



Termín odeslání: pondělí, 24. 11. 2008

Ahoj kamarádky a kamarádi,
dostává se vám do rukou druhé číslo letošního polokulatého ročníku. V něm naleznete nová zadání čtyř úloh a dvou témat.

Pokud jste byli dostatečně pilní, můžete se těšit, že vám již brzy zašleme pozvání na podzimní soustředění. Navíc vás všechny zveme na Den otevřených dveří na MFF UK, který letos proběhne v úterý 2. prosince.

Na viděnou na soustředění nebo na dni otevřených dveří

Redakce

Zadání úloh

Úloha 2.1 – Poštovní holub (3b)

Na rovné železniční trati se porouchalo zabezpečovací zařízení, takže strojvedoucí dvou protijedoucích vlaků se rozhodli posílat si informace pomocí poštovního holuba. Ten vyletí od vlaku A přímo k vlaku B jedoucímu v protisměru na vedlejší koleji. Jakmile k němu doletí, otočí se (v nulovém čase) a letí se zprávou zas zpět. U vlaku A se opět otočí a takto létá dokud se vlaky neminou.

Vzhledem ke stále foukajícímu větru letí ve směru od vlaku A k vlaku B rychlostí 100 km/h, ale od vlaku B k vlaku A letí proti větru rychlostí pouze 60 km/h. Platné drážní předpisy omezují maximální rychlost při použití holubího zabezpečovacího zařízení a tak jede vlak A stálou rychlostí 30 km/h a vlak B rychlostí pouze 25 km/h. Ve chvíli, kdy holub poprvé odlétl od vlaku A byly od sebe vlaky vzdáleny 20 km. Kolik kilometrů nalétá holub, než se vlaky minou?

Úloha 2.2 – Odporný odpor vzduchu (3b)

Marble ví, že pokud na svém kole šlape do pedálů s výkonem 200 W, jede po rovině a za bezvětří rychlostí přesně 30 km/h. Jakou rychlostí pojede, pokud nezmění svůj výkon, ale bude foukat protivítr o rychlosti 4 m/s? Na jakou hodnotu by musel zvýšit svůj výkon, aby udržel původní rychlost 30 km/h? Také by jej zajímalo, jak silný vítr by mu musel foukat do zad, aby při šlapání svým maximálním výkonem 300 W dosáhl rychlosti 50 km/h. Spočítáte mu to?



Úloha 2.3 – Správy o mojej smrti boli značne prehnané. (5b)

V bani ležiacej v bode A došlo k závalu. Prvé správy, ktoré z bane vyrazia hovoria o stovkách zavalených a šíria sa rovnomerne do okolia rýchlosťou v_a . V čase τ (to už o nehode vedia v celom kruhu o polomere $v_a\tau$ so stredom v bode A) sa baníci v bode B (vzdialenom r od bodu A) vyhrabú na povrch. Správa o tom, že sa zachránili sa začne šíriť z bodu B do okolia rýchlosťou v_b . Tam, kde ako prvá dorazí správa o katastrofe z bodu A , vyvesia čierne zástavy. Tam, kde ako prvá dorazí správa o záchrane z bodu B , už žiadne zástavy vyvesovať nebudú (vedia už predsa, že baníci sú v poriadku).

Vašou úlohou je popísať tvar územia, na ktorom čierne zástavy stihli vyvesiť (teda kam ako prvá dorazila správa z bodu A). Pre zjednodušenie môžete vyriešiť konkrétny prípad, kde $r = 3$ km, $v_a = 0,5$ km/h, $v_b = 1$ km/h a $\tau = 10$ h (keď zvolíte prevod km \rightarrow cm, mohlo by sa riešenie vôjsť na A4). Obecné riešenie má ale oveľa vyššiu cenu. Ak navyše budeme predpokladať, že z miest, kde ako prvá dorazila správa o záchrane už správu o katastrofe ďalej nepošlú, bude možno stačiť vyslať správu o záchrane iba do časti uhla (teda do výseku a nie do celého kruhu). Zaujímá nás – samozrejme – aký minimálny výsek stačí a pre aké hodnoty konštánt má táto úloha zmysel.



Úloha 2.4 – Věž z mincí (2b)

Riky si šel kúpiť čokoládu za 42 Kč. Pripravil si dve desetikoruny, štyri pětikoruny a jednu dvoukorunu a postavil se do fronty k pokladně. Jak tak čekal, všiml si zajímavé věci. Pokud k sobě přiložil dvě mince nejbližší hodnoty (např. pětikorunu a desetikorunu nebo pětikorunu a dvoukorunu), mince do sebe díky vyvýšenému okraji zapadly. A tak Riky sestavil věž z mincí, tak, že na sebe postupně kladl pětikorunu, desetikorunu, pětikorunu, desetikorunu, pětikorunu, dvoukorunu a pětikorunu.

Paní prodavačka si sice elegantního způsobu platby nevšimla, ale Rikiho by zajímalo, zda je možné podobně elegantně zaplatit libovolnou částku.

Zadání témat

Téma 4 – Jiný svět

„Dneska je to přesně rok, kdy jsem se objevil v tomto podivném světě. Stalo se to náhle. Pamatuju si to docela přesně, ulehl jsem do své měkké postele na mé milé Zemi a ráno jsem se probudil tady. Podivný svět.“

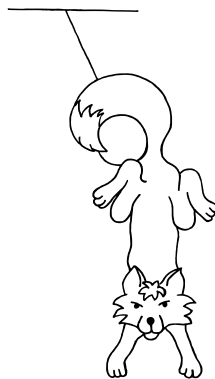
Za ten rok, co jsem tady, se mi podařilo objevit několik zajímavostí. Svět je obydlen. S obyvateli jsem se kupodivu domluvil anglicky, ale nikdo nevěděl jak se zde ocitl. Trochu mě zarmoutilo, že jsem zde jediný fyzik a tak si s nikým nemohu popovídat o zdejší podivné gravitaci. Vybavením mi to zde připomíná přelom 19. a 20. století.

Připadám si zde trochu jako ve vězení, neboť svět je ohraničen neproniknutelnými stěnami (stále mi vrtá hlavou jak jsem se sem mohl dostat). Svět má tvar krychle o hraně dva kilometry a je vyplněný z větší části skálami, ve kterých jsou podle potřeb zdejších obyvatel vyvrtány tunely. Ze své běžné denní zkušenosti vím, že čím více se vzdalují od středu světa, tím větší je má tíha. (Zatím jsem se nepokusil přesně změřit jak.)

Pokud se blížím ke stěnám podél osy x , míří tíha vždy od středu a postupně roste. Pokud se blížím ke stěnám podél osy z , míří naopak zrychlení vždy do středu a postupně roste. Přitom zrychlení podél osy x narůstá rychleji, než zrychlení podél osy z . Pokud se pohybuji ve směru osy y , zrychlení se nemění. Ve středu se nacházím ve stavu beztíže. Tíha rovněž vymizí na dvou „nulových rovinách“, jejichž společným průnikem je osa y .

Směrem záporné osy x poměrně rychle roste teplota, samotná stěna je dosti žhavá a nikdo bez sebevražděných úmyslů se nevydává směrem k ní. Ve směru kladné osy x naopak teplota klesá. Protože v krychli jsou vyvrtané tunely jen někde, nelze úplně snadno měřit něco podél stěn krychle – musely by se vykopat nové tunely a to dá hodně práce.

Díky teplu záporné x -ové stěny se dají uvnitř pěstovat různé druhy rostlin, což je taky to, co většina méně fyzikálně laděných obyvatel dělá. Uvnitř můžete normálně fyziologicky fungovat, nikdo se ale zatím nezajímal o složení atmosféry, či její zdroj. Každopádně tunely fouká vítr, dosti složitým způsobem. Zdrojem světla je rovněž záporná x -ová stěna. Většina věcí uvnitř je téměř průhledná. Skály také, ale rozptylují světlo do té míry, že se skrz ně nedá vidět nic rozumného. Ačkoliv se dá zkoumat i tento aspekt světa, chtěl bych zdůraznit, že o vlastnosti světla se nezajímám až tak moc, jako o vysvětlení tíhových zrychlení.“



Vaším úkolem je vysvětlit tyto podivné jevy, tedy co může způsobovat podivné chování gravitace a teploty. Stručné údaje z vyprávění nejspíš nebudou stačit a tak po vás nejdříve budeme chtít, abyste nám poslali návrh měření, které ve světě provedete.

Uvedeme příklad: „Z bodu $(0, 0, 1 \text{ km})$ pustím olověnou kuličku a budu sledovat polohu kuličky v čase.“ Je na vás, jak experiment sestavíte. Máte k dispozici vše, co byste mohli normálně sestavit na Zemi na přelomu 19. a 20. století, pokud se to vejde do vnitřních rozměrů krychle. Nezapomeňte také na skály – dříve či později kulička z příkladu do některé z nich narazí a tak nemůžete očekávat, že by doletěla až k protější stěně.

Pokuste se formulovat co nejvíce experimentů. Můžete také zkusit popsat všechny podrobnosti navrhovaného experimentu. Například jak přesně byste měřili polohu kuličky u výše popsaného experimentu.



Po vašem návrhu se vám v dalším čísle dostanou výsledky měření. Mějte na mysli, že vaše měřicí metody mohou mít jistou chybu, a proto když měříte vzdálenosti pomocí vaší tělesné výšky, dostanete výsledky i s centimetrovými odchylkami.

Abychom předešli komplikacím, domluvme se na souřadném systému. Jeho počátek bude ve středu krychle tvořící náš svět a osy budou kolmé navzájem, i ke stěnám světa (tak jak je používá vypravěč). Hodnoty na osách x , y a z jsou v rozsahu od -1 do $+1 \text{ km}$.

Jiný svět jsme si vypůjčili od jednoho nejmenovaného sci-fi autora. Po skončení ročníku vám jeho jméno i jméno knihy prozradíme.

Téma 5 – Deratizace

Věřím, že každý z vás už slyšel o městečku jménem Hammeln. O krysí pohromě, která ho postihla a o nešťastných událostech, které následovaly, když hammelnští pozvali na pomoc Krysaře. (Pokud ne, poohlédněte se v knihovně po dílech Viktora Dyka.)

A protože historie se, jak známo, ráda opakuje, hammelnské sklepy a stoky se opět začaly hemžit krysami. Dostanou se všude, všechno sežerou nebo alespoň rozhryžou, a když zabijete jednu, odněkud hned vyběhnou tři další.

A tak se hammelnští radní opět rozhodli povolát krysaře. Poučení událostmi z minula ovšem nehodlají využít služeb nějakého šarlatána s flétnou. Chtějí krysy vyhubit osvědčenou a vědecky podloženou metodou, a to tak, že celé sklepení projdou lovci krys, kolem kterých neproklouzne ani myš, natož pak krysa, a kteří všechny krysy, které najdou ... no ... řekněme deratizují.

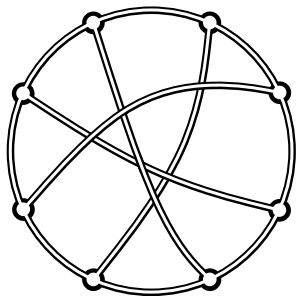


Tenhle postup ale má svá úskalí. Především to, že málokteré sklepení může deratizovat jediný krysař – stačí aby se chodba, kde krysař pracuje, rozvětvila a sotva krysař zmizí v jedné větvi, z druhé se okamžitě vyřítí tisíce krys a znovu „ratizují“ celou chodbu, kterou už krysař pracně vyčistil. Na druhé straně kdyby sebou krysař měl kolegu, který by čekal na křižovatce a bránil krysám vběhnout do již vyčištěných chodeb, snadno by mohl vyčistit jednu větev po druhé.

Krysy navíc běhají mnohem rychleji než krysař, takže ani na obyčejnou chodbu, která vede kolem celého Hammeln, jeden krysař nestačí – krysy by jenom bezvýsledně honil kolem dokola. I na tuto chodbu by tedy byli potřeba dva krysaři.

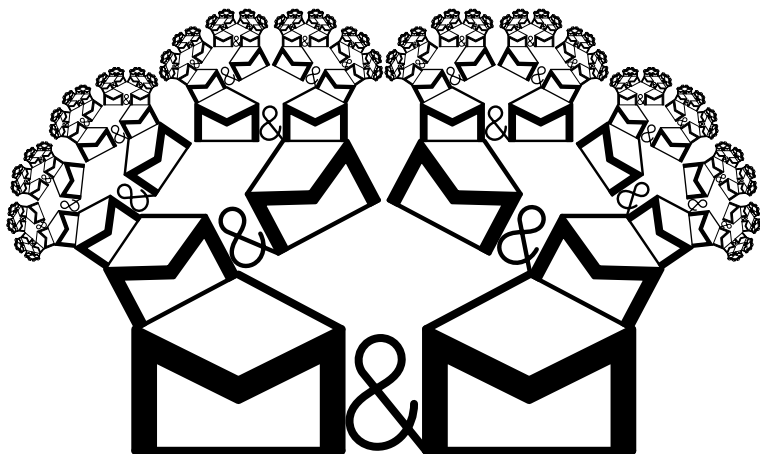
Proč vám tohle všechno vykládám? Hammelnští radní totiž se šetrností sobě vlastní nehodlají zaměstnat ani o krysaře víc než je nezbytně nutné, a tak požádali M&M o pomoc. Potřebují spočítat, kolik krysařů je potřeba k deratizaci hammelnských sklepů. Samozřejmě redakci M&M poskytli mapy všech sklepů, která v Hammeln jsou. Domníváme se však, že jejich otištění v časopisu by bylo plýtvání místem, protože řešitelé určitě naleznou obecný postup, který půjde použít pro libovolné sklepení. Upozorňujeme, že hammelnské sklepy jsou často několikapatrové a běžně se v nich vyskytují meziúrovňové křížovatky. Na druhé straně, i sklepy podléhají módním trendům. V posledních několika stáletích byly v módě obyčejné mřížky z chodeb, sklepy kde nejsou žádné cykly (jen se větví ale nikde se nedá jít kolem dokola), sklepy, které tvarem připomínají loukoťové kolo – mají jednu okružní chodbu, z níž vede několik chodeb, které se sbíhají ve středu a další, které se podobají tomu radničnímu – mají kulatou obvodovou chodbu, jejíž protější strany jsou na několika místech spojeny, ale pozor, spojovací chodby se kříží mimoúrovňově.

Jako inspiraci na začátek můžete spočítat, kolik krysařů je potřeba na deratizaci sklepů pod radnicí.



Obr. t5.1 – Mapa sklepů pod radnicí.

Pokud by vám předchozí úkoly nestačily, vězte, že někteří radní se obávají, že krysaři si budou účtovat cenu podle vzdálenosti, kterou zderatizovali (a protože kolem takového krysaře neproklouzne ani myš, natož pak krysa, projít chodbou plnou krys a nederatizovat je by bylo pod jeho úroveň), a proto by se jim nemělo dovolit aby nějakou chodbu deratizovali vícekrát. Změnily by se v tom případě potřebné počty krysařů? Jak?



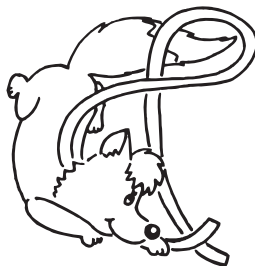
Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235

E-mail: MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz>



Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory střeďočeké pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.