nyní si můžu vyjádřit funkci kosinus:

$$\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha = e^{i\alpha},$$

$$\cos \alpha = e^{i\alpha} - i \cdot \sin \alpha,$$

$$2 \cdot \cos \alpha = e^{i\alpha} - i \cdot \sin \alpha + \cos \alpha,$$

$$2 \cdot \cos \alpha = e^{i\alpha} + i \cdot \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha),$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Funkci sinus si nyní můžeme vyjádřit buď obdobně jako nyní a nebo můžeme využít toho, že  $(\cos \alpha)' = -\sin \alpha$ :

$$(\cos \alpha)' = \left( \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \right)',$$

$$-\sin \alpha = \frac{2 \cdot (i \cdot e^{i\alpha} - i \cdot e^{-i\alpha}) + 0 \cdot (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}{4},$$

$$\sin \alpha = -i \cdot \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}.$$

Teď, když máme takto vyjádřenou funkci sinus a kosinus, si zkusíme ukázat platnost známého vzorečku  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \left( -i \cdot \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \right)^2, \\ &= i^2 \cdot \frac{e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha} - 2 \cdot e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha}}{4} + \frac{e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha} + 2 \cdot e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha}}{4}, \\ &= \frac{e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}}{4} - \frac{e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

Nyní se pokusíme zjistit, čemu je rovno  $\sin(\alpha + \beta)$ :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= -i \cdot \frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{2}, \\ &= -i \cdot \frac{e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} - e^{-i\alpha} \cdot e^{-i\beta}}{2}, \\ &= -i \cdot \frac{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \cdot (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \cdot (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}{4}, \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

U třetí úpravy není na první pohled viditelné, že něco takového platí (je třeba chvilku počítat) a ještě těžší by bylo na něco takového přijít. Já jsem také nic takového neudělal. Akorát jsem se z jedné chytré knížky [1] dozvěděl,

co mi má vyjít a upravoval jsem také z druhé strany – od výsledku. Podobně jsem postupoval i v dalším případě:

$$\sin \alpha + \sin \beta = -i \cdot \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} + e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2},$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = -2i \cdot \frac{e^{i\alpha/2} \cdot e^{i\beta/2} - e^{-i\alpha/2} \cdot e^{-i\beta/2}}{2} \cdot \frac{e^{i\alpha/2} \cdot e^{-i\beta/2} + e^{-i\alpha/2} \cdot e^{i\beta/2}}{2},$$

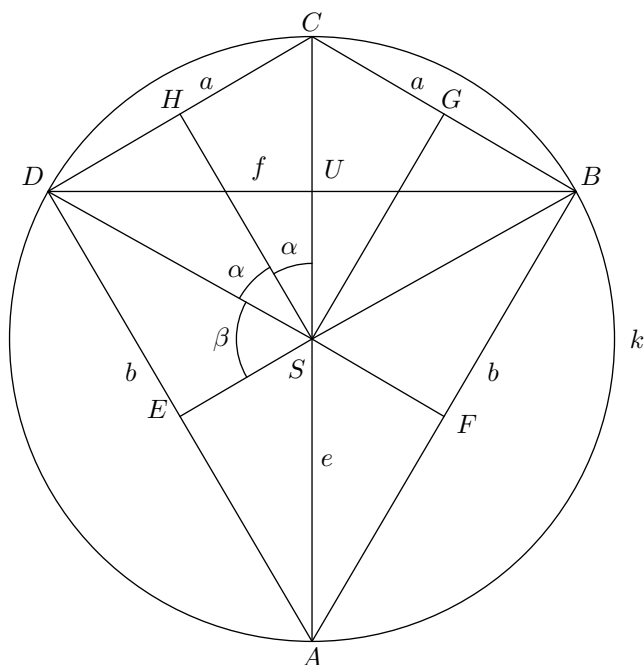
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

### Goniometrické funkce s využitím tětívových čtyřúhelníků

Po několika odvozených vzorečkách se dostáváme k druhé fázi. Dozvěděl jsem se o existenci vzorečku, který platí pro tětívové čtyřúhelníky:

$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$$

Kde  $a, b, c, d$  jsou po řadě strany zmiňovaného čtyřúhelníku a  $e, f$  jsou jeho uhlopříčky. Narýsoval jsem si tedy některé speciální čtyřúhelníky a ze vzorečku se pokusil něco odvodit. Blíže zde rozeberu aplikaci vzorečku pro deltoid s kružnicí opsanou ( $k$ ).



Obr. kII-2.2 – Deltoid s kružnicí opsanou.



Stranu  $a$  si můžeme pomocí goniometrických funkcí z trojúhelníku  $SHD$  vyjádřit takto:

$$\sin \alpha = \frac{a}{2r},$$

$$a = 2r \cdot \sin \alpha.$$

Nyní si obdobně vyjádříme stranu  $b$  z trojúhelníku  $SDE$ :

$$\sin \beta = \frac{b}{2r},$$

$$b = 2r \cdot \sin \beta.$$

Ještě si uvědomíme, že  $\sin \beta$  je vlastně rovno  $\cos \alpha$ , protože  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , což vyplývá z obdélníka  $SHDE$ . Jedná se opravdu o obdélník, neboť úhel při vrcholu  $D$  je pravý (kružnice  $k$  je vlastně Thaletova kružnice), úhly při vrcholech  $H$  a  $E$  jsou pravé, neboť úsečky  $SH$  a  $SE$  jsou výšky. Platí tedy:

$$b = 2r \cdot \cos \alpha.$$

Nyní si vyjádříme uhlopříčku  $e$ , což je vlastně průměr – dvojnásobek poloměru:

$$e = 2r.$$

A nakonec uhlopříčku  $f$  z trojúhelníku  $SUD$ :

$$\sin(2\alpha) = \frac{f}{2r},$$

$$f = 2r \cdot \sin(2\alpha).$$

Nyní už jen dosadíme do vzorečku a upravíme:

$$2ab = ef,$$

$$2 \cdot (2r \cdot \sin \alpha) \cdot (2r \cdot \cos \alpha) = 2r \cdot (2r \cdot \sin(2\alpha)),$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Tento výsledek je pro mě asi největším úspěchem, neboť jsem jej dokonce již stihl prakticky využít.

## Závěr

Nenapsal jsem zde sice všechno, co jsem po dobu soustředění zjistil, ale cílem mého článku bylo spíše ukázat, čím jsem se zabýval, než vypsat několik vzorečků. Konfera mě velice bavila, především proto, že jsem se na ní mohl vyřadit. Jinak chci moc poděkovat (R)adimovi, že mě prováděl konferou, a Pepovi, že mi ukázal vzoreček pro druhou část konfery a poradil co s ním.

## Literatura

[1] H.–J. Bartsch: *Matematické vzorce*. SNTL Praha 1983.



## Výsledková listina

Poř.	Jméno	R.	$\Sigma_{-1}$	Úlohy								$\Sigma_0$	$\Sigma_1$		
				r1	r2	r3	r4	t4	t5	k	+				
1.	Dr. <sup>MM</sup> Štěpán Šimsa	1.	82	4		2	2				8	3	19	82	
2.	Dr. <sup>MM</sup> Josef Tkadlec	4.	86	4	2	3	2						1	12	55
3.	Prof. <sup>MM</sup> Alžběta Pechová	4.	227		1	1	2	5			8	0	17	47	
4.	Dr. <sup>MM</sup> Jakub Töpfer	4.	78	2	2	3	2						0	9	43
5.	Dr. <sup>MM</sup> Tomáš Kubelka	1.	68	2	2	2	2						3	11	41
6–7.	Dr. <sup>MM</sup> Alena Bušáková	2.	81	3	2	2	2						2	11	34
	Mgr. <sup>MM</sup> Zuzana Dočekalová	3.	34												34
8.	Doc. <sup>MM</sup> Petr Pecha	2.	151	2	1	1	2						1	7	29
9–10.	Doc. <sup>MM</sup> Ladislav Bačo	3.	110	4		3	2						1	10	27
	Dr. <sup>MM</sup> Jakub Klemsa	3.	65	4	0	3	2						1	10	27
11.	Mgr. <sup>MM</sup> Filip Štědronský	2.	26												26
12.	Mgr. <sup>MM</sup> Eliška Nekvapilová	4.	47												22
13.	Mgr. <sup>MM</sup> Jan Vaňhara	4.	47			2	2			10		0	14	21	
14–16.	Dr. <sup>MM</sup> Tomáš Bartoněk	2.	61	1	1	2	1						1	6	20
	Mgr. <sup>MM</sup> Filip Hlásek	2.	20			3	2						1	6	20
	Mgr. <sup>MM</sup> Michal Husek	3.	20												20
17–18.	Mgr. <sup>MM</sup> Kateřina Honzáková	3.	31	1	3	3	2				8	1	18	18	
	Bc. <sup>MM</sup> Michaela Kochmanová	2.	18	1		1	2			14		0	18	18	
19–21.	Bc. <sup>MM</sup> Alena Jurásková	1.	17		1	1	2						1	5	17
	Bc. <sup>MM</sup> Karel Kraus		17	3	1	3	2						0	9	17
	Bc. <sup>MM</sup> Vojtěch Miloš	3.	17	2	1	2	2						0	7	17
22.	Bc. <sup>MM</sup> Martina Bekrová	4.	15	4		3	2						0	9	15
23–24.	Mgr. <sup>MM</sup> Lukáš Zavřel	2.	48												14
	Bc. <sup>MM</sup> Anna Chejnovská	2.	14	2	2		2						1	7	14
25–27.	Dr. <sup>MM</sup> Miroslav Koblížek	2.	56	4									0	4	13
	Mgr. <sup>MM</sup> Peter Smolárik	3.	37	0	1	3	2						0	6	13
	Bc. <sup>MM</sup> Pavel Novotný	3.	13		1								0	1	13
28–30.	Dr. <sup>MM</sup> Miroslav Klimoš	4.	65												12
	Mgr. <sup>MM</sup> Jitka Novotná	4.	37												12
	Bc. <sup>MM</sup> Tomáš Pokorný	2.	12	4	1	3							2	10	12
31.	Bc. <sup>MM</sup> Martina Vaváčková	3.	16			3	2						0	5	11
32–34.	Dr. <sup>MM</sup> Alžběta Prokopová	4.	52												9
	Mgr. <sup>MM</sup> Zuzana Terešková	1.	23			0	2						0	2	9
	Jan Škoda	2.	9			2	2			5			0	9	9
35.	Barbora Šmídová	1.	8												8
36.	Mgr. <sup>MM</sup> Hana Bílková	4.	34												7
37.	Vojtěch Dziewicki	3.	6												6
38.	Pavel Kratochvíl	1.	5		0	1	1						0	2	5

Poř.	Jméno	R.	$\sum_{-1}$	Úlohy								$\sum_0$	$\sum_1$
				r1	r2	r3	r4	t4	t5	k	+		
39–40.	Alena Harlenderová	1.	4	2		1					1	4	4
	Tereza Zábojníková	4.	4										4
41.	Libor Plucnar	4.	3										3
42.	Barbora Běhmová	1.	2	0							0	0	2

Sloupeček  $\sum_{-1}$  je součet všech bodů získaných v našem semináři,  $\sum_0$  je součet bodů v aktuální sérii a  $\sum_1$  součet všech bodů v tomto ročníku.

Ve sloupci „R.“ je uveden ročník (přepočtený na čtyřleté gymnázium, minimální hodnota je první ročník). Pokud máte v tomto sloupci uvedeno špatné (nebo žádné) číslo, napište nám svůj rok maturity, a my si opravíme údaj v databázi. Sloupeček „+“ značí bonusové body udělované podle ročníku a součtu bodů za úlohy.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

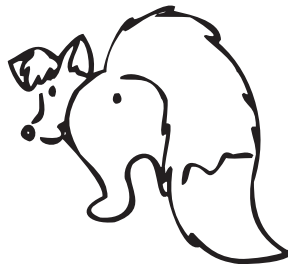
## Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF  
Ke Karlovu 3  
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235

E-mail: [MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz](mailto:MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz)

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz>



Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.